NAZIONALE
B. Prov.
XII
136
NAPOLI
BIBLIOTECA
VITT EM III

REALE OFFICIO TOPOGRAFICO
Armadio . 30-5-19
N.° 32

Digitized by Google

22 Gh 183

LA THEORIE ET LA PRATIQUE
DE LA
COUPE DES PIERRES ET DES BOIS,
POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES
Et autres parties des Bâtimens Civils & Militaires,

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Directeur des Fortifications de Bretagne.

Nouvelle Edition corrigée & augmentée.

TOME PREMIER.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur du Roy en son Artillerie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIV.

Digitized by Google

DISCOURS PRELIMINAIRES.

PREMIER DISCOURS.

SUR L'UTILITE' DE LA THE'ORIE, Dans les Arts relatifs à l'Architecture.

JE me propoſe dans cet Ouvrage de donner la Théorie des Sections des Corps, autant qu'elle eſt néceſſaire à la démonſtration de l'uſage qu'on en peut faire en Architecture pour la conſtruction des voutes, & la *COUPE DES PIERRES ET DES BOIS*, ce que perſonne n'avoit encore fait; & parce que je prends une route différente de ceux qui ont traité de cette matiere, qui ſe ſont tellement bornés à la Pratique, qu'ils ſemblent mépriſer la Théorie, ou l'ignorer: je vais tâcher d'en établir l'utilité.

Vitruve, qu'on peut citer pour un bon connoiſſeur dans les Arts, parce qu'il eſt reconnu pour un fameux Architecte, & qu'il étoit de plus Ingénieur d'Auguſte, y diſtinguoit deux choſes (*) ſçavoir, l'*Ouvrage* & le *Raiſonnement*; l'une, dit-il, eſt

(*) *Ex duabus rebus ſingulas Artes eſſe compoſitas, ex* OPERE *& ejus* RATIOCINATIONE; *ex his autem unum proprium eſſe eorum, qui ſingulis rebus ſunt exercitati id eſt: opus effectus; alterum commune cum omnibus Doctis, id eſt RATIOCINATIO.*

l'affaire des Gens qui en ont fait apprentiſſage; l'autre eſt du reſſort des Sçavans. Tout le monde ne penſe pas auſſi juſte que lui; les hommes, pour la plus grande partie, connoiſſent ſi peu la nature des Arts, qu'ils croyent que l'on ne peut s'y rendre habile que par l'expérience; ils regardent la Théorie comme une occupation vaine, qui n'a pour objet que des chimeres, dont les Arts ne retirent aucun avantage. (*) On a vû, diſent-ils, de Grands Hommes dans l'Architecture Civile, & même dans le Militaire, qui ſe ſont diſtingués par leurs Ouvrages ſans être Géometres ni Algébriſtes, donc on peut ſe paſſer de ces Sciences pour devenir habile dans les Arts.

Pour répondre à ce faux raiſonnement, que bien des gens tâchent de faire valoir par l'intérêt qu'ils ont de l'établir; je dirai qu'abſolument parlant, à la réſerve de la nourriture, les hommes peuvent ſe paſſer de tout, même d'habits dans les Pays froids, témoins les anciens Gaulois, nos Ancêtres, & pluſieurs Nations de Sauvages; mais puiſque la Nature nous a deſtinés au travail, & que moyennant un peu d'application elle nous donne l'induſtrie d'ajouter une infinité d'agrémens & de commodités aux Ouvrages de ceux qui nous ont précédé, & de concilier la beauté & la ſolidité des Edifices, qui nous garantiſſent des injures de l'air & des inſultes de nos ennemis, il ſemble que ce n'eſt pas agir en hommes raiſonnables, que d'attendre que l'expérience nous faſſe ſentir nos beſoins; mais que nous devons réfléchir aux moyens de pourvoir à ceux qui peuvent nous arriver dans l'exécution de nos deſſeins, & de combiner ces moyens de tant de manieres différentes, que nous choiſiſſions toujours les plus ſûrs, les plus courts & les plus faciles, ce qui eſt réſervé à la ſeule Théorie.

Galli ſuper umbilicum erant nudi. Tite-Live. l. 23. p. 46.

Qu'on me permette ici une comparaiſon pour rendre cette vérité plus ſenſible; avant qu'on eût formé les grands chemins par des chauſſées droites, ſolides, & de largeur commode, on communiquoit comme aujourd'hui d'une Ville à une autre,

(*) Voyez les *Penſées critiques ſur les Mathématiques* par CARTAUD, qui oſe avancer que les Mathématiques ont peu contribué à la perfection des beaux Arts. *A Paris* 1734.

mais on demeuroit bien plus long-tems en chemin ; on éprouvoit une plus longue fatigue, on étoit ſujet à demeurer embourbé, & ſouvent à s'égarer.

Avant qu'on eut conſulté la Géométrie & la Méchanique en Architecture, on faiſoit des voutes des mêmes matériaux qu'aujourd'hui ; mais on ne pouvoit s'aſſûrer de l'équilibre de l'effort de leur *Pouſſée*, & de la réſiſtance des *Piédroits* qu'il tend à renverſer ; de ſorte que ne ſçachant garder un milieu convenable entre le trop & le trop peu de leur épaiſſeur, on étoit ſujet à y conſommer une dépenſe ſuperflue en matériaux, ou à les voir s'écrouler par trop de foibleſſe : l'expérience nous en fournit encore aſſez ſouvent des exemples, à la honte de ceux qui ſe mêlent de conſtruction ſans connoiſſance de Géométrie ni de Méchanique, & au grand dommage de celui qui fait bâtir. On faiſoit auſſi des ceintres de différentes eſpeces, circulaires, ſurbaiſſés, ſurhauſſés & rampans ; mais on ignoroit quelle étoit la courbe qui leur convenoit le mieux dans les circonſtances des termes donnés. On rencontroit dans l'exécution des difficultés qu'on n'avoit pas prévû, & qu'on ne ſçavoit réſoudre que comme le nœud gordien, en démoliſſant & recoupant pluſieurs fois les parties de voutes qui ne quadroient pas, juſqu'à ce que l'œil fût moins offenſé de leur difformité, d'où il réſultoit beaucoup de perte de tems & de matériaux ; & parce que le tâtonnement n'a de ſuccès que par hazard, de tels ouvrages duroient peu, coûtoient beaucoup de façon, & ſatisfaiſoient rarement la vûe & l'eſprit des Connoiſſeurs.

D'où vient donc que les Praticiens mépriſent la Théorie, & la comptent pour rien au prix de l'expérience qu'ils ne ceſſent de vanter ? J'en trouve deux raiſons : la premiere, c'eſt pour détourner la honte qu'ils ont de ne pouvoir rendre d'autre raiſon de leurs Ouvrages, que celle de l'imitation de ceux qui paſſent pour bons, & de la convenance qu'ils ont remarqué dans la pratique, ſentant bien qu'ils ne ſont pas aſſez éclairés pour remonter à la cauſe. Cette raiſon eſt tirée de la vanité du cœur humain ; l'homme pour s'élever ſur ſes égaux, affecte

de mépriſer les choſes qui lui manquent, & cherche à faire parade du peu qu'il poſſede ; de-là vient, qu'on ſe mépriſe réciproquement dans le monde, & que la ſcience, dont la beauté & l'utilité ſont peu connues de la multitude, n'eſt pas élevée au rang qu'elle doit tenir au-deſſus de la ſeule pratique ; l'inattention & ſouvent le défaut de lumiere des gens en place, favoriſent les faux jugemens que l'on porte ſur le mérite de la routine ; puiſqu'on voit que la peine de travailler à acquérir des connoiſſances utiles aux beſoins de la vie, ou à l'ornement de l'eſprit, eſt ordinairement très-inutile pour la fortune ; c'en ſeroit aſſez pour énerver toute émulation, arrêter les progrès des Arts, & rappeller la barbarie des ſiecles d'ignorance, ſi la Nature n'avoit pourvû à l'aveugle injuſtice des hommes. Elle a attaché à cette peine la récompenſe d'une ſatisfaction intérieure, (*) qui eſt ſeule capable de la ſoutenir contre les dédains d'une ſtupide indifférence, ou d'une préſomptueuſe ignorance. En effet, ſans les attraits des ſciences, & un certain amour de la Vertu, qu'eſt-ce qui pourroit engager un homme ſenſé à conſacrer, ſes veilles ſans intérêt, au ſeul bien du Public, qui fourmille de gens plus diſpoſés à la critique qu'à la reconnoiſſance, à relever les moindres fautes, qu'à leur faire grace en faveur de ce qui doit plus mériter leur attention & leur applaudiſſement ?

(*) *Virtutum præmium in ipſis eſt, & rectè facti merces eſt feciſſe.*

La ſeconde raiſon de ceux qui préferent la ſeule Pratique à la Théorie, peut être ſincérement déduite du fond de leur ignorance, parce qu'ils lui attribuent les effets de la Théorie qui leur eſt inconnue. D'AVILER, fameux Auteur en Architecture, nous en fournit une preuve, & un exemple comique à la page 274. *La ſévérité des Regles de Géométrie*, dit-il, *eſt inférieure à la Pratique, comme LA METHODE DES CHERCHES RALONGE'ES VAUT MIEUX QUE LES FIGURES GEOMETRIQUES, d'autant qu'en cet Art la Pratique eſt préférable à la Théorie.* On ne peut s'empêcher de rire d'une pareille déciſion, qui montre évidemment que le Juge n'entend pas l'état de la queſtion, & qu'il veut fronder ce qu'il ne connoît pas ; en effet, s'il avoit ſçû que la *Cherche ralongée* tirée du plein ceintre, du

ſurhauſſé ou du ſurbaiſſé, étoit une ellipſe très-Géométrique, il n'auroit pas tenu ce langage ridicule. La plupart des gens ſans Théorie parlent & penſent comme lui, parce que faute de principes ils n'arrivent qu'avec de grands efforts & une longue ſuite de pratique à quelques foibles connoiſſances des choſes qui ſont les plus aiſées à ceux qui ont de la Théorie; de-là vient qu'ils font grand cas des moindres, & ſe croyent de grands hommes pour s'être frayé quelques routes un peu aiſées dans la Pratique, quoique ces prétendus Inventeurs ne puiſſent s'aſſûrer de la juſteſſe ni de la réuſſite de leurs opérations tâtonnées, dont ils ne voyent ni la différence des cas, ni la preuve; de ſorte qu'ils croyent ſouvent avoir bien réuſſi, lors même qu'ils n'ont fait qu'approcher de la vérité, & qu'ils n'ont pas pris la voye la plus ſûre & la plus courte; cependant parce qu'ils ne connoiſſent pas d'autre moyen pour y parvenir que l'expérience, ils ne penſent pas qu'il y ait de meilleur maître, appuyez ſur le proverbe qu'ils citent à tout propos, *Experientia rerum magiſtra.*

Je ne prétend pas ici diminuer le mérite de l'expérience, j'en connois la néceſſité en pluſieurs choſes; par exemple, en Phyſique elle fait appercevoir des objets & des effets ſur leſquels on n'étoit pas prévenu par le raiſonnement; perſonne ne doute qu'elle ne ſoit indiſpenſablement néceſſaire dans les Arts qui dépendent de l'habitude, & dans ceux qui ſont problématiques, comme la guerre; mais elle l'eſt beaucoup moins dans ceux qui émanent des ſciences; c'eſt un guide équivoque, comme le bâton d'un aveugle, qui ne lui ſert à ſe conduire que très-imparfaitement, en ce qu'il ne lui indique pas ſi bien les objets qu'il ne puiſſe prendre l'un pour l'autre, & ſe précipiter, ſi le cas y arrive.

Cette diſtinction indique ce que l'on doit penſer ſur la Science & l'expérience néceſſaire à un Ingénieur; puiſque ſon Etat tient à la Guerre & aux Arts dépendans des Mathématiques; ce ſeroit mal décider contre la Théorie que de citer des gens élevés aux dignités par les actions militaires, quoique bornés à une

ſimple routine de conſtruction ; les récompenſes dûes à la valeur ; n'annoncent qu'une partie du mérite d'un homme de guerre, laquelle ne ſuffit par pour un Ingénieur. Ceux de l'Antiquité étoient ſçavans ; leurs merveilleuſes inventions dans les Sieges nous le prouvent aſſez ; & quoique depuis la décadence des Romains, les Sciences ayent en quelque façon fait divorce avec la Guerre (car il n'eſt plus de ces hommes propres à être ſur le Trône de la Juſtice, & à la tête des Armées) cette ſéparation n'aura jamais lieu à l'égard des Ingénieurs, c'eſt chez eux que doit ſubſiſter cet ancien accord de la Science & de la Guerre ; s'ils ont beſoin de la bravoure, du bon ſens & de l'expérience d'un Guerrier, ils ont encore beſoin de la ſcience d'un Mathématicien. Sans la Géométrie, la Méchanique & l'Hydraulique de quoi ſont-ils capables dans la conſtruction des Fortereſſes & Places de guerre, que d'imiter ce qu'ils ont vû, & copier ſouvent des fautes ? Les traces de l'aveugle expérience ne ſont pas rares, il n'y a gueres de Ville où l'on n'en reconnoiſſe quelques-unes.

Neque enim ingenium ſine Diſciplina, aut Diſciplina ſine ingenio perfectum artificem poteſt efficere. Vitr.

J'avancerai de plus, que les Sciences néceſſaires à la conſtruction ne ſont pas inutiles à la Guerre ; elles ouvrent l'eſprit, fourniſſent des moyens induſtrieux pour les manœuvres & les ouvrages néceſſaires à l'attaque & à la défenſe des Places, que la ſeule valeur ne ſçauroit exécuter ſans ce ſecours. ARCHIMEDE étoit un Mathématicien de pure ſpéculation, qui n'auroit pas daigné deſcendre à la Pratique, s'il n'avoit été engagé par les ſollicitations du Roi HIERON ſon parent, de faire uſage de ſes connoiſſances pour l'invention des Machines de guerre ; cependant ſes coups d'eſſai furent ſi bien des coups de maître, qu'au Siege de Syracuſe il dérouta, par la force de la Théorie, toute l'expérience de ces Ingéniers Romains, qui avoient fait valoir avec de grands ſuccès leur habileté dans la conquête des Places les plus fortes ; ſes nouvelles Machines eurent tant d'effet, qu'il intimida & rebuta l'Armée de Marcellus, au point que ce Général renonça aux approches & aux aſſauts, forcé de ſe réduire à chercher par la longueur du Siege, ce qu'il ne pouvoit

voit obtenir par la force contre l'ingénieuſe réſiſtance que lui faiſoit Archimede. On peut lui en attribuer tout l'honneur, car Plutarque dit, qu'il étoit l'unique Auteur de la défenſe, que les Syracuſains n'étoient que comme le corps & les membres, dont lui ſeul étoit l'ame qui mettoit tout en mouvement, ſans qu'on fit uſage d'autres armes que des ſiennes. Cependant ce grand homme, ajoute-t-il, ne ſe glorifioit point de ces heureuſes nouveautés, il ne les regardoit que comme des *jeux de la Géometrie*, qu'il eſtimoit ſi peu en comparaiſon de la Théorie, qu'il crut ſe faire plus d'honneur d'en laiſſer des Ecrits, que la deſcription de ces merveilleuſes Machines, dont l'invention & l'uſage lui avoient acquis tant de gloire & un ſi grand nom, qu'il paſſoit pour un homme *doué non de ſcience humaine, mais de ſageſſe toute Divine.* Diſons-le ſans déguiſer, la ſeule expérience ne fait que de ſerviles imitateurs, qui étant embarraſſés dans les moindres choſes, & n'ayant de reſſource que dans le recueil de leur porte-feuille, donnent comme des aveugles dans le faux pour les projets, l'exécution, & le toiſé.

Plutarque *in vita Marcelli.*

Je dirai cependant ſans vouloir favoriſer l'ignorance, qu'un Ingénieur doit ſe borner à l'étude de ce qui peut être utile à la pratique, ſans ſe livrer à de vaines curioſités, de peur qu'entrainé par l'amorce du plaiſir des Découvertes, plus capables de flatter ſa vanité que de le conduire à une plus grande perfection des Arts, il ne ſoit ſouvent diſtrait & tenté de négliger ſon devoir; il doit ſes premiers ſoins à la ſolidité & à la propreté des Ouvrages dont il eſt chargé, & éviter l'écueil du mépris que les hautes ſciences inſpirent pour des occupations qui ſont à la portée des eſprits les plus bornés; il lui ſuffit d'être en état d'entendre & de mettre à profit les ouvrages des Sçavans & des Académies des Sciences, qui ont quelque rapport aux Arts néceſſaires à la conſtruction des Places, remettant les études aux Hyvers & aux autres tems de loiſir que nous laiſſe le ſervice du Roi.

Satis abunde is videtur feciſſe, qui ex ſingulis Doctrinis Partes & RATIONES earum mediocriter habet notas, eaſque quæ neceſſariæ ſunt ad Architecturam, ut ſi quid de his rebus & Artib. judicare & probare opus fuerit, ne deſtituatur vel deficiat. Vitr. l. 1. c. 1.

Parmi les connoiſſances qui nous ſont néceſſaires, celle de la Coupe des Pierres, quoiqu'une des plus négligées, n'eſt pas

une des moins importantes. J'ai reconnu par ma propre expérience qu'elle étoit auſſi indiſpenſablement néceſſaire à un Ingénieur qu'à un Architecte, parce qu'il peut être envoyé comme moi dans des Colonies éloignées, & même dans des Provinces où l'on manque d'Ouvriers capables d'exécuter certaines parties des Fortifications, où il faut de l'intelligence dans *l'appareil*. L'épreuve que je venois d'en faire à mon ſecond retour de l'Amérique, me fit naître l'idée d'en compoſer un Traité; invité à cette entrepriſe, premierement par l'extrême rareté des Livres ſur cette matiere, ſecondement par la maniere imparfaite dont elle a été traitée juſqu'à préſent. J'en dreſſois le projet, lorſque j'appris qu'un Architecte en alloit publier un, en effet, quelques mois après, celui de M. de La Rue parut; mais comme il n'eſt fait, de même que celui du P. Derand, (qui étoit pour ainſi dire le ſeul) que pour conduire la main ſans éclairer l'eſprit, je reconnus qu'il n'étoit pas aſſez Méthodique pour remplir l'attente du public, qui ſouhaitoit depuis long-tems un Ouvrage plus Géométrique; j'en fus convaincu lorſque les perſonnes à qui j'avois communiqué mon plan, m'engagerent à y travailler & à le ſuivre, parce que la différence en eſt ſi grande, qu'on peut dire, que ce n'eſt pas multiplier les mêmes eſpeces de Livres. Ceux que je viens de citer ſont faits pour les Ouvriers, & celui-ci pour les gens qui les doivent conduire, comme les Ingénieurs & les Architectes, que l'on doit ſuppoſer initiés dans la Géométrie.

Je ſçai que la routine & une certaine Géométrie naturelle tiennent lieu de ſcience aux appareilleurs dans les cas ordinaires; mais j'ai éprouvé qu'elle leur devenoit inutile dans ceux qui ne ſont pas énoncés dans les Livres, comme je le ferai remarquer lorſqu'il en ſera queſtion, & qu'ils ſeroient arrêtés tout court, ſi l'Ingénieur n'étoit en état d'y ſuppléer. Il doit donc prévenir la honteuſe néceſſité de ſe livrer à l'ignorance des plus expérimentés, qui n'en viennent à bout qu'à force de tâtonner & de démolir pluſieurs fois, finiſſant enfinpar quelque difformité ou défaut de ſolidité. Ces cas ne ſont pas ſi rares qu'on ſe l'ima-

gine, puiſqu'ils me ſont arrivés; il n'eſt pas non plus extraordinaire d'en trouver des veſtiges, non-ſeulement dans les racordemens des vieux ouvrages avec des nouveaux, mais encore dans ceux qui ſont faits de ſuite.

Je ſuppoſerai, ſi l'on veut, que les Entrepreneurs fourniſſent de bons Appareilleurs; ne convient'il pas à la dignité d'Ingénieur, d'être en état de connoître & d'examiner ce qu'ils font, pour ordonner & décider de la meilleure conſtruction, & ne pas ſouffrir des fautes qu'ils peuvent faire malicieuſement, ou pour faire ſervir des pierres de rebut, ou pour s'épargner un peu plus de ſoin? D'ailleurs cette matiere eſt aſſez intéreſſante pour mériter l'attention d'une juſte curioſité; on en pourra juger par ce qui ſuit.

SECOND DISCOURS.

Expoſition & diviſion du ſujet dont il s'agit.

L'IDE'E que l'on a atttaché au nom de la *Coupe des Pierres*, n'eſt pas ce qui ſe préſente d'abord à l'eſprit; ce mot ne ſignifie pas préciſément l'ouvrage de l'Artiſan qui taille la Pierre, mais la Sciençe du Mathématicien qui le conduit dans le deſſein qu'il a de former une voute, ou un corps d'une certaine figure par l'aſſemblage de pluſieurs petites parties. Il faut en effet plus d'induſtrie qu'on ne penſe, pour qu'elles ſoient faites de façon que, quoique d'inégales figures & grandeurs, elles concourent chacune en particulier à former exactement une ſurface réguliere ou régulierement irréguliere, & qu'elles ſoient diſpoſées de maniere qu'elles ſe ſoutiennent en l'air, en s'appuyant réciproquement les unes ſur les autres, ſans autre liaiſon que celle de leur propre péſanteur; car les liaiſons de mortier ou de ciment doivent toujours être comptées pour rien. On voit par-là que cette Science tient ſes principes, premierement de la Géométrie, pour la connoiſance des lignes & ſurfaces courbes & droites & des corps ſolides qui doivent être diviſés.

Secondement de la Méchanique & de la Statique, pour mettre l'équilibre entre les portions des ſolides qui compoſent les voutes, en ſorte qu'ils ſe ſoutiennent mutuellement ſur les appuis qu'on leur fixe.

Notre deſſein n'eſt pas ici de conſidérer les voutes comme un amas de corps péſans, qui font différens efforts les uns ſur les autres : cette Théorie, quoique très-curieuſe & très-utile, peut être réduite pour la pratique au petit nombre de propoſitions démontrées par Mrs. DE LA HIRE, PARENT, COUPLET & BELIDOR, touchant la pouſſée des voutes, à quoi l'on peut ajouter quelques obſervations ſur les édifices qui ſubſiſtent depuis long-tems, quoiqu'un peu hors des regles du calcul, ſoit par la bonne qualité des matériaux qui font corps, lorſqu'on leur donne le tems de ſe lier, ſoit par la différente péſanteur de ceux des voutes & de leur piédroits, à quoi il faut avoir égard dans les calculs ; car ſi l'un eſt d'une pierre légere & l'autre d'une plus peſante, la pouſſée augmente ou diminue à l'égard des piédroits.

Nous ne conſidérons donc ici la Coupe des Pierres, que comme relative à la Géométrie, ſuppoſant ſeulement qu'un corps conique, piramidal, ou fait en coin, ne peut ſe faire un paſſage au-travers d'un trou, qui n'eſt pas ſi grand à ſon petit orifice que la baſe du corps qu'on y introduit. Cela ſuppoſé cette ſcience ſe réduira :

1°. A connoître les lignes courbes formées par la diviſion des ſolides, concaves & convexes coupés par des ſurfaces planes, ou par des ſurfaces courbes; c'eſt ce que l'on pourroit appeller d'un ſeul mot d'origine Grecque la *Tomomorphie*, ou *Figure des ſections*, s'il étoit permis de forger des mots nouveaux pour éviter les périphraſes.

2°. A décrire ces lignes courbes ſur des ſurfaces planes, lorſqu'il eſt poſſible & néceſſaire, ou ſur des ſurfaces courbes lorſqu'elles ne peuvent s'adapter ſur un plan dans toute leur étendue, ce que l'on pourroit appeller la *Tomographie*, ou *deſcription des ſections*.

Digitized by Google

3°. A trouver des moyens faciles pour repréſenter les ſolides & leurs diviſions ſur des ſurfaces planes, autant qu'il eſt poſſible de le faire; or comme ils ne peuvent y être exprimés que très-imparfaitement, ces moyens ſe réduiſent, 1°. à la projection faite ſur un plan par des lignes abaiſſées parallelement entr'elles, & perpendiculairement au plan de la deſcription, ce qu'on appelle ſur un plan horiſontal, *Ichnographie*, & ſur un plan vertical, *Ortographie*. 2°. A la deſcription des ſurfaces rangées ſéparément & dans toute leur étendue ſur un plan, ce qu'on appelle *développement*, & qu'on pourroit appeller *Epipedographie*. 3°. A la deſcription des angles des plans ou ſurfaces quelconques des ſolides entr'elles, ce qu'on pourroit appeller la *Goniographie*, *Deſcription des angles*.

4°. A faire uſage de toutes ces ſortes de repréſentations, pour parvenir à une ſection des corps convenable à la conſtruction des voutes, en appliquant les modeles des angles & des ſurfaces ſur des ſolides le plus ſouvent faits en parallelepipedes, pour les tailler & les réduire aux figures requiſes, en abattant les parties excédentes, ce qui eſt proprement l'Art de la *Coupe des Pierres & des Bois*, c'eſt-à-dire, celui de faire des ſections, qu'on pourroit appeller la *Tomotechnie*.

Ainſi en réſumant ces mots imaginés pour donner une idée nette & ſimple du ſujet dont il s'agit, nous traitons dans la premiere partie de cet Ouvrage, de la *Science*, & dans la ſeconde, de l'*Art* de la Stéréotomie, c'eſt-à-dire, des ſections des ſolides.

Nous diviſons la premiere partie en deux Livres, l'un de la *Tomomorphie*, ou figures des ſections, l'autre de la *Tomographie*, ou deſcription des ſections.

La ſeconde auſſi en deux Livres, dont l'un eſt la *Stéréographie*, ou deſcription des ſolides, & l'autre de la *Tomotechnie*, ou l'Art de faire des ſections.

Tels ſont les Sujets des quatre Livres de cet Ouvrage, ſuivant l'ordre qui nous a paru le plus ſimple & le plus naturel; ce que nous tâcherons d'expliquer & de prouver par des démonſ-

trations, qui ne ſuppoſent d'autre connoiſſance des parties des Mathématiques que celle de la Géométrie Elémentaire, telle qu'elle eſt dans Euclide & les Auteurs qui l'ont ſuivi.

Je ſçai qu'aujourd'hui la Géométrie Linéaire n'eſt plus gueres à la mode, & que pour ſe donner un air de Science, il faut faire parade de l'Analyſe; cependant „ l'ancienne Géométrie, „ (dit un Sçavant) * quoique moins ſublime, moins piquan- „ te, même moins agréable, *eſt plus indiſpenſablement néceſſaire & „ plus ſenſiblement utile*; c'eſt elle ſeule qui fournit à la nouvelle „ des fondemens ſolides „ particulierement dans la matiere dont il s'agit, où le calcul Algébrique ne pourroit être utile qu'entre les mains de ceux qui y ſont plus avancés que ne le ſont ordinairement la plûpart des gens qui ſe mêlent d'Architecture, pour qui nous avons entrepris cet Ouvrage. D'ailleurs elle conduit plus naturellement à la pratique des *Traits* de la coupe des ſolides, & fait ſelon moi plus d'impreſſion dans la mémoire, où les ſurfaces & les lignes ſe gravent plus profondément que les préceptes des formules Algébriques. Les Sçavans n'ont pas beſoin d'un petit Ouvrage, qui ne ſeroit qu'un jeu pour eux; animés par l'ambition de la gloire des découvertes, ils ne s'occupent que des choſes difficiles, ſans s'embarraſſer de leur utilité dans les Arts; ſur quoi M. de FONTENELLE fait cette judicieuſe remarque, que la Géométrie eſt aſſez étendue, mais qu'elle n'eſt pas aſſez appliquée aux uſages. Or puiſqu'ils n'ont pas traité notre matiere, j'ai crû rendre ſervice à ceux qui en ſont curieux, de leur en donner les principes dans un recueil compris dans le premier Tome, qui eſt ſuffiſant pour leur épargner la longue, ennuyeuſe & peu inſtructive lecture des grands Volumes in-folio, où elle eſt plus embroüillée par le détail de la pratique que par le fond de la difficulté; ils en pourront tirer d'eux-mêmes la ſolution des Problêmes qu'on appelle *les Traits* de la Coupe des Pierres; cependant en faveur de ceux qui aiment les ouvrages faits, nous y avons ajouté leur conſtruction dans la quatrieme partie, qui contiendra beaucoup plus de matiere en moins de Volume que les Livres du P. DE-

* Fontenelle, Eloge d'Ozanam, *Mém. de l'Acad.*

Hiſtoire de l'Acad.

RAND & de M. DE LA RUE ; j'eſpere auſſi que la lecture en ſera plus agréable, parce qu'on y trouvera les démonſtrations, qui ne ſeront qu'une application des Théorêmes & des Problêmes contenus dans les trois premiers Livres. Au reſte, je n'ai recherché d'autre agrément dans la diction que celui du raiſonnement. Dans ce genre d'écrire on doit être plus occupé des choſes que des mots ; un Lecteur raiſonnable n'exige que de la netteté & une diction intelligible ; c'eſt à quoi je me ſuis le plus attaché. Peut-être n'aurai-je pas toujours réuſſi, dans un long Ouvrage il ſe gliſſe toujours quelque faute ; je le prie auſſi de pardonner celles de l'impreſſion, qui n'a pas été faite ſous mes yeux.

Il me reſte à donner quelque choſe à la curioſité que l'on peut avoir touchant l'origine de la Coupe des Pierres, ſur laquelle je vais expoſer mes conjectures pour conclure ce Diſcours Préliminaire.

TROISIEME DISCOURS.

De l'origine de la Coupe des Pierres, & de l'uſage qu'on en doit faire.

LE Bois eſt la matiere la plus naturelle & la plus commode pour la conſtruction des Bâtimens néceſſaires à l'habitation des hommes ; mais le déſir commun à tous ceux qui font des édifices conſidérables, d'en établir la durée pour un long-tems, l'idée que les ouvrages de bois ſont ſujets à tomber en caducité par la pourriture, & la crainte qu'ils ne ſoient ravagés par les incendies, ont fait préférer les Pierres au Bois, où on a pû les lui ſubſtituer. Dans cette vûe on n'a ménagé ni la peine ni les grandes dépenſes pour les arracher des entrailles de la terre, les tranſporter & les tailler.

La néceſſité a auſſi forcé les hommes dans pluſieurs contrées, d'employer des Pierres au lieu de Bois, parce que la nature

leur a fourni plus de Carrieres que de Forêts. Cependant la maniere de bâtir avec des arbres a paru ſi naturelle, qu'on a regardé comme une beauté l'imitation de cette ſtructure. C'eſt de-là que nous eſt venu l'uſage des Colonnes dans l'Architecture antique, & celui des piliers ronds & des *Perches* dans la Gothique.

Pour rendre cette imitation plus parfaite, les Anciens faiſoient leurs Colonnes, autant qu'ils pouvoient, d'une ſeule piece, comme ſont les troncs des arbres ; ils en uſoient de même pour leurs Architraves, qu'ils ſubſtituoient aux principales poutres que les colonnes devoient porter. Il reſte des veſtiges des édifices des Egyptiens, des Grecs, & des Romains, qui font voir qu'ils y employoient des Pierres d'une grandeur énorme.

Dans les derniers ſiecles on a abandonné ces manieres de bâtir, trop difficiles par l'immenſité des poids qu'il falloit tranſporter,& par la dépenſe des ſommes extraordinaires qu'elles conſommoient ; on leur a préferé l'aſſemblage de pluſieurs Pierres d'une groſſeur plus maniable, & ſans s'écarter du goût des Anciens, on a continué d'imiter les troncs d'arbres par des colonnes, mais on les a fait de *Tambours*, c'eſt-à-dire, de tranches de cylindre. On a de même imité les poutres par des Architraves ; mais on les a fait de *claveaux*, qui ſe ſoutiennent en l'air, comme ſi le tout n'étoit que d'une piece continue. Cependant comme cette ſituation eſt trop forcée, & que la pouſſée en eſt grande, les Architectes les ont appuyées par des arcades, qui leur ont paru plus ſolides ; & quoique par cette conſtruction les colonnes & les architraves deviennent inutiles, ils les employent toujours pour ornement. Ce goût eſt aujourd'hui le goût dominant dans l'Europe, imité de quelques Monumens de l'Antiquité Romaine, que l'on a repris pour modele après un long intervalle d'un goût d'Architecture toute différente.

Les proportions des colonnes Antiques avoient paru dans les Gaules & dans d'autres endroits de l'Europe,trop maſſives & trop courtes, on leur ſubſtituoit des groupes de perches extrêmement longues & menues, & la difficulté d'imiter avec des Pierres

Pierres la ſituation horiſontale des poutres avoit fait rejetter les architraves, à la place deſquelles on faiſoit paſſer d'une perche à ſon oppoſée, des arcs de pierre ſaillans ſous les voutes, qui ſe croiſoient & ſe raſſembloient de différentes façons, imitant en cela les tonnelles en berceau, que l'on fait de branches d'arbres pliées en rond d'un côté à l'autre.

Le contour même des berceaux cylindriques leur ayant paru auſſi trop peſant, c'eſt-à-dire, faiſant trop d'effort pour écarter les murs, les Architectes de ces tems faiſoient leurs ceintres par deux arcs de cercles égaux, mais de différens centres, dans le deſſein d'en tenir les pentes plus rapides, & par ce moyen de diminuer de cet effort en les rendant auſſi plus minces & plus légeres: ils les traverſoient encore par d'autres parties de voutes, qui formoient quantité d'angles ſaillans, dont les arrêtes étoient cachées & fortifiées par des *nervures d'ogives*, des *arcs doubleaux*, des *tiercerons*, & des *formerets*, dont ils formoient une infinité de compartimens, aboutiſſans ſouvent à des culs de lampes ſuſpendus en l'air. Toutes ces naiſſances entrelaſſées, & les interſections des moulures demandoient une grande intelligence dans l'Art de la Coupe des Pierres; d'où je conjecture, que c'eſt à l'Architecture *Gothique* que nous devons rapporter l'origine, ou du moins l'adoleſcence de cet Art. Ma raiſon eſt, qu'outre qu'il ne nous reſte pas de Monumens antiques où il ait été mis en en uſage, que pour des traits aſſez ſimples, c'eſt que dans l'énumération que VITRUVE fait des connoiſſances néceſſaires à un Architecte, il ne parle point de celle de *la Coupe des Pierres*; en effet, la noble ſimplicité de l'Architecture des Anciens n'exerçoit pas beaucoup le ſçavoir-faire des Appareilleurs, qui n'avoient preſque que des voutes cylindriques ou ſphériques à conduire. La formation au contraire d'un grand nombre de figures biſarres & difficiles, qui ſe préſentoient à tous momens dans l'Architecture Gothique, leur a donné lieu d'en imaginer d'autres, pour tirer parti de l'irrégularité des emplacemens des Bâtimens, ou ſuppléer au défaut de place. Les angles, par exemple, qui ne paroiſſent pas des lieux propres

à y pratiquer des portes, n'ont pas empêché qu'on n'y ait vouté des paſſages ſans les émouſſer, ce qui paroît du premier abord contraire à la ſolidité; on a fait porter en l'air des cabinets ſur des *trompes* pour laiſſer une place libre au-deſſous; on a ſoutenu des eſcaliers d'une infinité de façons, & l'on a imaginé tant de choſes inconnues aux anciens, qu'on a trouvé aſſez de matiere pour en compoſer des Livres.

PHILIBERT DE LORME, Aumônier d'HENRI II, eſt, dit-on, le premier qui en ait écrit, non pas exprès, mais par occaſion dans ſon Traité d'Architecture, qu'il publia en 1567; on voit que cette date neſt pas fort ancienne; MATHURIN JOUSSE produiſit quelques Traits dans ſon Livre intitulé *Secrets d'Architecture*, imprimé à la Fleche en 1642. le P. DERAND, l'année ſuivante, mit cet Art dans toute ſon étendue pour les Ouvriers; BOSSE, (la même année) donna un ſiſtême tout différent, qu'il tenoit de DESARGUES, lequel, par ſon obſcurité & la nouveauté de ſon langage, ne fut pas goûté. Enfin M. DE LA RUE, en 1728, a redonné une partie des traits du P. DERAND, avec quelques autres nouveaux. Tous ces Auteurs n'ont produit qu'une ſimple pratique dénuée de toutes preuves. Le P. DECHALLES en 1672 fut le premier, & a été le ſeul juſqu'à préſent, qui y ait ajouté des démonſtrations; mais ſon Traité *de Lapidum ſectione*, inſéré dans ſon grand cours de Mathématique en Latin, n'eſt preſque qu'un extrait du P. DERAND, dont il a quelquefois copié juſqu'aux fautes, comme nous le ferons voir dans ſon lieu. Il paroit d'ailleurs avoir totalement ignoré la Théorie des courbes à double courbure, qui réſultent très-fréquemment de la rencontre des ſurfaces de différentes voutes, aux arrêtes de leurs enfourchemens.

Après avoir vû tous ces différens Ouvrages, il m'a paru qu'il reſtoit encore quelque choſe de mieux à faire.

Premierement, qu'il étoit à propos de donner une connoiſſance exacte de la nature des lignes courbes qui ſe forment aux arrêtes des voutes, tant à leurs faces qu'à l'interſection des doëles, de celles qui ſont compoſées de pluſieurs parties qui ſe croiſent,

pour ſçavoir les tracer ſur des plans lorſqu'il eſt poſſible, ou ſur des ſurfaces courbes, lorſque ces lignes ſont à double courbure, en quoi conſiſte la *premiere nouveauté* de ce Traité.

La ſeconde ſera la correction des erreurs de pluſieurs des anciens traits.

La troiſieme, celle de la conſtruction de pluſieurs traits changés, & de quelques-uns qui n'ont pas encore paru.

Je puis compter pour quatrieme nouveauté, les démonſtrations des traits, parce que le P. DECHALLES ne m'a précedé qu'en Latin, mais non pas en François, de ſorte que pour me ſervir de l'expreſſion de JOUSSE, les *Secrets d'Architecture* y ſont tout-à-fait dévoilés.

La nouveauté de cet Art & les difficultés qu'il contient, engageoient les Architectes des deux derniers ſiecles à chercher des occaſions de faire parade de leur ſcience, perſuadés que rien ne pouvoit mieux les rendre recommandables, que ces Ouvrages hardis où l'on ne pouvoit s'empêcher d'admirer la Coupe des Pierres; de ſorte qu'ils affectoient d'en faire même ſans néceſſité. J'ai vû le tiers d'une tour quarrée, qu'on pouvoit faire porter de fond, ſoutenue par la ſeule coupe d'une platebande rampante, qui en élevoit un angle en l'air, & beaucoup de ſemblables témérités.

Les Architectes de notre tems ne trouvant plus tant de raiſon de ſe faire admirer par une ſcience devenue plus commune, ou peut-être devenus plus ſages, ont banni toutes ces hardieſſes biſarres, qui n'ont d'autre beauté que celle de leur exécution, & qui non-ſeulement ne contribuent en rien à la décoration des édifices, mais leur ſont encore préjudiciables, en ce qu'elles en augmentent les efforts & la charge; en effet il ne convient de mettre en œuvre les traits de porte-à-faux, comme les trompes, que lorſqu'on y eſt abſolument contraint, ou pour quelque dégagement, ou pour éviter la dépenſe & l'incommodité de prendre la place dès les fondemens.

J'ajouterai encore, qu'il faut plutôt conſulter le bon goût que d'affecter de la rareté & de la difficulté dans les Ouvrages,

à quoi ſemblent pencher nos Architectes modernes, qui courent à la nouveauté : La rencontre & l'interſection de différenrentes voutes n'eſt pas toujours d'un bon effet. Un arc de cloître, par exemple, de ceintre circulaire peu concave, traverſé de lunettes, & ſurmonté d'un cul-de-four, tel qu'on en voit à une Chapelle de l'Egliſe de St. Sulpice, ne fait pas ſi bien qu'une voute moins compoſée. Des lunettes cylindriques qui traverſent une portion de voute ſphéroïde, ou voute de four ſurbaiſſée, ne ſe préſentent pas bien de près, parce que les arrêtes d'enfourchement paroiſſent *déverſées*, c'eſt-à-dire, penchées à droite & à gauche, comme on peut le remarquer à la même Egliſe de St. Sulpice ; cette difformité diminue, lorſque la lunette eſt vûe de bas en haut, & de plus loin, comme à St. Roch ; mais elle n'eſt pas ôtée totalement, & on ne le peut par la nature de la courbe, qui n'eſt pas dans un plan, comme on le verra dans le cours du premier Livre.

Enfin on peut encore remarquer, que les voutes ſphériques traverſées par deux berceaux qui ſe croiſent, ont un air nud & imparfait, ſi elles ne ſont diviſées par une corniche horiſontale, qui retranche le ſegment de ſphere, & le mette, pour ainſi dire, à part des panaches ; on en apperçoit le beſoin au Noviciat des Jeſuites, à Paris. Il ſeroit trop long de rechercher de ſemblables concours de voutes, qui ne ſatisfont pas le coup d'œil ſans le ſecours de quelque correctif, quoique faites ſolidement & dans les regles de la bonne conſtruction.

Ces remarques ſont plus utiles à l'Architecture Civile qu'à la Militaire, où l'on ſemble négliger la beauté pour la ſolidité ; il ne ſeroit pas cependant mauvais que les Ingénieurs fiſſent une étude de l'Architecture Civile ; elle leur eſt néceſſaire à la conſtruction des Bâtimens Militaires, dont ils ſont chargés dans les Villes de Guerre, comme Caſernes, Magaſins, Hôpitaux, Logemens de l'Etat-Major, & même quelquefois des Egliſes, des Forts & Citadelles, qui ſont de même eſpece que les Bâtimens Civils, dont ils ne différent que de nom. Ils peuvent même, lorſque la Cour le juge à propos, prendre la conduite des Bâ-

timens Civils publics ; mais ils ne doivent jamais ſe mêler de ceux des Particuliers, de quelque qualité qu'ils puiſſent être. Premierement parce qu'étant Officiers du Roi, à ſa ſolde dans le repos comme dans le travail ; * il eſt de l'équité qu'ils diſpoſent du loiſir qu'ils peuvent avoir à s'inſtruire au Cabinet des Sciences qui leur ſont néceſſaires, & des faits Hiſtoriques des Sieges, qui peuvent leur fournir des idées propres à les mettre en état de ſervir utilement à différentes deſtinations. En ſecond lieu, parce que rien n'avillit tant les Ingénieurs, que ces ſortes d'occupations qui les font ſoupçonner de vûes d'intérêt, & les compromettent avec des Ouvriers ou Gens à gages, qui rejettent ſur l'Ingénieur les fautes émanées de leur ignorance, ou du caprice du Propriéraire ; les exemples fréquens qu'on en voit devroient corriger les gens trop officieux. Enfin parce qu'en ſe mêlant d'Architecture Civile, ils ſemblent ſortir de l'Etat Militaire & nourrir le dédain ; que les gens d'épée ont pour ceux qui ſe mêlent des Arts Méchaniques. Ce n'eſt pas qu'il n'y ait dans le ſervice des occupations peu nobles : l'Officier d'Infanterie doit deſcendre aux petits ſoins de la propreté des ſoldats & des caſernes, celui de Cavalerie à celle des écuries & des chevaux, celui de Marine au radoub & à la conſtruction des Vaiſſeaux, celui d'Artillerie aux charronages & aux forges, & l'Ingénieur à tous les Arts qui ont du rapport à celui de bâtir ; ces fonctions auroient par elles-mêmes quelque choſe de vil ſuivant le préjugé du monde, ſi l'on n'étoit convenu dans les regles de l'honneur, qu'il n'y a rien d'abject de tout ce qui concerne le ſervice du Roi dans l'Etat Militaire : les Ingénieurs doivent ſe renfermer dans ces bornes, & laiſſer l'Architecture Civile à ceux qui en font profeſſion.

Annua æra habes, annuam operam edet, an tu æquum cenſes, militia ſemeſtri ſolidum te ſtipendium accipere ? Tite-Live, l. 5. n. 1.

TABLE DES TITRES
DU PREMIER TOME.

DISCOURS PRELIMINAIRES.

1°. SUR l'utilité de la Théorie dans les Arts relatifs à l'Architecture. *Page* j
2°. L'exposition du sujet dont il s'agit. jx
3°. De l'origine de la Coupe des pierres, & de l'usage qu'on en doit faire. xiij

LIVRE I.

De la figure des sections des corps coupés par des plans, ou pénétrés par des solides. Pourquoi la connoissance en est nécessaire dans l'Architecture. 1
De la figure des voutes en général rapportée à celle des corps réguliers. 4
Des variations accidentelles aux voutes, comparées à celles des sections des corps.

PREMIERE PARTIE.

CHAP. I. *Des sections des corps par des plans.*
Des Sections de la sphere. 8
CHAP. II. *Des Sections des cones coupés par des Plans.* 10
Définitions des points & des lignes remarquables dans les sections coniques. 13
Exposition de quelques propriétés des lignes menées au-dedans & au dehors des sections coniques, des abscisses & des ordonnnées. 16
Propriétés particulieres à l'ellipse. 18
Des tangentes des sections coniques. 19
De quelques différences de position des sections coniques dans les cones scalenes. 20

THEOREME I. La ſection plane elliptique faite dans l'intervalle de deux cones concentriques & ſemblables, *comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cone creux d'egale épaiſſeur*, eſt une couronne compriſe par deux circonférences d'ellipſes qui ne ſont pas équidiſtantes, & qui ne peuvent être concentriques que dans les cones ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe. 22

THEOR. II. Une ſection conique donnée peut être celle d'une infinité de cones différens. 25

CHAP. III. *Des ſections des cylindres coupés par des plans.* 28

THEOR. III. La ſection plane des eſpeces de cylindres qui ont pour baſe une parabole ou une hyperbole, eſt une ſection conique de même eſpece. 31

THEOR. IV. La ſection d'un cylindre creux dont l'épaiſſeur eſt par-tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une couronne d'ellipſe compriſe par deux ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſouſcontraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une couronne de cercle. 33

CHAP. IV. *Des ſections planes de quelques corps régulierement irréguliers.* 35

THEOR. V. La ſection d'un ſphéroïde & d'un conoïde régulier, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, eſt un cercle; & s'il lui eſt parallele ou oblique, elle eſt une ellipſe. 36

THEOR. VI. La ſection d'un corps cylindrique annullaire, dont l'axe eſt courbe en forme de circonférence de cercle, & qui eſt coupée par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe courbe, eſt une ovale du quatrieme ordre. 39

Des ſections du coin-conoïde coupé par des plans. 42

THEOR. VII. Si le coin-conoïde eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe, & parallele à un de ſes côtés, la ſection ſera un triangle rectangle. 44

THEOR. VIII. Si le plan coupant le coin-conoïde eſt perpendiculaire au parallelogramme par l'axe, & parallele au cercle de la tête du coin, la ſection ſera

une ellipſe. 44
Application à l'uſage, & remarque ſur une faute d'appareil dans le trait d'un Auteur moderne. 54

SECONDE PARTIE DU PREMIER LIVRE.

DES ſections faites à la ſurface des corps par la pénétration d'autres corps. 57
De la nature des ſections ſolides par la pénétration mutuelle des ſpheres, cones & cylindres. 58
CHAP. V. *Des ſections ſolides des ſpheres, & premierement de leurs variations.* 63
Notez qu'il y a faute dans le N°. de ces deux Théorêmes.
THEOR. VII. La courbe qui réſulte de la ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux ſpheres qui ſe pénetrent, eſt la circonférence d'un cercle. 64
THEOR. VIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle. 65
THEOR. IX. La ſection faite par la rencontre d'une ſphere & d'un cylindre ſcalene, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt une ellipſimbre. 66
THEOR. X. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit qui la pénetre de toute ſa circonférence, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une ellipſimbre. 71
Remarque ſur la différence des cas qui peuvent arriver dans les cylindres ſcalenes. 77
THEOR. XI. La ſection faite par la pénétration d'un cylindre qui n'entre dans la ſphere que d'une partie de ſa circonférence, eſt une ellipſimbre compoſée. 78
De la rencontre des ſurfaces des ſpheres avec celle des cones.
THEOR. XII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone droit dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle. 82
THEOR. XIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone ſcalene dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt une ellipſoïdimbre,

lipſoïdimbre, ou un cercle ſi elle eſt ſous-contraire. 83

THEOR. XIV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone qui la pénetre de toute ſa circonférence, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une ellipſoïdimbre. Si le cone eſt ſcalene, elle peut être un cercle. 85

THEOR. XV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de la ſphere & d'un cone dont l'axe ne paſſe pas par le centre de cette ſphere, & qui ne la pénetre pas de toute ſa circonférence, eſt une courbe compoſée de deux portions d'ellipſoïdimbres ou d'autres courbes de même nature, appartenant au cercle, à la parabole, ou à l'hyperbole. 90

CHAP. VI. *Des ſections faites par la pénétration des cylindres entr'eux & avec les cones.*

THEOR. XVI. La ſection faite par la pénétration des cylindres de même nature, égaux ou inégaux, dont les axes ſont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, eſt un parallelogramme. 94

THEOR. XVII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un diametre égal & ſemblablement poſé ſur un plan par leurs axes, eſt une ellipſe; & ſi l'un des cylindres eſt droit & l'autre ſcalene, ou tous les deux ſcalenes & de baſes égales, elle peut être un cercle. 95

THEOR. XVIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres droits inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement, eſt un cicloïdimbre. 97

THEOR. XIX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes ſe coupent obliquement & qui ſe pénetrent, de ſorte que l'un entre dans l'autre de toute ſa circonférence, eſt une ellipſimbre. 102

THEOR. XX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonférence, perpendiculairement ou obli-

quement à ſes côtés, ſans que leurs axes ſe rencontrent, eſt une ellipſoïdimbre. 105

THEOR. XXI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa circonférence, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une ellipſimbre compoſée. 110

Des ſections faites par la rencontre des ſurfaces des cones & des cylindres qui ſe pénetrent. 112

THEOR. XXII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cone & d'un cylindre droit, ou d'un cone & d'un cylindre ſcalene de même obliquité ſur leurs baſes, dont les axes ſe confondent, eſt un cercle. 113

THEOR. XXIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cône qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt droit & l'autre ſcalene, & dont les axes ſe confondent, eſt une ellipſoïdimbre. 114

THEOR. XXIV. La ſection faite par la pénétration d'un cylindre & d'un cone, dont les axes ſe coupent obliquement, peut être dans un ſeul cas une ellipſe plane. 116

THEOR. XXV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cone & d'un cylindre qui ſe pénetrent, en ſorte que les axes de ces deux corps ſe croiſent ou ſoient paralleles entr'eux, eſt une ellipſimbre. 118

THEOR. XXVI. La ſection faite par la pénétration d'un cone dans un cylindre, eſt une ellipſoïdimbre. 121

CHAP. VII. *Des ſections faites par la pénétration des cones entr'eux.* 126

THEOR. XXVII. Les ſections faites par la pénétration de deux cones inégaux (s'ils ſont droits) où les côtés ſemblables (s'ils ſont ſcalenes) ſe coupent à diſtances égales de leurs ſommet, ſont des ſections planes. 127

THEOR. XXVIII. La ſection faite par la pénétration des cones droits inégaux, dont les axes ſe confondent, ou des cones ſcalenes inégaux, dont les axes ſe confondent & ſont également inclinés à leurs baſes, eſt un cercle. 128

THEOR. XXIX. La ſection faite par la pénétration de deux cones inégaux mais ſemblables, dont les axes & les cotés ſont paralleles entr'eux, eſt un paraboloïdimbre. *Page* 129

THEOR. XXX. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones qui ſe pénetrent, dont les axes ſont paralleles, & dont les côtés d'un des triangles par l'axe, rencontrent celui de l'autre (prolongé s'il le faut) eſt une ellipſoïdimbre. 130

THEOR. XXXI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, en ſorte que les côtés prolongés de l'un ou de l'autre, ne ſe rencontrent pas au-deſſus & au-deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une ellipſoïdimbre. 131

THEOR. XXXII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones, dont les axes ſe coupent obliquement, & dont un côté d'un des triangles par l'axe rencontre les deux de l'autre triangle, qui eſt dans le même plan, où un des côtés étant prolongé au-deſſus de ſon ſommet, eſt une hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre cone. 132

THEOR. XXXIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones dont les axes ſe coupent obliquement, & dont un des côtés des triangles par l'axe eſt parallele à un des côtés de l'autre triangle de la ſection par l'axe de l'autre cone, eſt une courbe équivalemment différente dans chaque cone; ſçavoir, une hyperboloïdimbre dans l'un des cones, & une paraboloïdimbre dans l'autre, ſelon que l'un des deux cones ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par l'autre dans l'allignement de ces côtés. 133

CHAP. VIII. *Des ſections faites à la ſurface des ſphéroïdes pénétrés par des ſpheres, cones ou cylindres.* 134

THEOR. XXXIV. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde avec celle d'une ſphere, d'un cylindre & d'un cone, qui le pénetrent ou qui en ſont pénétrés, de maniere que les axes de ces corps ſe confondent, eſt un cercle. 135

THEOR. XXXV. La ſection faite par la rencontre d'une

ſphere & d'un ſphéroïde dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une eſpece d'ellipſoïdimbre, c'eſt-à-dire, une courbe à double courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une ellipſe. 136

THEOR. XXXVI. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre droit & d'un ſphéroïde dont l'axe eſt perpendiculaire à celui d'un cylindre, eſt un cycloimbre. 139

THEOR. XXXVII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un ſphéroïde, dont les axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'ellipſimbre, & peut être une ellipſe dans certains cas. 141

THEOR. XXXVIII. La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde & d'un cone dont l'axe rencontre celui du ſphéroïde perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement une courbe à double courbure, telle qu'eſt l'ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une ellipſe plane. 142

LIVRE SECOND.

De la deſcription des Lignes courbes formées par la ſection des corps. 144

PREMIERE PARTIE.

De la deſcription des ſections planes ſur des plans. 145

CHAP. I. *De la deſcription du cercle.* 146

PROBLEME I. Par trois points donnés tracer un arc de cercle par pluſieurs autres points trouvés ſans le ſecous du centre. 147

CHAP. II. *De l'ellipſe premierement conſidérée comme étant faite.*

PROBL. II. Trouver 1°. le centre, 2°. les diametres conjugués, 3°. les axes, 4°. les foyers d'une ellipſe donnée. 155

PROB. III. Par un point donné mener une tangente à

une ellipſe donnée. 156
De l'ellipſe conſidérée comme à faire.
PROBL. IV. Un diametre quelconque & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver ſon conjugué. 158
PROBL. V. Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes de l'ellipſe. 159
PROBL. VI. Un axe & un point à la circonférence de l'ellipſe étant donnés, trouver l'autre axe. 160
PROBL. VII. Les axes d'une ellipſe étant donnés, la décrire par pluſieurs points ou par un mouvement continu. 162
PROBL. VIII. Les diametres conjugués étant donnés, tracer l'ellipſe par pluſieurs points ou par un mouvement continu ſans connoître les axes ni les foyers. 170
PROBL. IX. Allonger ou racourcir les ellipſes en telle raiſon qu'on voudra, en ſorte qu'elles ſoient toujours les ſections d'un même cylindre. 172
De la parabole.
PROBL. X. L'axe d'une parabole & un point à ſa circonférence étant donnés, la tracer par pluſieurs points & par un mouvement continu. 176
De l'Hyperbole.
PROBL. XI. Le centre, le ſommet & un point au contour de l'hyperbole étant donnés, la décrire par pluſieurs points & par un mouvement continu. 179
PROBL. XII. Etant donnés le centre, le ſommet & une ordonnée à l'hyperbole, ou ſeulement un premier diametre & une ordonnée, trouver les aſymptotes & la décrire par pluſieurs points. 181
PROBL. XIII. Par cinq points donnés qui ne ſoient pas en ligne droite, tracer une ſection conique quelconque par un mouvement continu, ſans en connoître les axes, les diametres, les centres ni les foyers. 183
PROBL. XIV. Deux touchantes avec les points d'attouchement à une ſection conique & la direction d'un ſeul diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe ſans connoître le centre de la ſection, ni la grandeur d'aucun

en rayons, mais égaux en nombre de degrés, ou ſi l'on veut d'une partie de plus avec certaines circonſtances. 221

PROBL. XXIV. Imiter la ſpirale par des portions d'arcs de cercle. 222

CHAP. V. *De la diviſion des ſections coniques par des lignes droites perpendiculaires à leurs axes.* 1°. Pour le cercle. 225

PROBL. XXV. Par un point donné tirer une perpendiculaire à un arc de cercle dont on ne connoît pas le centre. *Ibid.*

LEMME. La perpendiculaire ſur le milieu de la corde d'un arc de ſection conique, autre que le cercle, & qui n'eſt pas un des axes, eſt oblique à cet arc. 227

PROBL. XXVI. Par un point donné à la circonférence d'une ſection conique, tirer une perpendiculaire à ſon arc. 228

PROBL. XXVII. Par un point donné hors de la circonférence d'une ſection conique, lui mener une perpendiculaire. 230

Pour les ſpirales.

PROBL. XXVIII. Par un point donné au contour de la ſpirale, tirer une perpendiculaire à ſon arc. 235

Des diviſions de quelqu'autres courbes uſuelles par des perpendiculaires à leurs arcs. 240

SECONDE PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAP. VI. *De la Deſcription des ſections des corps, qui ne doivent ou ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces concaves ou convexes, & de la projection.* 242

THEOREME. Les projections des lignes courbes qui ſont dans un plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres plans de deſcription, ſont des lignes droites dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs points de ces courbes, ſont toujours en même proportion avec les abſciſſes coordonnées. 244

THEOR. La projection d'un cercle qui n'eſt pas paral-

TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAP. VII. *Des ſections qui ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces courbes &, par le moyen de la projection, ſur des ſurfaces planes.*

PROBL. GENER. Trouver tant de points que l'on voudra du contour des courbes à double courbure, faites à la ſurface des ſpheres, cones, & cylindres qui ſe pénetrent mutuellement. 279

Du Cicloïmbre.

PROBL. XXXVII. Tracer un cicloïmbre ſur deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent à angle droit. 281

PROBL. XXXVIII. Tracer une ellipſimbre formée par la ſection d'une ſphere, pénetrée par un cylindre dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere. 284

PROBL. XXXIX. Les diametres de deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs axes qui ſe rencontrent étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 287

PROBL. XL. Les diametres de deux cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonférence, ſans que leurs axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtés entr'eux étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 290

PROBL. XLI. La poſition d'un cylindre dans un cone qu'il pénetre étant donnée, décrire l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces. 293

Des ellipſimbres compoſées.

PROBL. XLII. Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration d'une ſphere & d'un cylindre dont la circonférence n'entre qu'en partie dans la ſphere. 301

PROBL. XLIII. Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration de deux cylindres, dont la circonférence de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre. 303

Des ellipſoïdimbres.

PROBL. XLIV. Tracer une ellipſoïdimbre formée par la pénétration de la ſphere & du cone dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere. 306

PROBL. XLV. Décrire une ellipſoïdimbre formée par la pénétration du cone dans le cylindre, à la rencontre de leurs ſurfaces. 307

PROBL. XLVI. Décrire une ellipſoïdimbre formée par l'interſection des ſurfaces de deux cones dont les axes ſe coupent. 309

PROBL. XLVII. Tracer une ellipſoïdimbre compoſée ſur les ſurfaces du cone & de la ſphere qui ſe pénetrent. 309

De la deſcription des hélices & limaces. 310

PROBL. XLVIII. Tracer une hélice ſur un corps cylindrique. 311

PROBL. XLIX. Tracer une limace ſur un cone ou ſur une ſphere ou ſphéroïde. 313

LIVRE TROISIEME.

DE la deſcription de la diviſion des ſolides. 315

De l'arrangement des deſſeins dans l'épure. 317

CH. I. *De la projection en général.* 318

CH. II. *De l'Ichnographie* ou *du Plan.* 322

Des différences reſpectives des ceintres. *Ibid.*

De l'arc droit. 324

Regles du deſſein de l'épure. 326

Remarque ſur le choix du ceintre primitif. 327

2e. Regle du *Plan.* *Ibid.*

3e. Regle. 328

4e. Regle. 330

5e. Regle. 332

PROBL. I. Par un point donné auprès de deux lignes convergentes, en mener une troiſieme qui tende au même ſommet de l'angle qu'elles feroient ſi elles étoient prolongées 335

6e. Regle. *Ibid.*

7e. Regle. 336
8e. Regle. 337
CHAP. III. *De l'Orthographie. 1°. Du Profil.* 338
Premiere regle pour les voutes cylindriques. 339
2e. Regle. 340
3e. Regle. 341
Des profils des berceaux à double obliquité. 342
PROBL. II. Réduire toutes les différentes obliquités de biais, de talud & biais, de biais & deſcente, de deſcente, talud & biais en une ſeule, pour ne faire qu'un profil qui exprime toutes ces obliquités & conſerve les meſures que l'on y doit prendre. 343
Des profils des voutes coniques. 349
4e. Regle. 350
PROBL. III. Tracer le profil d'une voute conique à double ou triple obliquité de biais, talud & deſcente. 352
Remarque ſur les profils en général. 354
De l'élévation. 355
CHAP. IV. *Des moyens de faire les plans, profils & élévations des figures irrégulieres.* 357
PROBL. IV. Tracer ſur un plan un contour égal à une ſection d'un corps quelconque, *ou en termes de l'Art*, lever un profil. 360
De la ſuppoſition des ſurfaces planes, *en termes de l'Art*, des doëles plates. 362
De la ſuppoſition des ſurfaces cylindriques, de baſe quelconque, pour parvenir à la formation des ſurfaces terminées par des courbes à double courbure. 364
CHAP. V. *De l'Epipedographie*, en termes de l'Art, *du développement.* 373
PROBL. V. Trouver une ſuite de lignes droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de cercle donné, tant en deſſus qu'en deſſous. 374
Du développement des corps compris par des ſurfaces planes. 375
PROBL. VI. Faire le développement d'une pyramide quelconque droite ou ſcalene. 378

PROBL. VII. La baſe, la hauteur & la projection du ſommet d'un cone ſcalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa ſurface. 381
Remarques ſur certains points des courbes développées ſur le cone. 384
Du développement des priſmes. 385
COROLL. Faire le développement du cylindre ſcalene. 387
Des développemens compoſés de deux ou trois eſpeces de ſurfaces d'un corps coupé en pluſieurs parties dans ſon épaiſſeur, comme ſont dans les voutes celles des doëles, des lits, & même des extrados.
Remarque ſur les développemens compoſés. 393
Du développement des Polyedres & de la ſphere. 395
Remarques ſur l'uſage des développemens. 397
PROBL. VIII. Le diametre de la baſe d'un cone droit tronqué, & l'inclinaiſon d'un côté ſur ce diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra à la circonférence de la couronne de cercle qui en exprime le développement, ſans en avoir le centre, ou ce qui eſt la même choſe, le ſommet du cone. *Ibid.*
Du développement des hélices. 400
LEMME. Le développement d'une hélice cylindrique réguliere ſur la ſurface du cylindre droit développé, eſt une ligne droite; celui des irrégulieres de la ſeconde eſpece & des limaces, eſt une ligne courbe. 400
PROBL. IX. Faire le développement d'une hélice quelconque ſur une ſurface cylindrique ou conique développée. 403
PROBL. X. Les élévations de deux faces oppoſées dans des plans paralleles entr'eux étant données en projection ſur un même plan vertical, & la projection horiſontale de leurs intervalles étant donnée, trouver la figure de chaque partie de développement des ſurfaces d'une voute diviſée en pluſieurs vouſſoirs, tant apparente qu'intérieure. 404
Premier exemple: des voutes coniques droites. 405

Second Exemple : des voutes coniques ſcalenes à double obliquité ; telles ſont les deſcentes biaiſes ébraſées. 409

PROBL. XI. La projection horiſontale d'un polyedre & de ſes diviſions étant donnée avec l'élévation de ſes faces, trouver toutes les ſurfaces dont chacune de ces parties eſt enveloppée. 416

Premier exemple : d'un berceau droit ou biais. *Ibid.*

Second Exemple : d'un berceau en deſcente. 419

Troiſieme exemple : d'une voute en canoniere en deſcente. 423

Quatrieme exemple : d'une voute ſphérique réduite en polyedre par des doëles plates. 425

CHAP. VI. *De la Goniographie, ou deſcription des angles*, en termes de l'Art, *des moyens de trouver les biveaux.* 429

LEMME. L'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces quelconques, planes ou courbes, meſuré par des lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point. 430

PROBL. XII. Trois angles plans qui forment un angle ſolide étant donnés, trouver les angles d'inclinaiſon de ces plans entr'eux, *ou en termes de l'Art pour la Coupe des Pierres*, trois panneaux étant donnés, trouver les biveaux de leurs aſſemblages. 433

Seconde maniere; en réduiſant les plans donnés en triangles pour en former des pyramides. 435

PROBL. XIII. Deux angles rectilignes perpendiculaires entr'eux, qui ont leur ſommet commun & un côté de l'un dans le plan de l'autre, étant donnés, trouver l'angle des deux plans qui peuvent paſſer par leurs côtés. 440

De la ſituation des angles des plans, *à l'égard de l'horiſon.* 442

LEMME. Un angle rectiligne en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme ou au ſupplément à deux droits, des angles que ſes côtés prolongés ſont avec une ligne horiſontale ou une verticale. 442

PROBL. XIV. Trouver les biveaux de toutes ſortes de

voutes ſans former le centre de l'arc droit. 446
Premierement ceux de lit & de doële. *Ibid.*
Premier cas, pour les voutes en berceau de niveau. *Ibid.*
Second cas, pour les berceaux en deſcente. *Ibid.*
Secondement pour les voutes coniques. 447
Troiſiemement pour les angles ſaillans ou rentrans, faits par la rencontre de deux berceaux. 448
Quatriemement, pour les angles ſaillans ou rentrans formés par des doëles plates, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, mais l'une de niveau & l'autre rampante ; *tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.* 449

FIN.

APPROBATION.

JAI lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, l'Ouvrage intitulé *la Théorie & la Pratique de la Coupe des Pierres & des Bois*, par M. FREZIER. Le ſuccès qu'a eu la premiere Edition de cet excellent Ouvrage, me fait juger que la ſeconde ne ſera pas moins favorablement reçûe, ſur tout après les changemens & augmentations que ſon Sçavant Auteur a jugé à propos d'y faire. A Paris ce 14 Juin 1752.

DEPARCIEUX.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos Amés & Féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Notre Libraire à Paris, Nous a fait expoſer qu'il deſireroit faire imprimer & réimprimer des Ouvrages qui ont pour titre *Architecture Françoiſe par M. Blondel; Cours d'Architecture par Daviler, avec un Dictionnaire des termes d'Architecture par le même; Méthode pour apprendre le le Deſſein, avec des Figures & des Académies*; TRAITÉ DE STEREOTOMIE *par M. Frezier; Architecture Moderne. De la décoration des Edifices, par M. Blondel*; *la Théorie & Pratique du Jardinage par M. le Blond. Œuvres de M. Belidor*; *ſçavoir, le Cours de de Mathématique*: *la Science des Ingénieurs*: *le Bombardier François*: *& l'Architecture Hydraulique. Cours de Science Militaire par M. le Blond, contenant l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, la Fortification, l'Artillerie, l'Attaque & la Défenſe des Places, la Caſtramétation, la Tactique, &c. Recueil des Pierres gravées du Cabinet du Roy*, s'il nous plaiſoit de lui accorder nos Lettres de privilege pour ce néceſſaires. A ces cauſes, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer & réimprimer leſdits Ouvrages, autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance : comme auſſi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changemens ou autres, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion & réimpreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele ſous le contre-ſcel des

Préſentes : que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, qu'avant de l'expoſer en vente, les Manuſcrits & Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion & réimpreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & Féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & Féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le ſieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie deſdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour dûement ſignifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers Sécretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original : Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Verſailles le vingt-uniéme jour du mois d'Août, l'an de Grace mil ſept cent cinquante-deux, & de notre Regne le trente-ſeptiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 19. fol. 12. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le 29. Août 1752.

HERISANT, Adjoint.

TRAITÉ
DE
STEREOTOMIE
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE.

LIVRE PREMIER.

DE LA FIGURE DES SECTIONS DES CORPS, coupés par des Plans, ou pénétrés par des ſolides.

Pourquoi la connoiſſance en eſt néceſſaire dans l'Architecture.

DANS les Arts qui dépendent des Sciences, ſi l'on ne fait précéder de bons principes, comme autant de lumieres qui éclairent l'eſprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons; & de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obſcurité, une étude ſans principes devient pénible & capable de rebuter, lorſque la néceſſité de s'inſtruire ne fournit pas de la perſévérance.

C'eſt pour cette raiſon (ſi je ne me trompe) que les Livres

que nous avons fut la coupe des pierres, n'ont rendu cette matiere ni facile ni agréable aux Lecteurs, & que bien des gens qui ont voulu en tâter, s'en ſont rebutés. En effet, il n'eſt pas étonnant qu'une lecture ſoit laſſante & preſqu'inſupportable, où l'on ne trouve qu'un tiſſu de pratiques ſeches, ſurchargées d'opérations, dont on ne voit ni la fin ni la raiſon, ſi l'on n'eſt déja en état de la pénétrer: ajoutez à cela la complication d'une infinité de lignes ſurchargées de chiffres pour les indiquer, & de meſures qu'il faut porter ici & là, ſans ſçavoir à quel propos; enfin où il n'y a aucune vérité à connoître par les inſtructions de l'Auteur, qu'il faut croire ſur ſa bonne foi, ne donnant d'autre preuve de la juſteſſe de ſon opération, que le témoignage de la gravure des Planches de ſon Livre; il n'eſt pas étonnant, dis-je, qu'une telle conduite ne mene qu'au dégoût, & que cet Art acceſſible aux moindres écoliers de Géométrie, paroiſſe hériſſé d'épines qui en défendent les approches.

Pour lever ces difficultés nous avons cru qu'il falloit donner une notion claire de la figure des voutes, & des parties qui les compoſent, en les comparant à celle des corps ronds, qui ſont connus de tout le monde, la Sphere, le Cône & le Cylindre, l'Anneau & l'Hélice, coupés & diviſés par des plans, ou par d'autres corps qui peuvent les pénétrer. Et lorſque la figure des voutes eſt irréguliere, nous avons tâché de la déſigner par une génération ſi expreſſive, qu'on peut la concevoir facilement. Ainſi l'on a déja pour point de vûe la figure qu'on ſe propoſe de faire, telle qu'elle doit être lorſque la voute eſt achevée, ce qu'il falloit en quelque façon deviner dans le Livre du P. Deran, à quoi M. de La Rue qui a ſenti ce défaut, a tâché de remédier par quelques deſſeins en perſpective, qui aident beaucoup l'imagination; mais parce qu'on ne peut exprimer qu'à pluſieurs repriſes toutes les faces d'un ſolide ſur un plan, il reſte encore beaucoup à ſuppléer à ces ſortes de repréſentations.

La figure des voutes étant bien conçûe, il n'eſt point de meilleur moyen de faire connoître celle des parties dont elles doivent être compoſées, pour ſubſiſter & former un tout uniforme & ſolide, que d'en venir à l'examen des ſections formées par la diviſion des corps, faite de maniere qu'ils n'en ſoient pas détruits ni défigurés. Une comparaiſon familiere expliquera nettement ce diſcours.

Je me repréſente, par exemple, une moitié de melon que

eſt ordinairement une moitié de ſphéroïde ; je la coupe par tranches ſuivant la longueur de ſes côtes ſur une table, où cette moitié eſt poſée à plat, & je vois que pourvû que j'empêche les deux premieres tranches de gliſſer, la moitié du melon ſubſiſtera en ſon entier, quoique coupée en pluſieurs tranches à fond. Non content de l'avoir coupé en long, je la recoupe en travers, & je vois que ſi j'empêche encore les premiers morceaux de gliſſer ſur la table, cette moitié de ſphéroïde ne ſe défigure point, & ſubſiſte encore dans ſa rondeur, ſans tomber en pieces; d'où je conclus, que ſi je fais de ſemblables morceaux avec de la pierre ou du bois, & que je les raſſemble dans le même ordre, je pourrai former cette figure de melon, que les Géometres appellent une ſphéroïde. Mais pour former ces parties, il faut que j'aye recours à une ſcience qui m'apprenne quelle ſera la figure que le paſſage de mon couteau formera dans le melon, à chaque diviſion que j'en ferai; & comme il n'importe que je me ſerve d'un couteau ou d'une feuille de fer-blanc, ou d'un autre corps mince de figure plane, je puis appeller cette coupure *la Section d'un plan*, ou faite par un plan; j'examine enſuite quelle ſera cette ſection en tournant différemment la feuille de fer-blanc, qui me ſert de couteau; je vois par la ſeule Géométrie naturelle, que ſi je coupe le melon en travers, la ſection ſera un demi-cercle, & un cercle entier, ſi le melon étoit entier; je connois donc dès ce moment, que toutes les tranches en travers contiennent une portion de cercle plus ou moins grande, ſuivant que les tranches en longueur ſont plus ou moins épaiſſes; je vois auſſi que ma coupure en long fait un ovale, & je conclus que chacune des tranches dans ce ſens eſt une portion d'ovale plus ou moins grande, ſuivant l'épaiſſeur des coupures en travers, & plus ou moins courbe à meſure qu'elle s'approche des bouts du melon ou du milieu; étant évident qu'elle ſe creuſe vers les bouts, & s'applatit vers le milieu. Je pouſſe ma curioſité plus loin; ſi au lieu de la face plane de mon couteau je l'enfonce de biais, & le fais tourner ſur la pointe immobile au fond, pendant que je le tourne en rond du côté du manche, comme pour faire un trou en pain de ſucre renverſé, je vois que je puis ôter & remettre cette piece & ſes ſemblables, ſi j'en veux faire de concentriques à celle-ci, qui s'emboiteront comme des cornets les unes dans les autres, ſans que le melon ſoit défiguré, quand

même je les couperois encore en travers & en long, en paſſant toûjours par le même point du milieu avec la feuille de ferblanc, pourvû que j'empêche les premiers morceaux qui poſent ſur la table, de gliſſer.

Je connois donc que je puis diviſer ce melon en portions coniques s'il eſt bien rond, ou en coniques un peu allongées comme des cornets applatis s'il eſt oblong; & cependant faire enſorte que le tout ſubſiſte dans ſa forme, ce qui me conduit à l'examen de la différence de ces cones, & de la ſection qu'ils peuvent faire par leur pénétration dans le ſphéroïde, ſur quoi je commence à m'appercevoir qu'une telle ſection n'a plus la ſimplicité de celle de la ſphere, ou du ſphéroïde coupé par des plans, & que j'ai beſoin du ſecours de la Géométrie pour la connoître.

De ce petit exemple de comparaiſon des corps coupés par différentes ſections, il ſuit naturellement qu'on doit en diſtinguer de deux ſortes.

Les unes faites par des plans qui peuvent couper les ſolides ſuivant différentes inclinaiſons à leurs axes & à leurs côtés, & produire différentes figures.

Les autres par des corps qui pénetrent d'autres corps ſemblables ou différens; comme dans cet exemple le cone pénetre le ſphéroïde. Les courbes qui ſont formées par ces ſections, ſont l'objet principal de notre ouvrage; parce qu'elles ſe forment effectivement dans les ceintres des voutes ſur leurs faces, ou dans les rencontres de celles qui ſe croiſent; car chacune de celles qu'on met en uſage dans l'Architecture, eſt comparable à quelque corps régulier, comme nous l'allons expliquer.

De la Figure des voutes en général, rapportées à celle des corps réguliers.

LES voutes peuvent être conſidérées comme des ſolides *ſimples*, qui ont une principale ſurface, d'où elles tirent leur dénomination.

Ou comme *compoſées* de différentes ſurfaces qui ſe croiſent, ou qui ſe rencontrent.

La ſurface qui donne le nom aux voutes, eſt celle qui doit

être vûe par-deſſous, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *Doële*, par Analogie aux doëles des tonneaux, auſquels la plupart ont quelque rapport ; ce n'eſt pas que les voutes ſoient néceſſairement courbes, car il y en a de planes ; mais celles-ci ont toûjours ſi peu d'étendue, qu'elles ſemblent n'être pas aſſez conſidérables pour entrer en compte dans l'énumération des différentes eſpeces de voutes.

Parmi les voutes ſimples il y en a de *régulieres* circulaires, dont les unes ſont, 1°. des moitiés de cylindre ; 2°. des moitiés de cônes ; 3°. d'autres enfin des hémiſpheres ou portions de ſpheres.

La ſeconde eſpece des voutes ſimples eſt de celles qui ſont *régulierement irrégulieres*, dont les unes imitent le cylindre, les autres la ſphere, les autres le cône ; telles ſont celles dont le ceintre n'eſt ni circulaire ni elliptique, mais de quelqu'autre courbe géométrique ou méchanique, comme pourroit être la *chaînette* ou la parabole qui lui reſſemble fort, & qui eſt la plus convenable pour mettre en équilibre des vouſſoirs égaux. Telles ſont encore les voutes *annulaires*, qu'on appelle *ſur le noyau*, leſquelles ſont des cylindres courbés ſur leur axe, ou les mêmes tournés en *hélice*, c'eſt-à-dire en *vis*, qui s'élevent au-deſſus du plan ſur lequel elles poſent ; telles ſont auſſi les voutes ſphériques ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou ſur un plan elliptique, qui ſont des *ſphéroides*, & d'autres qui peuvent être des conoïdes.

La troiſiéme eſpece des voutes ſimples eſt celle des *irrégulieres*, qui participent plus ou moins de chacune de ces figures, de maniere qu'elles peuvent toujours être comparées en quelque choſe aux cônes, aux ſpheres ou aux cylindres, & tenir en même-tems des unes & des autres ; telles ſont la plupart des *arrieres vouſſures*.

Les voutes *compoſées* ne ſont qu'un aſſemblage de ces ſortes de figures ſituées différemment les unes à l'égard des autres, & contigues par des jonctions angulaires, qu'il a plû aux Architectes d'appeller *enfourchemens*, parce que les pierres qui ſervent aux jonctions ont deux branches, comme une fourche.

En un mot nous ne concevons aucune figure de voute, qu'on ne puiſſe rapporter à la ſphere, au cône & au cylindre, & c'eſt dans ce rapport que nous faiſons conſiſter leur *différence eſſentielle*.

Quant aux différences accidentelles, elles ſeront toûjours pro-

duites par la différente position de leurs faces, semblables à celles des sections des corps par la différente position des plans coupans, & celles de leurs arrêtes d'enfourchemens, comme celles des courbes formées à la surface des corps qui se pénetrent, en quoi consiste la principale difficulté de l'Architecture des voutes.

Des variations accidentelles aux voutes, comparées à celles des sections des corps.

S'IL ne s'agissoit dans la coupe des pierres que de former des corps réguliers, il ne seroit pas fort nécessaire de s'embarrasser de la figure des sections des corps, un très-petit nombre suffiroit ; mais parce que la principale difficulté vient des irrégularités de leurs angles rectilignes, curvilignes & mixtes, à la jonction des surfaces planes ou courbes, qui les croisent ou qui les terminent, on peut dire que la Théorie des sections est la base de cet Art.

Pour rendre ce discours sensible nous pouvons donner pour exemple les variations qui arrivent à une voute en berceau circulaire, laquelle est une moitié de cylindre, par la seule position du mur qui le termine par un bout, où se forme son ceintre de face. Supposant ce mur à plomb & perpendiculaire à la direction du berceau, si on vient à le démolir pour le refaire en *talud*, il arrivera deux changemens, l'un à la courbure du ceintre de face, qui ne sera plus circulaire, mais elliptique ; l'autre aux angles des pierres qui composent cet arc, lesquels ne seront plus droits verticalement, mais changeront continuellement à chaque lit, devenant toûjours plus aigus depuis l'imposte jusqu'à la clef, où ils seront égaux à l'inclinaison du mur à l'horison, c'est-à-dire au talud. Si au lieu de refaire ce mur en talud on le tourne de *biais*, c'est-à-dire obliquement à la direction du berceau, il arrivera de même deux changemens, l'un à l'arc de face, qui de circulaire deviendra elliptique d'une ellipse plus ou moins allongée, suivant l'obliquité du mur ; l'autre aux lits des pierres, dont les angles au lieu d'être droits horisontalement comme auparavant, deviendront aigus d'un côté, & obtus de l'autre, augmentant continuellement d'un côté à l'autre à chaque lit de vousoir. Si on faisoit le mur *biais & en*

talud, il ſe feroit encore un autre changement dans le ceintre & dans les angles des pierres angulaires, qu'on appelle *écoiçons*. Par où l'on voit que ſans toucher à la voute, la courbe du ceintre & les angles des lits des vouſſoirs peuvent changer de trois manieres par le ſeul changement de poſition du mur, qui eſt une ſurface plane ; telle eſt parfaitement la ſection d'un cylindre par un plan, ſans en faire l'application au berceau.

Il eſt aiſé de concevoir, que ſi au lieu d'un mur de face droit on en faiſoit un courbe, comme une portion de tour creuſe ou convexe, où ſi l'on y faiſoit aboutir une autre voute ; les courbes de leur jonction ou enfourchemens, pourroient infiniment varier, auſſi bien que les angles des ſurfaces coupées par pluſieurs lits de vouſſoirs, qui pourroient être rectilignes, mixtes ou curvilignes, d'une infinité d'ouvertures & de courbures différentes.

Pour nous énoncer en termes convenables à la théorie, nous conſidérons le mur comme une ſurface plane, que nous appellons un *plan*, & la voute comme un cylindre, cône ou ſphere, ſelon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face biaiſe en talud ou à plomb, nous dirons qu'un cylindre eſt coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expreſſion ſignifie toûjours la même choſe. Cela ſuppoſé.

Pour traiter cette matiere par des principes, il faudroit commencer par les élémens des ſections coniques ; mais parce que ce prélude nous meneroit trop loin, & que les Livres qui en traitent ſont très-communs, nous avons crû pouvoir nous diſpenſer d'une rigoureuſe méthode, en nous contentant de l'énoncé des propoſitions, qui ſont néceſſaires à l'intelligence de notre doctrine de Stereotomie, ſuppoſant le Lecteur inſtruit des élémens de Géométrie, & capable d'entendre les démonſtrations fondées ſur les propoſitions que l'on y trouve ordinairement, ſoit dans ceux d'Euclide, ou dans les autres Auteurs que nous n'avons pas cité. Nous avons cependant tâché de donner une introduction aux ſections coniques, ſuffiſante au ſujet dont il s'agit, afin qu'on ne ſoit pas obligé d'avoir recours à d'autres Livres.

PREMIERE PARTIE.

Des Sections des corps coupés par des plans.

CHAPITRE I.

Des Sections de la Sphere.

DE quelque maniere qu'on puiſſe couper une ſphere par un plan, la ſection ſera toûjours un cercle. La ſeule Géométrie naturelle & l'uniformité de la ſphere, nous font ſentir cette vérité; il ſuffit ſeulement de remarquer que lorſqu'elle eſt coupée par le centre, la ſection eſt la plus grande qu'on y puiſſe faire, d'où vient qu'on l'appelle *un grand cercle*, ou, ſelon quelques-uns, *un cercle majeur*, pour éviter l'équivoque du mot de *grand*, qui peut s'appliquer à une petite ſection comparée à une plus petite.

Les autres ſections ſeront toutes plus petites que celle qui paſſe par le centre, mais inégalement, ſelon qu'elles s'approcheront ou s'éloigneront du centre de la ſphere; enſorte qu'elles peuvent tellement diminuer, qu'elles ſe réduiſent à rien au point où le plan, au lieu de couper, ne fait plus que toucher la ſphere; & cette diminution ſe fait dans le rapport des ſinus des arcs. Tous ces cercles inégaux ſont compris ſous le nom de *petits cercles* ou *cercles mineurs*.

DÉFINITION.

1. Le point qui eſt à la ſurface de la ſphere, également éloigné de tous ceux de la circonférence d'un cercle, s'appelle *le pole* de ce cercle, qui n'eſt pas le même que le point de ſon centre, parce qu'il n'eſt pas dans le même plan que la circonférence, mais hors de ce plan dans la ſurface de la ſphere.

Et

Et parce qu'on peut trouver deux points diamétralement opposés, qui ayent la même propriété à l'égard du même cercle, il suit que chaque cercle a deux poles. La ligne droite qui passe par ces deux poles, & par conséquent par le centre du cercle, s'appelle l'*axe* de la sphere.

COROLLAIRE I.

2. D'où il suit, que les cercles qui ne sont pas paralleles, n'ont pas les mêmes poles, & qu'on peut considérer sur une sphere autant de poles qu'il y a de sections inclinées entr'elles, & par conséquent autant d'axes; ainsi sur la sphere armillaire, qui représente la terre ou le ciel, les poles du monde ne sont pas les mêmes que ceux de l'écliptique, parce que les poles du monde sont ceux de l'équateur, auquel l'écliptique est incliné de $23\frac{1}{2}$ degrés. Pl. I.

La section A *f* B *g*, qui est représentée ici en perspective, est un *cercle majeur*, parce qu'elle passe par le centre C de la sphere. Fig. 1.

La section D *c* EF est un *cercle mineur*; parce que son centre *c* est éloigné du centre C de la sphere. Les poles de la section AB sont les points P & *p*, éloignés de A & de B, comme de *f* & de *g*, parce qu'ils sont par tout éloignés d'un quart de cercle de la circonférence du cercle majeur.

Il n'en est pas de même des points O & *o*, qui sont les poles du cercle mineur DE; chacun d'eux est bien également éloigné des points de la circonférence, mais ces éloignemens ne sont pas égaux entr'eux, puisque les arcs OD ou OE sont plus petits que les arcs *o*D & *o*E, par la supposition que DE ne passe pas par le centre C de la sphere.

COROLLAIRE II.

3. D'où il suit que si un cercle majeur passe par le pole d'un autre cercle majeur, son pole sera aussi réciproquement à la circonférence de celui-ci; ainsi les points A & B seroient les poles du cercle qui passeroit par les points P *p* perpendiculairement au plan du cercle P A *p* B; tels sont par exemple l'équateur & le méridien, ou l'horison & un des cercles verticaux. On peut voir là-dessus les sphériques de Theodose.

La partie de sphere *h l* K *i* s'appelle un *segment*. La partie

S u V t, qui eſt une portion de ſphere coupée par deux plans paralleles entr'eux, s'appelle un *ſegment tronqué*, & ſa ſurface une *zone* ou *couronne de ſphere*.

Si une ſphere eſt coupée par trois ou pluſieurs plans inclinés entr'eux, qui paſſent par le centre C, il ſe fait une pyramide triangulaire ou de pluſieurs côtés, dont le contour de la baſe eſt un triangle ſphérique, ou qui peut être diviſée en triangles ſphériques, compoſés d'arcs de cercles majeurs, comme on pourra le remarquer dans les voutes ſphériques fermées en polygone, tel eſt le ſecteur *q m n P*.

CHAPITRE II.

Des ſections des cônes coupés par des plans.

4. ON diſtingue deux ſortes de cônes, l'une de ceux qu'on appelle *droits*, parce que leur axe eſt droit, c'eſt-
Fig. 2. à-dire, perpendiculaire ſur leur baſe, comme SC ſur BgA.

L'autre de ceux qu'on appelle *ſcalenes*, comme le cône *b* S *a*, dont l'axe SC eſt oblique au plan du cercle *b d a e*, qui eſt ſa
Fig. 3. baſe.

De quelque eſpece que ſoit un cône, droit ou ſcalene, les ſections formées par des plans qui les coupent ſont toûjours de même nature, excepté certains cas dont nous parlerons ci-après.

5. Une ſurface plane peut couper un cône de cinq manieres différentes, qui produiſent autant d'eſpeces de figures.

6. *Premierement.* Si un cône eſt coupé par un plan qui paſſe
Fig. 2. par ſon ſommet, la figure de la ſection eſt toûjours un *triangle* rectiligne, ſoit que le plan paſſe par l'axe SC ou qu'il n'y paſſe pas. Dans le premier cas la ſection s'appelle le *triangle par l'axe*, comme BSA; dans le ſecond cas on l'appelle ſimplement *ſection triangulaire*, comme *S d e*. On ne peut faire dans le cône d'au-
Fig. 3. tre ſection rectiligne.

Fig. 2. 7. *Secondement.* Si l'on coupe un cône par un plan DF parallele à ſa baſe BA, la ſection ſera un cercle, parce que la baſe BgA eſt toûjours ſuppoſée circulaire. Or il eſt aiſé de voir qu'une telle ſection fait des figures ſemblables, depuis le ſommet du cône juſqu'à ſa baſe.

8. *Troiſiémement.* Si l'on coupe un cône droit par un plan incliné

à ſon axe CS, comme DE ou D*e*, ou un cone ſcalene par un plan incliné au plan de la baſe, enſorte qu'il rencontre les deux côtés SB, SA, la ſection eſt appellée une *ellipſe*, telle eſt DRE*r* (*Fig.* 6.) où l'on voit la partie inférieure du cône, & ſa partie ſupérieure (*Fig.* 7.) retranchée par cette ſection, l'une & l'autre repréſentée en perſpective pour aider à l'imagination, & ſuppléer à ce qu'on n'a pû exprimer à la Fig. 2. qui ſert pour toutes les ſections. *Fig.* 1. *Fig.* 6. *Fig.* 7.

9. Quoique cette propoſition ſoit généralement vraie, elle ſouffre une exception dans les cônes ſcalenes; car ſi le plan coupant le cône obliquement à ſon axe, & perpendiculairement au triangle par l'axe, fait avec les côtés des angles égaux à ceux qu'ils font avec la baſe, mais en ſens contraire, la ſection ne ſera plus une ellipſe, mais un cercle; telle eſt la ſection *g f* dans le cône ſcalene S*b a*, ſuppoſé que l'angle S*g f* ſoit égal à l'angle S*b a*, ce que l'on appelle *ſection ſouſcontraire*. *Fig.* 3.

10. *Quatriemement.* Si un cône eſt coupé par un plan DP ou *dp*, parallelement à un des côtés SA, & que le triangle par l'axe coupe l'ordonnée Q*q* perpendiculairement, (*Fig.* 8.) la ſection ſera une *parabole*, & telle qu'elle paroît en perſpective (Fig. 8.) en DQ*q* ſur le cône, ou en QS*q*, (*Fig.* 9.) hors du cône. *Fig.* 2. & 8. *Fig.* 9.

11. *Cinquiemement*, ſi un cône eſt coupé par un plan parallele à l'axe SC, ou incliné à cet axe, de maniere qu'il coupe encore l'autre, ſuppoſé qu'on le prolonge au-delà du ſommet S, comme ID, qui rencontre AS prolongé en *x*, ou ce qui eſt la même choſe, ſi le plan qui coupe un cône, coupe auſſi ſon égal & oppoſé au ſommet, comme le plan paſſant par M *m* (*Fig.* 4.) coupe les cônes oppoſés ESF, GSI, la ſection s'appelle une *hyperbole*, telle eſt la courbe *b d* A & *h* DH ſur le cône, ou (*Fig.* 5.) B*d a* ou LD*n* hors du cône. *Fig.* 1. *Fig.* 4. *Fig.* 5.

COROLLAIRE I.

12. D'où il ſuit, 1°. que le changement d'obliquité des plans dont les ſections forment les ellipſes & les hyperboles, change auſſi la figure de ces ſections ſans changer leur nature, en les allongeant plus ou moins, comme on peut le voir par les inégalités des lignes DE & D*e*, qui ſont les grands axes, c'eſt-à-dire, les longueurs différentes de deux ellipſes, de même que *Fig.* 2.

Fig. 2. les lignes DK, DH & DI ſont ceux des hyperboles différemment ouvertes.

COROLLAIRE II.

13. 2°. Que les ellipſes peuvent être allongées infiniment depuis la poſition du plan, coupant le cône perpendiculairement à un côté, juſqu'à ce qu'elle devienent parallelen à ce même côté, comme en DP; alors la ſection change de nature & devient une *parabole*, ce qui ſait dire à quelques Mathématiciens, que la parabole eſt une ellipſe allongée à l'infini.

Que les ellipſes peuvent être infiniment reſſerrées & rétrécies, juſqu'à ce qu'elles deviennent ſans largeur, c'eſt-à-dire, que le petit axe ſoit réduit à zero, comme il eſt viſible par les changemens de poſition qui peuvent ſe faire, depuis la perpendiculaire à un côté tiré du point D, en remontant vers le ſommet S, comme en *De*, juſqu'à ce que le plan ne coupe plus le cône, mais qu'il le touche ſeulement ſuivant la ligne BS.

En continuant auſſi à changer la poſition du plan coupant, depuis la ligne DP, juſqu'à ce qu'il tombe ſur DB, on reſſerre de plus en plus l'hyperbole; & au contraire, depuis la poſition où il touche DB juſqu'à DP, elle s'ouvre de plus en plus, juſqu'à ce qu'elle ſe confonde avec la parabole; ainſi la parabole eſt comme le paſſage de l'ellipſe à l'hyperbole, de ſorte qu'on peut la conſidérer comme une ellipſe, dont le grand axe eſt infini, ou comme une hyperbole, dont le diamétre tranſverſe eſt infini.

COROLLAIRE III.

14. 3°. Que les ellipſes & les hyperboles ſemblables ſont faites par des ſections de plans paralleles entr'eux, comme *De*, *d*L pour les ellipſes, & DI, *d*H pour les hyperboles, ou par des plans dont les poſitions à l'égard de l'axe & de la baſe ſont ſemblables, parce que les figures ſemblables ſont celles dont les côtés, les axes & les ordonnées ſont proportionels, ou décrits ſur un même plan & ſur un même axe.

COROLLAIRE IV.

15. 4°. Que toutes les paraboles étant faites par des plans paral-

leles à un côté, elles ne ſont pas variables, mais toutes ſemblables entr'elles, de ſorte qu'elles ne peuvent changer que de grandeur; car *dp* & DP étant paralleles à SA, *dp* ſera parallele à DP, axe de la parabole; & quoique l'un ſoit plus long que l'autre dans le cône terminé par la baſe AB, il faut les conſidérer comme pouvant être prolongés auſſi-bien que le cône. *Fig.* 2.

Quoique nous établiſſions ici comme des définitions des ſections coniques, les différentes manieres dont on peut couper le cône pour qu'il en réſulte des cercles, ellipſes, paraboles & hyperboles; on peut en démontrer la vérité en faiſant voir que les courbes auſquelles on a donné ces noms, étant conſidérées hors du cône, ſont les mêmes dans le cône; mais comme il ne nous convient pas d'entrer dans une matiere qui nous meneroit trop loin, & qui a été traitée par un grand nombre d'Auteurs, il nous ſuffit d'avancer ces vérités comme des axiomes ſur leſquels nous devons fonder nos raiſonnemens: ceux qui voudront s'en inſtruire plus particulierement, peuvent conſulter les traités des ſections coniques; il nous paroît ſeulement à propos, en faveur de ceux qui n'ont étudié que les élémens ordinaires de la Géométrie, où il n'eſt pas parlé d'autre courbe que du cercle, d'expliquer quelques termes, & d'expoſer quelques propriétés des autres ſections coniques.

Définitions des points & des lignes remarquables dans les ſections coniques.

16. DANS trois des ſections coniques on conſidere un point qu'on appelle *centre*; ſçavoir, dans le cercle, dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole; mais il n'y en a point dans la parabole.

17. Tout le monde ſçait, que le centre du cercle eſt également éloigné de tous les points de la circonférence; il n'en eſt pas de même dans l'ellipſe, il n'eſt équidiſtant de la circonférence qu'à l'égard de quatre points oppoſés, mais il eſt au milieu de tous les diamétres; ainſi le centre C, (*Fig.* 7.) diviſe en deux également les *diamétres* inégaux *e d*, *m* T, I *t*. *Fig.* 7.

Le plus grand de tous les diamétres s'appelle *le grand axe*;

le plus petit, *le petit axe*: ces deux ſont perpendiculaires entr'eux, mais non pas les autres, comme nous le dirons ci-après.

18. Dans l'hyperbole, le point appellé *centre* n'eſt pas au-dedans de la courbe, mais au-dehors, entre les deux ſections des cônes égaux oppoſés au ſommet, comme en C (*Fig.* 4.) & en C (*Fig.* 5.) où eſt le milieu de la plus courte ligne D *d*, qu'on puiſſe mener d'une ſection à l'autre, qu'on appelle *l'axe tranſverſe*, ou *l'axe déterminé*, ou *le premier axe*, & la ligne qui lui eſt perpendiculaire S *s*, & double de la diſtance du milieu C, au ſommet S, eſt appellée le *ſecond axe*: le premier s'appelle quelquefois *grand axe*, & le ſecond *petit*; mais cette dénomination eſt impropre, parce que le ſecond axe peut devenir plus grand que le premier dans tous les cas où l'angle D S *d* eſt aigu; les autres lignes menées d'une hyperbole à l'autre, par le centre C, comme PR, (*Fig.* 5.) ſont appellées *diamétres*.

Fig. 4.

19. Quant à la parabole il n'y a point de centre, parce qu'il n'y a aucune diviſion égale à faire dans aucun diamétre, ni dedans ni dehors de la ſection; au-dedans, parce qu'étant ouverte & ſes diamétres étant infinis, en ce qu'ils ne coupent la courbe que par une de leurs extrêmités où eſt leur *origine*, ils ne peuvent être coupés en deux également; ni au-dehors, parce qu'il ne peut y avoir deux termes, puiſque le plan coupant le cone étant prolongé, ne peut couper l'oppoſé au ſommet, à cauſe qu'il eſt parallele à ſon côté.

Apol. liv. 2. p. 28.

20. On appelle *diametre* toute ligne droite qui en coupe également deux autres paralleles entr'elles, terminées de deux côtés à une circonférence; & *axe*, le diamétre qui les coupe perpendiculairement, & paſſe par le ſommet principal de la ſection; ainſi, par exemple, dans la parabole (*Fig.* 9) la ligne T *u* eſt un diamétre, parce qu'elle coupe en deux également en *o* les deux paralleles *r* S, Z R, & S P eſt un axe, parce qu'il paſſe par le ſommet principal S de la courbe, & coupe la ligne Z *q*, en deux également, & particulierement en P, de même que D *d* dans l'hyperbole, (*Fig.* 5.) & DE dans l'ellipſe, (*Fig.* 6.)

21. Les lignes perpendiculaires aux axes, ſont appellées *ordonnées*, comme P *q*, *p* Q (*Fig.* 9.) *or*, OR (*Fig.* 5.) pour l'hyperbole, & CR, *o r* (*Fig.* 6.) pour l'ellipſe. On appelle du même nom les lignes obliques aux autres diamétres, qui ſont coupées en deux également, comme (*Fig.* 9.) ZR, *r* S paralleles entr'elles, dont nous venons de parler, ne faiſant attention qu'à leur moitié ZO, *r o*.

Fig. 9. *Fig.* 5.

22. La principale marque des ordonnées, eſt celle d'être *paralleles à la tangente* qui paſſe par l'extrêmité du diametre auquel elles ſont ordonnées ; ainſi (*fig. 9.*) ſi T *n* eſt une tangente au point T, extrêmité du diametre T *u*, & qu'on lui mene une parallele *o r* ou OZ, ces deux lignes *o r* & OZ ſont des ordonnées au diamétre T *u*; il en ſera de même dans l'ellipſe & dans l'hyperbole ; on les appelle auſſi *appliquées*, en Latin *ordinatim applicatæ*. Fig. 9.

Les parties des axes ou des autres diametres, qui ſont compriſes entre l'extrêmité T (*Fig. 9.*) & les points *o* & O, où ils ſont coupés par les ordonnnées, s'appellent *abſciſſes*, du Latin *abſcindere* ; ainſi T *o* & TO ſont des abſciſſes du diametre T *u*; & S *p*, SP, celles de l'axe. Fig. 9.

23. Les abſciſes & les appliquées, conſidérées les unes à l'égard des autres, s'appellent *co-ordonnées*.

Les diametres T *m*, *t* I (*Fig. 7.*) qui ſe croiſent, de maniere qu'ils ſont paralleles aux tangentes TL, *t l*, qui paſſent par les extrêmités T & *t*, ſont appellés *conjugués*. La même choſe doit s'entendre pour les hyperboles. Fig. 7. *Apol. l. 2. p. 20.*

24. La partie d'un axe prolongé hors de la ſection, comme DY (*Fig. 6.*) compriſe entre l'ordonnée *t o* à cet axe, menée du point d'attouchement *t* d'une tangente *t* Y, & le point de rencontre Y de l'axe & de la tangente s'appelle *ſouſtangente*. Fig. 6.

25. La troiſiéme proportionelle à deux diametres conjugés eſt appellée *parametre*, de celui qui eſt le premier terme dans l'ellipſe & dans l'hyperbole ; & pour la parabole c'eſt la troiſiéme proportionelle à l'abſciſſe & à l'ordonnée, ou à la ſous-tangente & à la tangente.

26. La ligne droite qui eſt la rencontre du plan de la baſe du cone, prolongée s'il le faut, & d'un autre plan paſſant ſur le ſommet parallelement à une ſection conique, eſt appellée *directrice* ; telles ſont les lignes *e* I pour l'ellipſe, (*Fig. 6.*) KL pour l'hyperbole, (*Fig. 4.*) & A *g* pour la parabole, (*Fig. 8.*) La premiere de ces lignes eſt toute hors du cone, la ſeconde toute au-dedans, & la troiſiéme eſt tangente à la baſe du cone. Fig. 6. 4. 8.

On appelle auſſi *directrice* une ligne qui eſt dans le même plan qu'une ſection, & perpendiculaire à un axe, à certaine diſtance de ſon ſommet, comme DI eſt la directrice de la parabole QS*q*, (*Fig. 9.*) ſi elle eſt éloigné du ſommet S au-dehors autant que le foyer F eſt au-dedans, plus loin de l'ellipſe, & plus près pour l'hyperbole.

Digitized by Google

27. Outre ces lignes communes à toutes les ſections coniques, il y en a encore de particulieres à l'hyperbole, qu'on appelle *aſymptotes*, ce ſont des lignes droites AY, *ay*, (*Fig.* 5.) qui paſſent par le centre C des ſections oppoſées, & qui en approchent continuellement ſans jamais les rencontrer, propriété merveilleuſe, & difficile à concevoir, quoique la vérité en ſoit démontrée. Ces lignes ſont les interſections de deux plans, qui touchent la baſe du cône aux extrêmités L & K de la directrice, & paſſent par le ſommet S du cone.

Fig. 5.

Fig. 4.

28. Les points qu'on appelle *foyers* méritent encore d'être conſidérés, à cauſe de leurs grandes propriétés pour la deſcription des ſections coniques; leur ſituation eſt ſur un premier axe à quelque diſtance de ſon extrêmité.

29. Dans l'ellipſe il y en a deux ſur le grand axe, deſquels ſi l'on tire des lignes droites qui ſe joignent à un point quelconque de la circonférence, leur ſomme eſt toûjours égale à la longueur de ce grand axe; ſi les points F & *f* (*Fig.* 7.) ſont les foyers de l'ellipſe A *t* T *i*, la ſomme des lignes *fg* & F*g* eſt égale à l'axe A *a*.

Fig. 7.

30. Dans les hyperboles oppoſées il y en a auſſi deux F & *f* ſur le principal axe prolongé *d* D, (*Fig.* 5.) deſquels ſi l'on mene deux lignes FP, *f*P au même point P de la courbe, pris où l'on voudra, la différence P *q* de ces deux lignes eſt égale au principal axe. *Voyez le Traité des ſections coniques de* M. de L'HOPITAL, *article* 73.

Fig. 5.

31. Dans la parabole il n'y en a qu'un en F ſur l'axe SP (*Fig.* 9.) duquel ſi on mene une ligne F*h* à un point quelconque de la parabole QS*q*, cette ligne ſera égale à la ligne *h*I, menée du même point à la directrice DI, parallelement à l'axe DP.

Fig. 9.

Expoſition de quelques propriétés des lignes menées au-dedans & au-dehors des ſections coniques, dont la connoiſſance fournit différens moyens de les décrire, dans certaines circonſtances de lignes & de points donnés.

32. SI l'on tire deux lignes paralleles au-dedans d'une ſection conique terminées à ſa circonférence de part & d'autre, & qu'on les diviſe en deux également, la ligne qui paſſe par leur

leur milieu, & qui ſe termine à ſa ſection, eſt un *diametre*; cette propriété eſt une ſuite de la définition que nous avons donné des lignes appellées diametres.

Des abſciſſes & des ordonnées des ſections coniques.

NOus avons dit que le triangle étoit la premiere ſection du cone; mais comme elle eſt rectiligne il n'en eſt pas queſtion ici, où nous ne parlons que des courbes. Cependant nous remarquerons en paſſant, qu'elle a ſes abſciſſes & ſes ordonnées, qui ont un certain rapport. Si l'on fait yF parallele à CA, (*Fig.* 2.) Sy ſera une abſciſſe, & yF une ordonnée à l'axe SC du triangle BSA; on trouvera donc que *Fig.* 2.

Le rectangle fait de ſon abſciſſe Sy, par la moitié de ſa baſe CA, eſt égal au rectangle fait de ſon ordonnée yF par ſon axe; car à cauſe des paralleles, Sy : yF :: SC : CA; donc Sy × CA = yF × SC.

33. Dans le cercle, le rectangle fait par des abſciſſes, l'une par l'autre, eſt égal au quarré de l'ordonnée AO × OB (*Fig.* 10.) = $\overline{OR}^2$, cela eſt démontré dans les élémens de la Géométrie d'EUCL. l. 3. prop. 35. *Fig.* 10.

34. Dans l'ellipſe les *quarrés des ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles des abſciſſes*, ſi ADB eſt une demie ellipſe $\overline{ot}^2$: $\overline{CD}^2$, ou $\overline{or}^2$: $\overline{CF}^2$ dans la demie ellipſe AFB :: AO × OB : AC × CB; cette propriété eſt démontrée dans tous les traités des ſections coniques.

35. Dans la parabole *les quarrés des ordonnées* o*r*, OR (*Fig.* 8.) *ſont entr'eux comme les abſciſſes* D*o*, DO, ainſi $\overline{OR}^2$: $\overline{or}^2$ :: DO : D*o*. *Fig.* 8.

36. Dans l'hyperbole le rapport des quarrés des ordonnées entr'eux & aux rectangles des abſciſſes eſt le même que dans l'ellipſe, en ajoutant aux abſciſſes le diametre qui eſt au-dehors de l'hyperbole entre les ſections oppoſées; ainſi $\overline{or}^2$: $\overline{Ft}^2$ :: D*o* × *od* : DF × F*d*. *Fig.* 5.

COROLLAIRE I.

37. D'où il ſuit que les ordonnées également éloignées du centre d'une ſection qui en a un, ſont égales entr'elles, puiſ-

Fig. 7. qu'elles ont un même rapport à des rectangles égaux $e\overline{O}^2$ (*Fig.* 7.) : mO × OT :: $\overline{no}^2$: $mo \times o$T ; mais à cause de OC = oC, par la supposition, mO × OT = $mo \times o$T, donc eO = no.

38. Dans la parabole la proposition doit s'appliquer aux ordonnées équidistantes d'un diametre, comme si $or = o$S, on
Fig. 9. aura $rx = Sy$ (*Fig.* 9.) ce qui est clair, parce que la figure rxyS est un parallelogramme.

COROLLAIRE II.

39. Dans toutes les sections coniques les lignes paralleles à un diametre TO, équidistantes du point d'attouchement T
Fig. 11. d'une tangente AD (*Fig.* 11.) comprises entre la tangente & la courbe, comme Br, CV, AR, DG sont égales entr'elles ; car si par les points r & R on mene des paralleles à la tangente AD, ces lignes seront des ordonnées au diametre TO, qui les coupe en deux également au point O & o ; donc le parallelogramme TorB = ToVC, & le parallelogramme TORA = TOGD ; donc Vr = CB, & AR = DG.

COROLLAIRE III.

40. Si deux ou plusieurs lignes paralleles eh, tI terminées à la circonférence d'une ellipse, ou d'une autre section conique, sont coupées par une troisiéme HK, les rectangles faits des parties des paralleles, comparés à ceux des parties de celle qui les
Fig. 7. coupe, sont entr'eux en même raison, $tq \times qi$: H$q \times q$K :: $ep \times ph$: $hp \times p$K ; parce que chacun de ces rectangles a même raison au quarré de la tangente ; qui est parallele aux lignes dont il est formé, ce qui est démontré dans les traités des sections coniques.

Propriétés particulieres à l'ellipse.

LE grand usage que nous avons à faire de l'ellipse m'engage d'ajouter ici quelques propriétés qui lui sont particulieres, & qui servent à la décrire dans certaines circonstances.

Fig. 10. 41. Si le diametre AB d'un cercle ou demi cercle AEB, est

commun à une ellipſe ou demi ellipſe, décrite ſur le diametre au-dedans ou au-dehors du demi cercle, comme ADB ou AFB, & qu'on lui mene les ordonnées O *r* CF, *les ordonnées au cercle ſeront entr'elles comme celles de l'ellipſe*, OR : CF : : O *t* : CD, & OR : O *r* : : CE : CF ; parce que l'ellipſe n'eſt qu'un cercle allongé ou retréci, & que les quarrés des ordonnées auront toujours le même rapport entr'eux que celui des mêmes rectangles AOB, ACB. *Fig.* 10.

42. Cette propriété eſt encore vraie, quand même les ordonnées ne ſeroient pas perpendiculaires à l'axe AB, comme ſont O *r* & CD ; * car ſi par leurs extrêmités *r* & D on mene des paralleles au diametre AB, qui couperont les ordonnées au cercle CE, & OR en F & *g*, il ſe fera deux triangles ſemblables CFD & O*gr*, qui feront voir que les ordonnées de l'ellipſe ſont en même raiſon que celles du cercle, puiſque ſi l'on fait CF : CE : : O *g* : OR, les point F & *g* ſeront à la circonférence d'une ellipſe ; mais CD : CF : : O *r* : O*g* ; donc CD : CE : : O *r* : OR. Ce qu'il falloit démontrer. * *Fig.* 12.

43. La ſomme des deux axes eſt plus petite que celle de deux diametres conjugués quelconques, & leur différence eſt plus grande que celle de ces diametres.

44. Cependant la ſomme des quarrés de deux diametres conjugués *m* T, *t* I eſt égale à celle des quarrés des deux axes A *a*, B *b* ; cela eſt démontré dans tous les traités des ſections coniques. *Fig.* 7.

Des Tangentes des ſections coniques.

45. SI par un point *t* on mene une tangente *t* Y, qui rencontre un axe ou diametre quelconque, prolongé en Y, & une ordonnée *t o* à ce diametre, la partie YD de la ſous-tangente Y *o* ſera égale à l'abſciſſe D *o* dans la parabole ; elle ſera plus grande dans l'ellipſe, & plus petite dans l'hyperbole ; ainſi l'arc de la ſection qui paſſera entre D & Y, ſi D étoit le milieu de OY, ſera une hyperbole ; & celui qui paſſera entre D & O dans la même ſuppoſition, ſera une ellipſe. Cela eſt démontré dans les traités des ſections coniques. *Fig.* 5. *Fig.* 3.

46. Dans la même Fig. 6. ſi une tangente *t* Y rencontre l'axe ED prolongé, ou un autre diamette, & que du point d'attou- *Fig.* 6.

chement *t* on lui mene une ordonnée *t o*, les lignes C*o*, CD, CY, ſeront continuellement proportionelles, non-ſeulement dans l'ellipſe, mais auſſi dans l'hyperbole, on aura C*o*: CD:: CD : CY.

Fig. 5.

Fig. 13. 47. Si deux lignes *a* T, *a t* qui concourent en *a*, touchent une ſection conique quelconque aux points T & *t*; la ligne menée du point *a* par le milieu *m* de la ligne T*t* qui joint les points d'attouchement, eſt un diametre; & par l'inverſe, ſi elle eſt un diametre, elle paſſera par *m*.

Apollonius l. 1. p. 19. & 20.

48. Si une ſection conique eſt touchée par deux lignes *a t*, *a* T (*Fig.* 13.) la ligne T *t*, qui paſſe par les deux points d'attouchement, étant prolongée vers *b*, ſi de ce point pris à volonté, l'on tire deux autres tangentes *b* N, *b* E, elles couperont les deux précédentes en F & D, je dis que la ligne F *a* ſera diviſée *harmoniquement*, c'eſt-à-dire, que les trois lignes *a* F, *a t* & *a* D ſont harmoniquement proportionelles; la premiere ſera à la troiſiéme, comme la différence de la premiere & de la ſeconde eſt à la différence de la ſeconde & de la troiſiéme F *a*: *a* D:: F *t*: *t* D. Cette propriété nous ſervira à trouver les points d'attouchement dont nous aurons beſoin au deuxiéme Livre, par une méthode très-facile.

On ne s'arrête pas ici à démontrer toutes ces vérités qui en ſuppoſent d'autres, auſquelles il faudroit remonter; il ſuffit qu'elles le ſoient dans les Livres connus, comme ſont les ſections coniques d'APOLLONIUS, de M. DE LA HIRE, & du Marquis DE L'HOPITAL, pour nous ſervir à raiſonner conſéquemment dans les uſages que nous devons en faire.

De quelques différences de poſition des ſections coniques dans les cones ſcalenes.

QUOIQUE les cones ſcalenes ne ſoient pas d'une nature différente de celle des cones droits, l'obliquité de leur axe ſur le plan de la baſe occaſionne quelque différence dans les ſections, à ne conſidérer que leur poſition reſpective.

49. Premierement. Nous avons fait voir que la ſection d'un plan, oblique à l'axe du cone ſcalene, dont il coupe les deux

côtés, pouvoit être un cercle, quoique naturellement cette section soit une ellipse.

5o. Secondement. Les sections faites par des plans paralleles à la base, qui sont des cercles dans les cones droits, peuvent être des ellipses dans les cônes scalenes, s'ils sont considérés comme des cones droits sur une base elliptique; car si l'on suppose que la base *b e a d* (*Fig.* 3.) est une ellipse, & qu'une ligne *s a* immobile sur son point *s*, parcourt vers son autre extrêmité *a* le contour de cette ellipse, la figure qui en résultera sera un cone scalene de base elliptique. On peut imaginer la même génération pour un cone droit, comme si la base B *g* A, (*Fig.* 2.) étoit une ellipse, il seroit toujours évident que toutes les sections faites par des plans paralleles à ces bases, seroient des ellipses semblables à celles de la base; car tous les diametres possibles DF, BA d'une section par l'axe BSA, ou KI, *b a* (*Fig.* 3.) seroient proportionnels à ceux d'une autre section par l'axe du même cone. *Fig.* 3.

Fig. 3. *Fig.* 2.

Mais toutes les sections obliques dans ce cone ne seroient pas des ellipses, car sans s'arrêter à la section sous-contraire, qui n'a pas lieu dans ce cas, puisque la base n'est pas circulaire, on pourra toujours démontrer que de tels cones peuvent être coupés par un plan incliné à l'axe, & qui ne fera pas avec les côtés des angles égaux à ceux de la base, c'est-à-dire, des côtés du triangle par l'axe avec la base, dont la section sera un cercle, ainsi que la sous-contraire; car si l'on tire la droite S *x* sur la surface du cone, & *n* C dans la base au centre C, & *o m* parallele à *n* C; puisque *o m* : *n* C : : S *m* : S C le demi diametre *o m* sera plus petit que *n* C dans le rapport de K *m* à *b* C. Si, par exemple, *b* C : C *n* : : le grand axe est au petit, le même rapport sera entre K *m* & *m o*, donc K *m* sera plus grand que *m o*; or il est clair qu'en changeant l'inclinaison du plan de la section, par exemple, en *r*, on peut racourcir ce demi axe K *m* jusqu'à ce qu'il devienne égal à *m o*, comme si du point *m* pour centre & pour rayon *m o* on coupoit le côté *b* S en *r*, ce qui est possible à l'égard de plusieurs côtés diamétralement opposés, puisque *m* K est plus grand que *m o*; alors les points *r* & *o* seront également éloignés du centre *m*, par conséquent les axes étant égaux entr'eux, la section sera un cercle. S'il s'agissoit au contraire d'allonger le petit axe, il est visible qu'il n'y auroit qu'à incliner le plan de la section du côté de ce petit axe. Ce que l'on verra démontré au problême 33 du second Livre ci-après.

THÉOREME I.

La ſection plane elliptique faite dans l'intervalle de deux cones concentriques & ſemblables, comme entre les ſurfaces concaves & convexes d'un cone creux d'égale épaiſſeur, *eſt une couronne compriſe par deux circonférences d'ellipſes, qui ne ſont pas équidiſtantes, & qui ne peuvent être concentriques que dans les cones ſcalenes, lorſque la ſection eſt perpendiculaire à l'axe.*

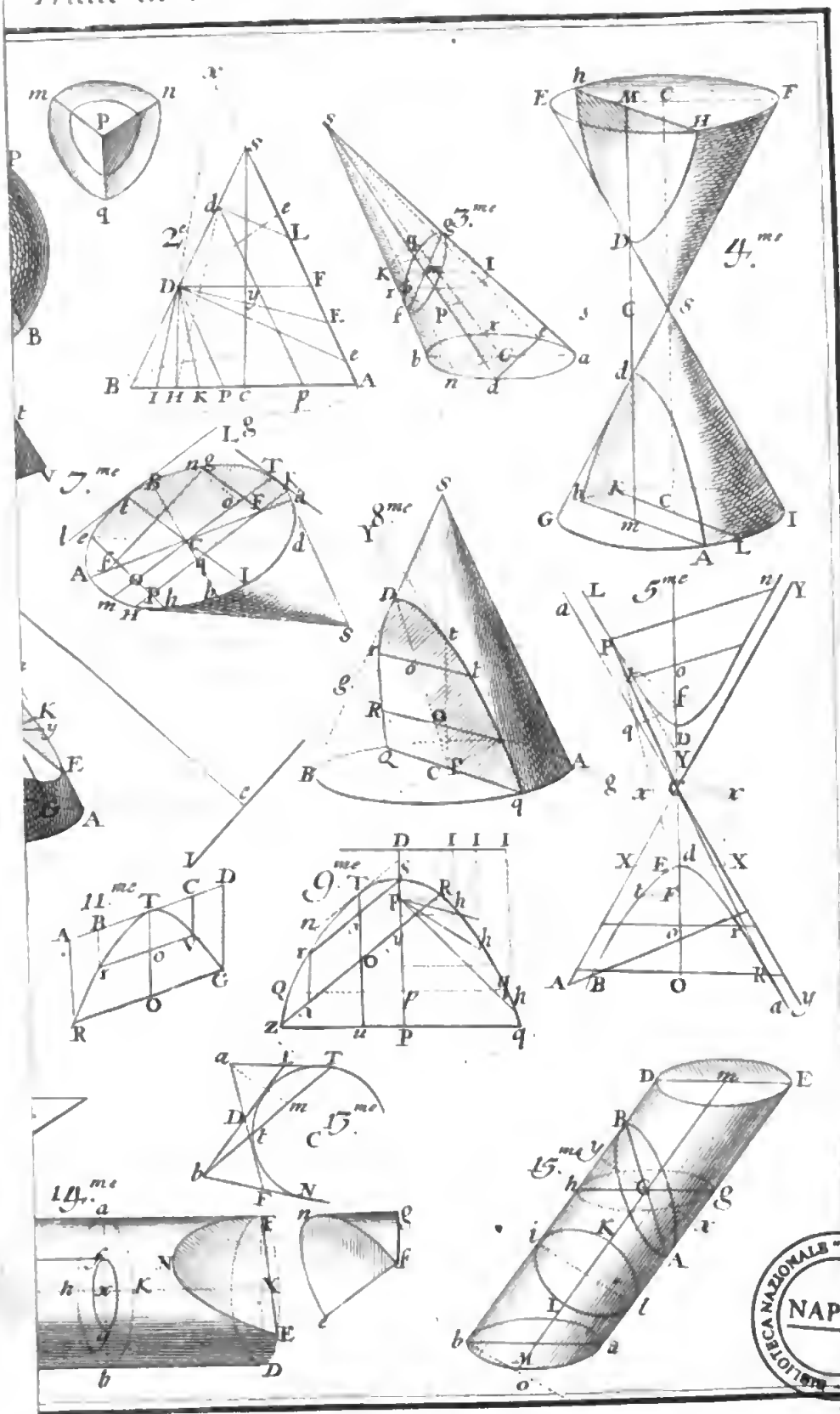
Soit (*Fig. 6.*) un cone F *s* G concentrique & ſemblable au cone BSA, dans lequel on le ſuppoſe, il eſt évident par la ſuppoſition, que leurs côtés BS, F *s*; AS, G *s* ſeront non-ſeulement paralleles, mais équidiſtans dans la ſection du triangle par l'axe BSA. *Fig. 6.*

Il eſt encore clair que le plan de la ſection oblique DE, que nous ſuppoſons perpendiculaire au triangle par l'axe, étant également incliné à l'axe commun SX, de l'un & de l'autre cone, il fera des ellipſes ſemblables DRE dans le grand, & *d h e* dans le petit.

Il faut préſentement faire voir que quoique les deux ſurfaces des cones ſoient équidiſtantes, & leurs baſes concentriques, les ſections elliptiques ne le ſont pas; des points D & *e* ſoient tirées les perpendiculaires D *x*, *e* K, qui ſeront égales par la ſuppoſition.

Puiſque l'angle D *ds* extérieur au triangle *d s e* eſt plus grand que l'intérieur oppoſé *d e s*, ou ſon égal DES, la ligne D *d*, compriſe entre les deux paralleles SB, *s* F ſera plus courte que la ligne *e* E compriſe entre les paralleles équidiſtantes de ces premieres; car puiſque D *x* = *e* K, faiſant K *y* = *d x*, le côté *e y* ſera = D *d*; or puiſque l'angle *e* E K eſt plus petit que *e y* K, c'eſt-à-dire, la ligne *e* E plus oblique ſur EK, elle ſera plus grande que *e y*, *ce qu'il falloit démontrer*; donc les ellipſes DRE & *d h e* s'approcheront plus vers D que vers E ſur l'axe DE; par conſéquent elles ne ſeront ni équidiſtantes, ni concentriques; *ce qu'il falloit* premierement *démontrer*.

Secondement. Si le cone au lieu d'être droit étoit ſcalene, il eſt clair que l'axe étant oblique à ſa baſe circulaire, ſera perpendiculaire à quelques ſections elliptiques; dans ce cas nous pouvons conſidérer la Figure 6. différemment du cas précédent, en


2e
3.me
4.me
5.me
7.me
8.me
9.me
11.me
15.me
19.me
NAPOLI

ſuppoſant la baſe BA elliptique, & la ſection oblique DE circulaire, (ſi l'on veut) ou elliptique.

Il eſt clair que les diſtances des ellipſes de la baſe AB dans la ſection du triangle par l'axe BSA, ſont égales en BF & AG, parce que le diametre commun BA eſt également incliné aux côtés des cones intérieur & extérieur; mais entre ces deux extrêmités on ne peut trouver aucune partie des deux circonférences des ellipſes, qui ne ſoient plus ou moins éloignées. Pour le démontrer, ſoit un plan SNX perpendiculaire au triangle par l'axe BSA, qui coupera les ellipſes ou les cercles DRE & *dhe* ſuivant une ligne *on*, qui ſera perpendiculaire à ce triangle, de même que XN; par conſéquent ces deux lignes *on*, XN, ſeront paralleles entr'elles, donc leurs parties *ln*, LN compriſes auſſi entre deux paralleles SN & *s* L ſeront égales entr'elles. Mais l'intervalle *ln* des circonférences de la ſection oblique n'eſt pas égal aux intervalles D *d*, & E *e*, puiſqu'il eſt plus long que l'un & plus petit que l'autre; donc l'intervalle LN des deux ellipſes de la baſe ne ſera plus égal aux diſtances BF, AG. En effet la ſection *b a* par la perpendiculaire *o n* parallelement à la baſe BA ſera des ellipſes ſemblables dans l'un & l'autre cone, auſquelles l'axe *o n* eſt commun avec une ordonnée de la ſection oblique; or les diſtances des deux cones en D *d* & *b f* ſont entr'elles comme DO à *b* O; ainſi le rapport de D *d* à *b f* augmente depuis le triangle par l'axe juſqu'à la ſection perpendiculaire au plan en Q *n*, & au contraire elle diminue depuis le point *n* juſqu'en E; donc la diſtance LN ſera moyenne entre celle des extrêmités BF & AG. Elle ſera plus petite ſi DE ou BA eſt un grand axe, ou plus grande ſi BA eſt un petit axe. *Fig. 6.*

De cette inégalité de diſtances des ellipſes concentriques à leur axe, s'enſuit néceſſairement celle de tous les points d'une extrêmité d'un diametre à l'autre, puiſqu'elles ſe rapprochent & s'éloignent d'une diſtance proportionelle à celle des axes; donc les ellipſes de la baſe, quoique concentriques, ne ſont pas équidiſtantes: *ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Il faut cependant remarquer que, quoique les ellipſes concentriques ſemblables ne ſoient pas équidiſtantes, meſurées ſur différens axes & diametres, elles le ſont cependant ſur les mê-

mes axes & ſur les mêmes diametres ; & même non-ſeulement ſur toutes les lignes droites qui traverſent ces deux circonférences, mais encore ſur celles qui ne font que toucher l'intérieur ſans la couper, ce qui fournit une maniere aiſée de faire une ellipſe *aſymptotique* à une autre donnée ; il ſuffit d'en avoir un ſeul point, comme nous le dirons au ſecond Livre. Je me ſers de ce terme, parce que cette propriété qui eſt ſemblable à celle de l'hyperbole à l'égard des aſymptotes, a donné occaſion à M. DE LA HIRE* d'appeller les ſections coniques, concentriques & ſemblables, *aſymptotiques*.

* *Sect. con. l. 6. p. 127.*

COROLLAIRE I.

On peut étendre cette propoſition à d'autres ſections qu'aux ellipſes, ſi l'on veut conſidérer avec les Mathématiciens la parabole comme une ellipſe dont l'axe eſt infiniment long, & l'hyperbole comme une ellipſe renverſée, qui a ſes foyers en-dehors ; en effet ſi l'on coupe un cone creux d'égale épaiſſeur, de maniere que le plan coupant faſſe une de ces deux ſections, on remarquera viſiblement que la courbe de la ſurface intérieure n'eſt pas parallele à celle de l'extérieure.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que les arcs des arêtes de doële & d'extrados des faces des voutes coniques, qui ſont obliques à la direction de l'axe, comme aux trompes biaiſes & ſurbaiſſées à leur face, ne doivent pas être paralleles entr'eux, comme les font quelques Auteurs de la coupe des pierres ; car ſi l'arc de doële n'eſt pas plus près de l'extrados à une impoſte, qu'à l'autre du côté de l'angle le moins aigu, la voute deviendra moins épaiſſe du côté oppoſé qui eſt le plus long, de ſorte que le côté & le piédroit le plus long & le plus chargé deviendroit le plus foible, ce qui eſt évidemment contre la bonne conſtruction.

Il ne faut pas dire que cette différence eſt ſi peu conſidérable qu'on lui peut préférer la ſimétrie extérieure de la face ; car ſans faire de ſuppoſition de cas extraordinaire, l'axe ED peut fort bien être perpendiculaire au côté SB ; ſi l'angle S étoit plus ouvert, par exemple, de 60 degrés, alors le même

axe

axe feroit en E un angle de 30 degrés avec le côté SA : or dans cette ſuppoſition il eſt clair que la voute ſeroit moitié moins épaiſſe à l'impoſte SE qu'à l'impoſte SD; car les diſtances des paralleles SB, *s* F, SA, *s* G ſont en raiſon des ſinus des angles que la ligne ED fait avec les côtés; mais le ſinus total eſt double de celui de 30 degrés, donc la diſtance *e* K, c'eſt-à-dire l'épaiſſeur de la voute vers E *y* ne ſera que la moitié de D *x*, qui eſt celle du côté SD. Il n'eſt pas néceſſaire de démontrer ce rapport qu'on apperçoit d'un coup d'œil par celui des triangles ſemblables EK*e*, & ESD, ſi l'angle D eſt ſuppoſé droit, & l'angle S de 60 degrés, ce qui n'eſt pas de même dans la figure 6; or *e* K eſt égal à la diſtance des paralleles vers D & *e*, E à celle des mêmes ou de leurs égales priſe obliquement ſur la ligne ED; donc, &c. Pl. 1. Fig. 6.

En ſecond lieu, ce problême fait voir que lorſqu'un ceintre eſt elliptique on ne peut lui faire un ceintre parallele qui ſoit auſſi elliptique, de ſorte que s'il s'agit, par exemple, d'un bandeau ou d'une archivolte, & que l'on faſſe les deux arêtes de doële & d'intrados elliptiques, il ſera inégalement large; & s'il eſt par tout également large, les deux arêtes ne feront pas exactement elliptiques, ce qui eſt ſurprenant & incroyable aux ouvriers, & aux gens qui n'ont point de théorie.

THEOREME II.

Une ſection conique donnée peut être celle d'une infinité de cones différens.

Soit (*Fig.* 16. 17. & 18.) une ſection conique DAC, dont AB eſt un diametre, auquel la ligne CD eſt une ordonnée, diviſée en deux également en M, on lui menera par ce point une perpendiculaire FE, de longueur priſe à volonté ſur un plan incliné à celui de la ſection conique donnée, d'une telle inclinaiſon que l'on voudra (ce qu'on ne peut repréſenter dans ces figures qu'en perſpective). Sur cette ligne FE comme diametre, on décrira un cercle FDEC, dont la ligne DC ſera une corde commune à l'ordonnée de la ſection conique. Si par les points EABD on tire les lignes ES, FS, qui ſe rencontreront en S, je dis que le ſommet S ſera celui d'un cone, qui aura pour baſe, ou ce qui eſt la même choſe, pour ſection parallele à la baſe, le Pl. 1. Fig. 16. 17. & 18.

cercle FDEC, & pour autre ſection la ſection donnée DAC ce qui eſt clair par la conſtruction & par la génération du cone ſuppoſant qu'une ligne SB, immobile ſur ſon point S, parcour la circonférence du cercle DFCE; puiſque par la même conſtruction cette ligne paſſera par les deux points communs DE, & par les extrêmités des diametres AB, EF des deux ſections le cercle & l'ellipſe. Or puiſque le diametre du cercle FE peut être varié de longueur, & que l'on peut même changer la poſition de ſon centre en l'approchant ou l'éloignant du point M, il eſt viſible que le point S changera auſſi de poſition, puiſqu'elle dépend de celle des extrêmités de ce diametre; par exemple, *Fig. 17.* ſi au lieu du terme E on en prenoit un autre plus en-dehors en K ou en L, le point S tomberoit en *x* ou en *y*, & de même ſi l'on rapprochoit ou éloignoit l'autre terme F, le point S tomberoit plus haut ou plus bas; donc on peut faire paſſer une infinité de ſurfaces de cones differens par la circonférence de la ſection conique donnée: *ce qu'il fallοit démontrer.*

COROLLAIRE.

Fig. 19. De-là il ſuit que ſi une ligne AS, immobile ſur le point S, pris à volonté, ſe meut autour d'une ſection conique ouverte, comme la parabole ou l'hyperbole, il ſe formera une pyramide mixte, qui ſera toujours une portion de cone, & par conſequent dont les ſections qui ne ſeront pas paralleles à la baſe ouverte donnée, pourront être connues en cherchant la baſe du cone dont cette pyramide mixte eſt une partie, de la maniere que nous venons de le dire.

Ou bien ſans achever le cone, ni connoître le cercle de la baſe, on peut les connoître par la comparaiſon des parties des ſous-tangentes, qui ſont au-deſſus & au-dehors du cone (par l'article 45.)

Soit, par exemple, la baſe donnée ARP une parabole, ſi l'on ſuppoſe la pyramide ARPS coupée par un autre plan incliné à cette baſe, dont l'interſection ſoit AP, & qui coupe le côté SR en H, on menera par un point quelconque de la baſe comme T, une tangente TN (Art. 45) qui rencontrera l'axe MR de la baſe prolongé en N, & ayant tiré NS, on imaginera un plan TNS, qui touchera la pyramide ſuivant la ligne TS menée du point d'attouchement de la baſe au ſommet S, la-

quelle coupera la courbe AHP en *u*, par où on menera dans le plan incliné une ligne *u x* parallele à AP, & un autre *u y* tangente à la même courbe, qui rencontrera en *y* l'axe M*y*, qui eſt dans le même plan que MN; ſi la longueur H*y* eſt plus petite que H*x*, c'eſt une marque que la ſection qu'on veut connoître eſt une hyperbole; ſi au contraire elle étoit plus grande, comme LE à l'égard de E*d*, ce ſeroit une ellipſe; & ſi elle étoit égale, comme on ſuppoſe *m*R & RN, qui ne le ſont cependant pas dans la figure, par exemple, *d*I & I*n*, ce ſeroit une parabole, ce qu'il eſt plus facile d'appercevoir en examinant ſi les plans *n d* & NM ſont paralleles entr'eux.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'on peut appliquer à toute ſorte de voutes coniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle poſition ou inclinaiſon de l'axe qu'on jugera convenable à la voute qu'on ſe propoſe de faire, par exemple, qu'on peut faire une trompe de niveau ou rampante, dont le ceintre de face ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé de telle meſure qu'on voudra, & connoître dans quelle ſituation ſa doële ſera circulaire.

Secondement, elle fait connoître les changemens qui arriveroient, ſi le ceintre de face étoit d'une ſection ouverte, par exemple, parabolique, comme il l'eſt en effet dans les *trompes ſur le coin* à plomb, dont l'axe eſt de niveau; ainſi ſuppoſant que le mur ſoit en talud, la courbe ſe changera en hyperbole, & s'il étoit en ſurplomb elle deviendroit une ellipſe; cependant l'Architecte eſt le maître de choiſir pour ceintre de face la courbe qu'il voudra.

De même ſi le ceintre de face d'une trompe conique à pans à plomb, qui eſt ordinairement une hyperbole, lorſque l'axe eſt de niveau, eſt changé par un talud, il ne changera pas de genre de courbe, mais il deviendra ſeulement une hyperbole différente de celle qui étoit le ceintre à plomb.

En un mot ce Théoreme fait connoître la nature de tous les changemens que peuvent cauſer les différens contours de ceintres de face des trompes, & ceux de leurs *trompillons*, qui peuvent ne leur être pas paralleles, & tous ceux qui proviennent des inclinaiſons à l'horiſon, & déclinaiſons de la perpendicu-

laire ſur la face, ce qui comprend toutes les trompes biaiſes & rampantes, aſcendentes ou deſcendentes, & les joints de tête ; de ſorte qu'on peut dire que ce Théoreme eſt le fondement de toutes les voutes coniques. Paſſons aux cylindriques.

CHAPITRE III.

Des Sections des cylindres coupés par des plans.

55. ON diviſe les cylindres comme les cones, en *droits* & en *ſcalenes*.

Ils ſont appellés *droits*, lorſque leur axe eſt droit, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à leur baſe, comme le cylindre BDF *a* eſt droit ſur la ponctuée B *a* (*Fig.* 14.) parce que ſon axe XC eſt perpendiculaire ſur B *a*. *Fig.* 14.

56. Ils ſont appellés *ſcalenes*, lorſque leur axe *m* M (*Fig.* 15) eſt oblique ſur la baſe *b a* ou DE du cylindre *b* D E *a*. *Fig.* 15.

Cette différence de poſition d'axe à l'égard de la baſe, en peut faire dans la poſition des ſections du cylindre, comme elle en fait dans celles du cone.

57. La ſection d'un cylindre coupé par une ſurface plane, ne peut varier que de trois manieres.

I°. Lorſque le plan coupant paſſe au long de l'axe ou parallelement à l'axe, la ſection eſt un *parallelogramme* rectangle, ſi le cylindre eſt droit, & obliquangle, s'il eſt ſcalene, ou il peut auſſi être rectangle, ſi la ſection eſt perpendiculaire au plan paſſant par D *a*.

58. 2°. Lorſque le plan coupant eſt parallele à la baſe B *a*, comme *a b*, la ſection eſt un *cercle* ; parce qu'on ſuppoſe toûjours un cylindre de baſe circulaire, & que la ſection parallele lui doit être ſemblable & égale, à cauſe que tous les côtés du cylindre étant paralleles à l'axe, les diametres ſeront tous égaux. *Fig.* 14.

59. 3°. Lorſque la ſection eſt oblique, comme BA, elle eſt toûjours une ellipſe dans le cylindre droit, quelle que puiſſe être l'obliquité du plan coupant à l'égard de l'axe ; mais dans le cylindre ſcalene, la ſection, quoiqu'oblique, peut être un cercle, lorſque le plan coupant (*Fig.* 15.) étant perpendiculaire au parallelogramme, par l'axe *b* D E *a*, fait avec les côtés des angles égaux à ceux de la baſe, mais en ſens *contraire*, c'eſt-à-dire, *Fig.* 15.

que l'angle DBA ſoit égal à l'angle *b a* E, ou (ce qui eſt la même choſe (BAE égal à D *b a*; car ſi par le point C, milieu de BA, on mene *h g* parallele à *b a*, & que par le même point on tire *y x* perpendiculaire aux côtés *b* D, *a* E, on aura deux triangles égaux C *x* A, C *x g*, parce qu'ils ſont rectangles en *x*, & qu'ils ont les angles en A & *g* égaux (*par la ſuppoſition*) & le côté C *x* commun; donc les côtés CA, C *g* ſeront égaux entr'eux, de même que leurs oppoſés au ſommet *h* C & CB, donc les diametres *h g* & BA ſont égaux au diametre *b a* de la baſe circulaire, & les plans qui paſſent par ces lignes étant perpendiculaires à celui du parallelogramme par l'axe, les ſections ſeront égales; par conſéquent celle par BA ſera un cercle, & tout au contraire *y x* perpendiculaire aux côtés ſera une ellipſe, dont *y x* ſera le petit axe, de même que toute autre ſection oblique, qui ne ſera ni parallele à la baſe ni *ſou-contraire* comme BA. *Fig. 15.*

COROLLAIRE.

60. D'où il ſuit que (de même que dans le cone) les ſections elliptiques peuvent varier infiniment, ſelon l'angle plus ou moins aigu ou obtus que le plan coupant fait avec l'axe du cylindre, enſorte qu'elles s'allongent ou ſe racourciſſent, depuis la poſition perpendiculaire à l'axe, juſqu'à ce qu'il lui devienne parallele.

61. Ou il faut remarquer, qu'il n'y a aucune différence de ces ellipſes à celles du cone, ce qui ſurprend ceux qui n'ont pas fait une étude de cette matiere; il leur ſemble que l'ellipſe cylindrique eſt uniforme à ſes deux extrêmités, mais que la partie de celle du cone qui eſt plus près du ſommet, doit être plus aigue que celle qui eſt vers la baſe; on voit cette erreur exécutée dans une pratique des *Inſtitutions géométriques d'Albert Duret*, où la courbe fait un jaret à chaque extrêmité de ſon axe; nous en montrerons la fauſſeté lorſque nous ferons voir, que la même ellipſe peut être une ſection commune au cone & au cylindre. On en ſentira facilement la vérité dès-à-préſent, ſi on ſe rappelle ce que nous avons dit (*Art.* 37.) que les ordonnées à un axe, qui ſont également éloignées du centre de l'ellipſe, ſont toûjours égales entr'elles, non-ſeulement dans le cone, mais encore dans le cylindre; puiſque leurs quarrés ſont entr'eux en raiſon des rectangles des abſciſſes qu'on ſuppoſe égales, propriété eſſentielle à l'ellipſe.

Inſtitutionum Geometricar. l. 4 fol. Aarnhemiæ 1606.

62. La ſeule différence qu'il y a dans ces ſections, c'eſt que l'axe du cylindre paſſe par le centre de l'ellipſe cylindrique, & que l'axe du cone droit ne paſſe pas par celle de la conique, mais plus ou moins près, ſuivant qu'elle eſt plus ou moins oblique, comme on le voit à la Fig. 6. où l'axe du cone coupe celui de l'ellipſe en O, la raiſon en eſt bien ſenſible dans le cone droit, où l'axe du cone XS diviſe l'angle du ſommet BSA en deux également, il ne peut diviſer de même une ligne terminée à ſes côtés, qui ne lui eſt pas perpendiculaire, comme DE dans le triangle par l'axe; puiſque n'étant pas parallele à BA, ſes parties DO & OE, ne ſont pas proportionelles à BX & XA; mais cette différence ne fait rien à la figure de l'ellipſe. Toutes les ſections que l'on peut faire dans le cylindre reviennent aux trois dont nous avons parlé, quoiqu'elles ne ſoient pas entieres; car la ſection NFE, qui ne coupe le cylindre (*Fig.* 14.) qu'en partie, eſt une portion d'ellipſe qui ſeroit entiere ſi le cylindre avoit été coupé entierement, comme il le ſeroit étant prolongé.

Fig. 14.

63. Cette ſection incomplete retranche un ſolide *enfg*, qu'on appelle un *onglet*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'ongle d'un doigt.

Application à l'uſage.

La connoiſſance des ſections du cylindre eſt la baſe de celles des différences des ceintres des faces de berceaux, & des courbes de leurs joints de tête; je ne parle point de ceux de lit, qui ſont des ſections preſque toujours rectilignes.

Les berceaux dont les *arcs-droits* ſont circulaires, ſont de vraies portions de *cylindres droits*, & ceux qui ſont ſurmontés ou ſurbaiſſés ſont des portions de cylindres ſcalenes, ce que l'on peut démontrer de la même maniere que nous avons fait pour les cones de baſe elliptique; car ſi le petit axe de l'ellipſe faite par la ſection perpendiculaire au parallelogramme par l'axe du cylindre, ne peut atteindre à la circonférence d'un cercle qui auta pour diametre la perpendiculaire *i l*, ſur les côtés *b* B, *a* E, il eſt viſible qu'en inclinant ce plan vers L ou K, le diametre LK peut être allongé, au point qu'il devienne égal à *i l*; ainſi quoique la baſe *b a*, oblique à l'axe M *m*, ou *b o* perpendiculaire à cet axe, ſoit ſuppoſée elliptique, ſi étroite que l'on voudra, la ſection *i* L *l* K poutra être un cercle, & le cylindre ſera

Fig. 15.

Digitized by Google

ſcalene dans un ſens différent de ce qu'il eſt ici.

Il peut arriver, & il arrive en effet, comme nous le dirons au Livre 4. par quelque raiſon de conſtruction, qu'un Architecte juge à propos de faire le ceintre de l'arc droit d'un berceau en courbe hyperbolique ou parabolique, alors il ne s'agit plus de conſidérer la voute comme une portion de cylindre proprement dit, mais d'un cylindroïde, dont nous allons examiner les ſections.

THEOREME III.

La ſection plane des eſpeces de cylindres qui ont pour baſe une parabole ou une hyperbole, eſt une ſection conique de même eſpece.

Si l'on ſuppoſe qu'une ligne A*a* (*Fig.* 20.) ſe meut parallelement à elle-même autour d'une ſection conique ouverte, elle formera par ce mouvement une eſpece de cylindre, que nous appellerons un *cylindroïde*, parce qu'il reſſemble au cylindre ordinaire, qui a pour baſe un arc de cercle ou d'ellipſe. Pl. 2. *Fig.* 20.

Soit le cylindre A*a d* DB*b*, qui a pour baſe une courbe ADB, que je ſuppoſe ici une parabole; je dis que s'il eſt coupé par un plan parallele ou oblique à ſa baſe ADB, la ſection ſera encore une parabole.

Si le plan coupant eſt parallele à la baſe, la propoſition eſt évidente.

S'il ne l'eſt pas, ſuppoſons qu'il ſoit incliné comme en L*d*, & qu'il coupe celui de la baſe prolongée ſuivant la ligne MK, à laquelle ſoient menés deux plans paralleles A*b*, F*e*, qui coupent les précédens en ABHI & FE*fe* perpendiculairement à celui de la baſe MO, & parallelement à MK.

A cauſe des paralleles SC, *d*D, perpendiculaires au plan de la baſe, on aura les triangles ſemblables L C*c*, L G*g*, L D*d* dans le plan de l'axe CD de la parabole, & CS du cylindre, & à cauſe que MK (par la conſtruction) eſt parallele à AB & FE, elle le ſera auſſi à HI & *fe*; donc HI eſt parallele à AB, & *fe* à FE, & AI & F*e* ſont des parallelogrammes; puiſque A*a*, B*b*, F*f*, E*e*, qui ſont les côtés du cylindre, ſont paralleles entr'elles; donc AH = BI, & F*f* = E*e* de même que HI = AB, & FE = *fe*; par conſéquent LD : L*d* :: LG : L*g* :: LC : L*c*, & en diviſant CD : *cd* :: GD : *gd*; mais par la ſuppoſition

Fig. 2. que la baſe ADB ſoit une parabole, on aura $\overline{CB}^2 : \overline{GE}^2 :: CD : GD :: cd : gd$, & puiſque $CB = cI$ ou $AB = HI$, & $FE = fe$, ou ſa moitié $GE = ge$, on aura $\overline{cI}^2 : \overline{ge}^2 :: cd : gd$, c'eſt-à-dire, les quarrés des ordonnées en même raiſon que les abſciſſes; donc HdI eſt une parabole, ſi ADB en eſt une; *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut démontrer la même choſe de l'hyperbole, ſi la baſe ADB eſt hyperbolique, ou de l'ellipſe, ſi elle étoit portion d'une ellipſe, avec cette différence, que dans cette derniere la ſection pourroit devenir un cercle, comme nous l'avons dit des cylindres ſcalenes; car faiſant abſtraction de ce cas, les ordonnées correſpondantes CB, cI ſeront toujours égales entr'elles, de même que GE, ge, & les abſciſſes DC, dc, DG, dg auront toujours le même rapport dans la baſe & dans la ſection oblique, ce qui eſt clair en les conſidérant comme des parties des côtés du triangle LdD, coupé par des paralleles cC, gG, dD; par conſéquent les abſciſſes reſtant de la longueur de leurs diametres, ſeront encore en même raiſon; donc il y aura même rapport des rectangles de leurs parties aux quarrés des ordonnées.

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition quelles doivent être les courbes des ceintres de face, ou les joints de doële des berceaux biais ou rampans, ou en talud, dont les arcs-droits ne ſont pas circulaires, mais de quelqu'autre des ſections coniques, qui les rendent ſurhauſſés ou ſurbaiſſés en portion de parabole, d'hyperbole, ou d'ellipſe; car quoique nous ayons mis les berceaux elliptiques au rang des cylindres ordinaires, mais ſcalenes, ils peuvent être compris dans cette propoſition, qui montre plus généralement, pourquoi la ſection oblique & la baſe ſont de même eſpece.

Et pour donner un exemple particulier de pratique, cette propoſition fait voir que les arêtes des joints de lit de cette eſpece de voute en ſaillie hors du mur, qu'on appelle *trompe en tour ronde, érigée ſur une ligne droite*, dont l'arc droit eſt hyperbolique, comme il le doit être à celles qui portent les cabinets de l'Hôtel de Toulouſe, ſur la rue des Bons-enfans, auprès de la Place de Victoire à Paris, ſont toutes des arcs d'hyperboles différentes

différentes plus ou moins allongées, ſelon qu'elles s'approchent ou s'éloignent du milieu.

En ſecond lieu, elle fait voir que la projection d'une ſection conique quelconque, inclinée au plan de la baſe horiſontale ou verticale, eſt encore une courbe de même eſpece, parce qu'on peut imaginer que les lignes perpendiculaires à ce plan paſſant par tous les points du contour de la courbe, forment un cylindre ou cylindroïde, dont la baſe eſt la courbe de projection, & la courbe projettée peut être conſidérée comme la ſection oblique de ce cylindre.

THEOREME IV.

La ſection d'un cylindre creux dont l'épaiſſeur eſt par tout égale, coupé par un plan qui n'eſt pas parallele à ſa baſe, eſt une couronne d'ellipſe, compriſe par deux ellipſes ſemblables & concentriques, mais non pas équidiſtantes, excepté la ſection ſous-contraire dans les cylindres ſcalenes, où elle eſt une couronne de cercle.

Soit (*Fig.* 14.) une portion de cylindre A *a b* B, creuſe d'une cavité F *f* G *g*, qui eſt une eſpace cylindrique concentrique, & ſemblable à ce cylindre ſur l'axe commun C *x*, auquel la ſection plane AHB eſt oblique, je dis que les ellipſes AHB & FIG, formées par cette ſection à la ſurface intérieure & extérieure de ce cylindre creux, ne ſont pas équidiſtantes, quoiqu'il ſoit partout également épais. Pl. V. *Fig.* 14.

DÉMONSTRATION.

Si l'on coupe un plan paſſant par l'axe du cylindre A *a b* B, il ſe formera à l'interſection des ſurfaces des triangles ſemblables AB *a*, FB *f*, dont les lignes *a* A & *f* F ſont paralleles, par la ſuppoſition que les ſurfaces extérieure & intérieure ſont équidiſtantes; donc B *a* : BA :: B *f* : BF, & en diviſant : : *af* : *a* F; mais B *a*, côté d'un angle droit B *a* A, eſt plus petit que BA, qui eſt l'hypotenuſe; donc *fa*, diſtance des deux ſurfaces à la baſe droite, eſt plus petite que FA, diſtance des mêmes à la ſection oblique; *ce qu'il falloit* premierement *démontrer.*

Préſentement nous pouvons démontrer que l'intervalle de ces mêmes ſurfaces coupées par un plan perpendiculaire au pre-

PL. 2. Fig. 14. mier, ou si l'on veut, au triangle *a* BA, & par l'axe *c* C, sera égal dans la section oblique AB, à celui de la base droite *a* B, par la seule raison que l'intersection MP du plan est perpendiculaire à l'axe C*c*, comme le rayon de la base *c a* est perpendiculaire au même axe, & comme le rayon *c p* de la même base est parallele à CP.

Pour le concevoir plus distinctement, soit *m* M P *p* le second plan perpendiculaire au parallelogramme par l'axe a *a b* B, ce qu'il faut imaginer dans la figure où il ne l'est qu'en perspective, parce qu'en projection ce plan ne doit être représenté que par une ligne droite; or puisqu'il passe par l'axe, il fera deux parallelogrammes, un à la surface intérieure *l* L O *o*, l'autre à l'extérieure *m* M P *p*, dont les côtés seront paralleles entr'eux, & équidistans d'un côté & d'autre par la supposition; donc PO est égal à *p o*, mais *p o* est aussi égal à *f a*; donc PO est égal à *f a*, c'est-à-dire, que l'intervalle des deux ellipses AHB & FOG au petit axe, est le même que celui de la vraie épaisseur du cylindre; mais hors de cet axe il s'allonge continuellement jusqu'au grand axe AB, où cet intervalle FA est le plus grand; donc les intervalles des deux ellipses sont inégaux, quoique les surfaces soient équidistantes entr'elles; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De-là il suit que la portion du grand axe qui est entre les deux ellipses, peut autant varier à l'égard de celle du petit axe, qui marque la vraie épaisseur du cylindre, qu'une ligne tirée obliquement entre deux paralleles à l'égard de la perpendiculaire; ainsi supposant que l'angle d'inclinaison A B *a*, de la section oblique à l'axe *c* C, soit de 60 degrés, la distance FA sera double de l'épaisseur *f a*, comme GB de B *g*.

Ce que nous venons de démontrer dans le cylindre droit est encore vrai dans le scalene, comme il est aisé de l'appercevoir en supposant que la courbe BMAP est un cercle, qui soit la base du cylindre scalene, alors la courbe B *m* a *p* sera une ellipse; la seule différence qui en résulte, est un changement de position dans les axes de la section inclinée à la base; car la ligne *mp* devient alors le grand axe, parce qu'elle est égale au diametre du cercle MP, égal par la supposition à BA, lequel est plus grand que B a, comme l'hypotenuse d'un triangle rectangle A a B à l'égard de son côté B a.

Application à l'uſage.

Par le moyen de cette propoſition nous ferons voir au quatriéme Livre, qu'on ne peut faire deux ceintres elliptiques de doële & d'extrados, qui ſoient équidiſtans à la face d'une voute biaiſe, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ſans la rendre inégale à l'arc-droit. Elle fait auſſi voir les inégalités qui réſultent à l'épaiſſeur des voutes biaiſes, lorſque leurs ceintres de face ſont faits d'ovales compoſées de portions de cercles concentriques; enfin elle ſervira à montrer la fauſſeté de l'ancien trait des voutes ſphéroïdes ſur un plan elliptique.

CHAPITRE IV.

Des Sections planes de quelques corps régulierement irréguliers.

ON peut imaginer une infinité de corps formés par des révolutions de lignes courbes autour de leurs axes, ou de leurs tangentes, ou par le mouvement de quelques ſurfaces mûes de différentes manieres; mais nous nous botnons à ceux dont on voit des exemples dans les parties des voutes uſuelles, qui ſe réduiſent à trois ou quatre eſpeces.

66. *La premiere*, eſt de ceux qui ſont formés par la révolution des ellipſes, qu'on appelle ſphéroïdes; ſi la révolution ſe fait ſur le petit axe, le corps qui en réſulte ſera appellé *ſphéroïde applati*, tels ſont à peu près les oignons, les pommes & quelques citrouilles. Si la révolution ſe fait ſur le grand axe AX, nous l'appellons *ſphéroïde oblong*, tels ſont les melons & pluſieurs autres fruits, & particulierement les œufs. *Fig.* 21.

67. *La ſeconde eſpece*, eſt de ceux qui ſont formés par la révolution d'une ſection conique ouverte, parabole, ou hyperbole, tournant ſur ſon axe, on l'appelle *conoïde*, tels ſont les corps ASB, aux figures 22 & 23. *Fig.* 22 & 23.

La troiſiéme eſpece moins réguliere, eſt celle des corps appellés *ellipſoïdes*, qui ne ſont formés par la révolution d'aucune ellipſe conſtante ſur un de ſes axes, mais par la révolution d'une

ellipſe ſur un axe conſtant, dont l'autre varie de longueur, ſuivant le contour d'une autre ellipſe, qui eſt perpendiculaire à la premiere; ou ſi l'on veut en prendre une autre idée, c'eſt une ſuite d'ellipſes perpendiculaires à un axe, laquelle diminue ſuivant le contour de deux autres ellipſes qui ſe croiſent ſur cet axe commun, c'eſt ce que j'appelle *ellipſoïde*, & qui eſt appellé en Architecture, *voute ſphérique ſurhauſſée ou ſurbaiſſée ſur un plan ovale.*

La quatriéme eſpece, eſt celle des corps formés par la révolu-
Fig. 24. tion d'une ſection conique fermée, cercle ou ellipſe autour de ſa tangente, ou autour d'un autre cercle ou d'une ellipſe, au plan duquel celui de l'ellipſe ou du cercle générateur eſt toûjours perpendiculaire. Dans le premier cas le corps s'appelle *anneau fermé*, & dans le ſecond ſimplement *anneau*, telles ſont les *voutes ſur le noyau.*

La cinquiéme eſpece eſt celle des corps formés par le mouve-
Fig. 25. ment d'un cercle ou d'une ellipſe tournant autour d'une hélice ou ligne en vis, enſorte que ſon plan ſoit dirigé à l'axe de l'hélice, ou perpendiculaire à ſa tangente. J'appelle ce corps *héliçoïde*, tels ſont les vis & colonnes torſes, & en fait de voute, les *berceaux tournans & rampans, & vis St. Giles.*

THEOREME V.

La Section d'un ſphéroïde & d'un conoïde régulier, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, eſt un cercle; & s'il lui eſt parallele ou oblique, elle eſt une ellipſe.

La premiere partie de ce Théorême eſt évidente, car puiſque le ſphéroïde ou conoïde eſt ſuppoſé formé par la révolution
Fig. 21. 22. & 23. d'une demie ellipſe ABX, ou d'une ſection conique ouverte ASB (*Fig.* 22 & 23) immobile ſur un de ſes axes, chaque ordonnée à cet axe, comme CB, K*g*, (*Fig.* 21.) ou CB, *g*T (*Fig.* 22 & 23.) décrira par ſa révolution un cercle dont elle eſt le rayon; & comme on peut appliquer une ordonnée à chaque point de l'axe, il ſuit que toutes les ſections faites par des plans qui lui ſont perpendiculaires, ſont des cercles dans les ſphéroïdes allongés ou applatis, & dans les conoïdes.

Quant à la ſeconde partie de ce Théorême, touchant les ſections paralleles & obliques à l'axe, elle eſt démontrée dans la

quinziéme propoſition des conoïdes & ſphéroïdes d'ARCHIMEDE.

Premierement. Il n'eſt pas difficile à comprendre que les ſections paralleles à l'axe ſont des courbes ſemblables à la génératrice. Il n'eſt pas tout-à-fait ſi clair que les obliques ſont des ellipſes ; nous allons comprendre l'un & l'autre cas dans une démonſtration différente de celle d'ARCHIMEDE.

Soit l'ellipſe ADXB la ſection du ſphéroïde par ſon axe AX, laquelle eſt la même que l'ellipſe génératrice : ſi l'on ſuppoſe deux plans paralleles entr'eux BD, *g h*, & perpendiculaires à l'axe AX, & au plan paſſant par cet axe, leurs ſections dans le ſphéroïde ſeront des cercles repréſentés en perſpective par les courbes BLD, *g m h*, de même que celle du plan paſſant par l'axe perpendiculaire au plan BADX, ſera une ellipſe repréſentée par la courbe ALX, laquelle aura deux ordonnées CL, K *m* communes aux cercles BLD, *g m h*. Enfin ſi l'on coupe le ſphéroïde par un plan incliné à l'axe AX, comme en EF, & perpendiculaire au plan BADX, la courbe de la ſection repréſentée par E *m n* F aura auſſi deux ordonnées communes aux ſections circulaires; ſçavoir I *n*, K *m*: il faut démontrer que les quarrés de ces ordonnées ſont entr'eux, comme les rectangles EI × IF & EK × KF. *Fig. 11.*

Par une propriété dont nous avons parlé (Article 40) les lignes paralleles menées dans une ſection conique, & coupées par une troiſieme perpendiculairement ou obliquement, ſont des parties d'abſciſſes, dont les rectangles ſont proportionnels, BI × ID : EI × IF : : *g* K × K *h* : EK × KF ; mais à cauſe des cercles des ſections perpendiculaires à l'axe, $\overline{BI \times ID} = \overline{I\,n}^2$ & $\overline{g\,K \times K\,h} = \overline{K\,m}^2$; donc EI × IF : EK × KF : : $\overline{I\,n}^2$: $\overline{K\,m}^2$; c'eſt-à-dire, que les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes ; donc la courbe *E m n* F eſt une ellipſe ; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'où il ſuit, que ſi le plan coupant eſt parallèle à l'axe, la ſection ſera une ellipſe ſemblable à la génératrice.

Et que ſi deux plans inclinés à l'axe ſont paralleles entr'eux, leurs ſections ſeront des ellipſes ſemblables, ce qui s'étend auſſi aux conoïdes paraboliques ou hyperboliques, ce que nous al-

lons démontrer par une autre maniere, qui eſt celle d'ARCHIMEDE.

Fig. 22 & 23. Soit (*Fig.* 22) la courbe ASB la ſection d'un conoïde parabolique, coupé par un plan paſſant par ſon axe SC, & DF la ſection d'un plan perpendiculaire au précédent, ſoit menée PT, parallele à DF, & tangente à la parabole au point T, duquel ſoit mené T*g*, ordonnée à l'axe SC, & parallele à AB, & par S la ligne SI; ſoit enfin E*x* perpendiculaire à DF, qui ſera auſſi dans le plan du cercle A*x*B, baſe droite du conoïde, & par conſéquent une ordonnée commune à cette baſe & à la courbe D*x*F. Par la propriété du cercle $\overline{Ex}^2 = AE \times EB$; or * DE × EF : AE × EB :: $\overline{TI}^2 : \overline{Is}^2$, & TI = IP, parce que par la propriété de la parabole *g*S = SP*; donc DE × EF : $\overline{Ex}^2$ :: IP : IS; donc $\overline{Ex}^2$: DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IP}^2$, & parce que les triangles FD*h*, PIS ſont ſemblables, on démontrera de même que les quarrés des autres ordonnées au diametre DF, auront toûjours un même rapport aux rectangles des abſciſſes, que le quarré D*h* au quarré DF, dont la ſection ſera toûjours une ellipſe.

* *Voyez la Hire, Prop.* 29. *l.* 3.

* Art. 45.

Il eſt viſible que DF eſt le grand diametre, & que le petit ſera égal à D*h*.

Secondement. Pour la ſection oblique du conoïde hyperbolique, tout étant diſpoſé comme à la figure précédente, (*Fig.* 23.) AE × EB : DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, or $\overline{Ex}^2$: DE × EF :: $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$, qui eſt une propriété de l'ellipſe. On démontrera de même que les quarrés des autres ordonnées à ce diametre auront un pareil rapport à leurs abſciſſes, comme $\overline{SI}^2 : \overline{IT}^2$; or SI eſt plus petit que IT, puiſque PI eſt plus petit que IT, par la propriété de l'hyperbole, donc la ſection faite par DF eſt une ellipſe, dont le grand diametre eſt DF.

Fig. 23.

Art. 45.

COROLLAIRE.

De-là il ſuit, que la ſection plane d'un ſphéroïde creux, d'égale épaiſſeur, eſt une couronne compriſe dans la circonférence de deux ellipſes ſemblables & concentriques; mais non pas équidiſtantes, comme nous l'avons dit des ſections du cylindre & de quelques-unes du cone; ce qui nous ſervira au qua-

Digitized by Google

triéme Livre à montrer l'erreur du trait des voutes ſphériques, ſuivant les Auteurs de la coupe des pierres.

La ſeconde eſpece de corps régulierement irréguliers que nous avons à connoître pour la pratique des voutes, ſont les *annullaires*, qui ſont des cylindres pliés ſur leurs axes, ordinairement en portion circulaire, enſorte que les axes & les côtés ſont des arcs de cercles concentriques.

THEOREME VI.

La Section d'un corps cylindrique annullaire, dont l'axe eſt courbe, en forme de circonférence de cercle, & qui eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe courbe, eſt une ovale du quatrieme ordre.

Soit le corps cylindrique courbe HD *h*, fait par la révolution du petit cercle GHI, élevé perpendiculairement ſur le plan du grand cercle ID *i*, dont le centre eſt C, autour duquel s'eſt fait la révolution du petit cercle GHI, enſorte que le diametre GI ait toûjours été dirigé au centre C; ſi l'on ſuppoſe ce corps coupé par le plan ALBO perpendiculairement au plan ID *i*, dont la commune ſection ſoit AB, il ſe formera à la ſurface du cylindre annulaire une courbe ALBOA, qui ſera une ovale du quatrieme ordre. *Fig. 24.*

Par un point quelconque N de la commune ſection AB, conſidérée comme l'axe de la courbe, ſoit tiré du centre C le rayon CMK, qui coupe en M le cercle *g*FG, concentrique à *i*DI, & ſur ſa partie MK = GI ou *gi*, ſoit élevé un plan perpendiculaire au plan ID *i*, qui coupera celui qui paſſe par AB, & dont la commmune ſection ſera NL perpendiculaire à l'axe AB de la courbe cherchée ALB.

Soit donc le rayon C *i*, ou ſon égal CD, que l'on ſuppoſe mené perpendiculairement à AB = *a*, le diametre du petit cercle GI ou *gi*, ou MK = *b*, AE = *c* ou AB = 2*c*, l'abſciſſe AN = *x*, l'ordonnée NL ou NO = *y*, on aura par la nature du cercle CE = $\sqrt{aa - cc}$ & EN = *c* — *x*; donc CN = $\sqrt{aa - 2cx + xx}$, & KN = $a - \sqrt{aa - 2cx + xx}$, MN = KM — KN = $b - a + \sqrt{aa + 2cx + xx}$; mais par la na-

ture du cercle, le rectangle $KN \times MN = \overline{NL}$; ainsi multipliant $KN \times MN$, & égalant le produit à yy, on trouvera $ab - 2aa + 2cx - xx + \overline{2a - b}\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$. Pour abréger la réduction, soit nommé $2a - b = e = Ig$ ou iG, ce qui étant substitué, on aura cette équation $-ae + 2cx - xx + e\sqrt{aa - 2cx + xx} = yy$, ou bien en transposant pour mettre tous les rationels d'un côté $xx - 2cx + ae + yy = e\sqrt{aa - 2cx + xx}$; pour en ôter l'asymmetrie, il faut quarrer les deux membres de l'équation, ce qui donnera $x^4 - 4cx^3 + 2aexx + 2yyxx + 4ccxx - 4acex - 4cyyx + 2aeyy + y^4 = -2ceex + eexx$, réduisant cette équation à o selon l'ordre des dimensions de x, suivant la coutume, on aura :

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4cx + 2aexx - 4acex + y^4. & & & = o \\ -ee & +2cee & +2aeyy & \\ +4cc & -4cyy & & \\ +2yy & & & \end{array}$$

laquelle équation exprime la nature de la courbe ALB de la maniere la plus simple, dans son état de généralité ; ainsi c'est une courbe du quatrieme ordre, parce que les co-ordonnées x & y, montent à la quatrieme dimension ; mais il y a des cas particuliers où elle devient plus simple, par exemple :

Si la section AB passe par le centre, il est visible que la courbe ALB se partage en deux cercles ihg, & GHI, dont l'équation est $xx + ex + yy = o$. Aussi dans ce cas notre équation trouvée $-2a$ se laisse diviser par ce diviseur $xx - 2ax + 2ae$, & le quotient $1 - e + yy$ donnera ladite équation $xx + ex + yy = o$, pour le cercle $-2a$ ihg ou IHG, comme il doit arriver, si l'on prend IG égal à tout le grand diametre Ii, c'est-à-dire, si Ig ou e est égal à o, auquel cas le corps annulaire HDh devient une sphere, ensorte que la courbe de la section ALB en sera un cercle mineur. Notre équation la doit marquer en effet, si vous y omettez les termes

termes où ſe trouve la lettre e; puiſque $e=0$, l'équation géné- *Fig. 24.*
rale ſe change en celle-ci

$$x^4 - 4cx^3 + 4ccxx - 4cyyx + y^4 = 0$$
$$+ 2yy$$

dont on peut tirer la racine quarrée $xx - 2cx + yy - 0$; or il eſt clair que cette équation particuliere eſt pour le cercle, dont le diametre eſt $2c = AB$, qui marque évidemment que la ſection ALB dégénere en cercle.

Ce ſont là tous les cas poſſibles où la courbe en queſtion puiſſe devenir d'un ordre inférieur que du quatrieme.

La troiſieme eſpece de corps régulierement irréguliers, dont nous avons beſoin de connoître les ſections, eſt celle des *Cylindriques hélicoïdes* (en termes d'Architecture) des voutes en *vis*.

Nous appellons *cylindre hélicoïde* un corps cylindrique, qui, au lieu de tourner dans un plan autour d'un centre, tourne en s'élevant autour d'un axe, comme le lierre, ou plutôt le liſeron, s'éleve en embraſſant un arbre, d'où vient le mot *d'hélice*, uſité en Architecture, tiré du Grec *heliſo, circumvolvo*. Tel eſt le corps EGMgD (*Fig.* 25.) *Fig. 25.*

COROLLAIRE I.

De cette définition on peut conclure que la ſection de ce corps, coupé par un plan parallele à ſon axe, ne ſera pas d'une eſpece différente de celle du corps annulaire dont nous venons de parler, ſi la baſe ou projection de l'hélice eſt un cercle; car toutes les diſtances de l'axe à ce corps, meſurées horiſontalement ſeront égales à celle de la ſection de l'anneau à ſon centre, & toutes les ſections verticales par l'axe ſeront des cercles égaux, comme celles de l'anneau, coupé par un plan paſſant par le centre C (*Fig.* 24) & perpendiculairement au plan *i* DI, ſuppoſant l'un & l'autre corps cylindrique d'égale groſſeur; il n'y aura donc de différence, que celle du changement de hauteur de toutes ſes ſections circulaires, qui s'élevent comme par degrés les unes au-deſſus des autres, au long d'un axe incliné au plan de la baſe; ce qui eſt exprimé à la Fig. 26. par les différences de hauteur *n e o a*. *Fig. 26.*

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit que pour connoître & tracer la ſection de l'hélice, il faut commencer par tracer celle de l'anneau ſuppoſé ſur ſa baſe, & coupé à même diſtance du centre que l'hélice l'eſt de ſon axe, & donner à l'axe de l'hélice l'inclinaiſon qu'il doit avoir, laquelle ſe trouve par la hauteur de la ligne *a b* (*Fig.* 25) Nous ne nous arrêtons pas ici à la deſcription de l'une & de l'autre courbe, que nous donnerons au ſecond Livre; il ſuffit d'expoſer aux yeux leur rapport par la figure 26.

Fig. 25.

Application à l'uſage.

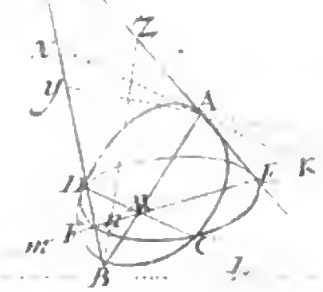
74. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbure du ceintre d'une interruption de voute ſur le noyau par un mur ou une ſaillie droite, comme pourroit être la tour quarrée d'un clocher, au chevet d'une Egliſe, ainſi voutée à ſon bas côté; mais il ſert principalement à trouver la cerche droite, qui doit guider la courbure de la doële d'une voute ſur le noyau, ou d'une vis St. Giles, perpendiculairement au rayon, venant du centre de la courbure de l'axe & des côtés, comme on en a beſoin pour l'appareil, ce que nous ferons voir dans le quatrieme Livre où il s'agit de l'appareil; nous croyons n'avoir pas beſoin de nous étendre davantage ſur les changemens qui peuvent arriver à ces courbes, par ceux qu'on peut faire aux ceintres des cercles générateurs IHG, ſoit en les ſurhauſſant, ſoit en les ſurbaiſſant, ou à la courbure de l'axe, laquelle au lieu d'être circulaire pourroit être elliptique, parce que nous pourvoirons dans la pratique à l'exécution de toutes ces variations.

Des Sections du coin-conoïde coupé par des plans.

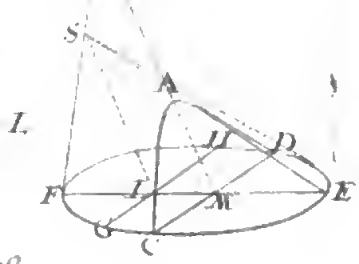
IL eſt une ſorte de corps régulierement irrégulier, dont on ne fait pas mention dans les élémens de Géométrie, mais dont il eſt néceſſaire d'examiner les propriétés dans ceux de la coupe des pierres, parce que rien n'eſt plus fréquent dans les bâtimens que certaines petites voutes qu'on appelle *arrieres vouſ-*

Planche 2.

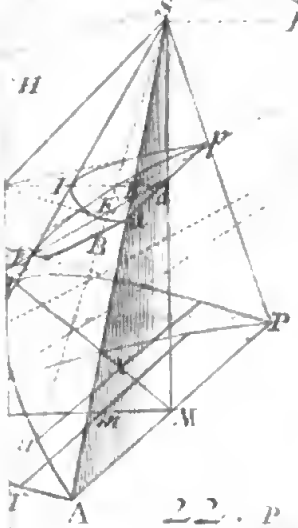
17.



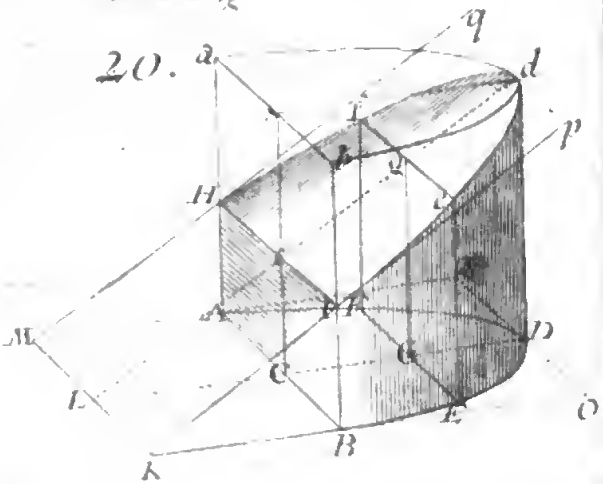
18.



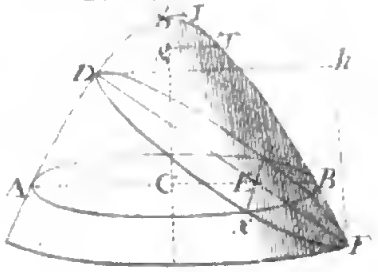
19.



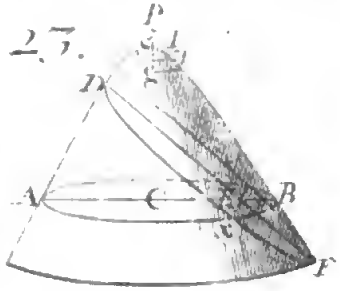
20.



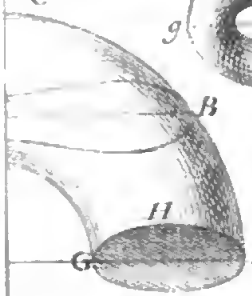
22.



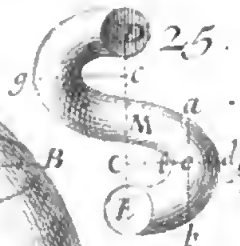
23.



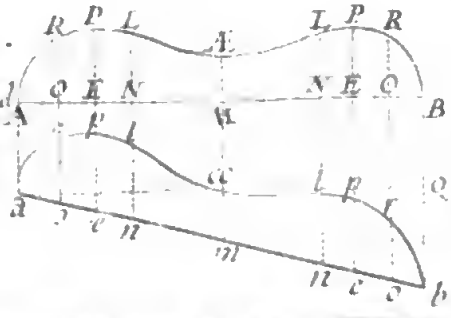
24.



25.



26.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

ſures reglées & bombées dont la ſurface concave eſt préciſément la même que la convexe du ſolide que nous appellons ici *coin-conoïde*; en voici la génération.

Soit un parallelogramme ABED, ſur un côté duquel AB eſt élevé à angle droit, un cercle AHBF, dont AB eſt le diametre. Si l'on ſuppoſe une ligne droite HM qui s'appuye par un bout H ſur la circonférence du cercle, & par l'autre ſur la ligne droite DE, qu'on la faſſe mouvoir ſur ces deux appuis de A par H en B, & de D en E; enſuite par-deſſous de B par F en A; puis encore par l'autre B, de E en D, elle parcourera en l'air la ſurface d'un corps arrondi par un bout comme un cone, & par l'autre en angle aigu, comme un *tranchant* de coin; d'où nous avons crû devoir 1°. appeller cette figure un *coin-conoïde*; 2°. le cercle de la baſe AHBF, *tête* du coin; 3°. la ligne CM paſſant par ſon centre (c'eſt le milieu M du *tranchant* DE) *l'axe du coin*; 4°. Le plan ADEB, paſſant par le même centre C & le tranchant DE, le *parallelogramme par l'axe*. 5°. Le plan qui lui eſt perpendiculaire, paſſant par le même axe, le *triangle par l'axe* HEM. Pl. 2. bis. Fig. 1.

Il ſuffira pour notre objet de conſidérer ſeulement la moitié de ce corps qui eſt analogue à quelques-unes de nos voutes, & les propriétés des lignes courbes qui terminent les ſections que peuvent y faire des plans qui ſont ſuppoſés le couper en différentes parties & ſituations.

THEOREME VII.

Premiere ſection.

Si le coin-conoïde eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe, & parallele à un de ſes côtés, la ſection ſera un triangle rectangle, comme CHM, ORN, dont le plus grand ſera celui qui paſſe par cet axe, & la plus grande des ordonnées au demi-cercle CH, d'où ils diminuent de part & d'autre, dans le rapport des autres ordonnées OR, *or*, parce qu'étant tous de même longueur CM, ON, ils ſont entr'eux comme leurs baſes OR, *or*, juſqu'à ce que la ligne génératrice HM vienne ſe confondre avec celle des côtés AD ou BE, où la ſection triangulaire s'évanouira. Fig. 3.

Pl. 2. bis. Fig. 3. Cette propoſition n'a pas beſoin d'autre démonſtration que celle de la définition de la génération de ce corps, puiſque les ſections faites dans les plans du cercle de la *tête* & du *parallelogramme par l'axe*, par un troiſieme plan qui les coupe, ſont évidemment des lignes droites, & que la troiſieme ſurface qui eſt courbe, a été ſuppoſée formée par le mouvement d'une ligne droite, changeant continuellement d'inclinaiſon, mais toujours dans un plan parallele à l'axe du coin-conoïde.

THEOREME VIII.

Seconde ſection.

Si le plan coupant le coin-conoïde eſt perpendiculaire au parallelogramme par l'axe, & parallele au cercle de la tête du coin, la ſection ſera une ellipſe.

Pour démontrer cette propoſition avec moins de confuſion de lignes dans la figure, il ſuffira d'y tracer la moitié de notre moitié du coin c'eſt-à-dire, le quart du complet, comme l'on Fig. 2. en voit un à la Fig. 2, parce que l'autre moitié ſera toûjours égale à celle-ci.

Fig. 4. Soit (*Fig.* 4.) le rectangle CMEB, la moitié du parallelogramme par l'axe & le quart de cercle CAB, celui de la tête du coin perpendiculaire à ce rectangle, & GLH la ſection faite par un plan qui lui eſt parallele; je dis que la courbe H *x y* L qui la termine eſt une *ellipſe*.

Car ayant elevé à volonté des ordonnées au demi diametre CB, en OR, & *o r*, & tiré par les points O & *o* des lignes ON, *o n* paralleles à CM ou BE qui couperont le demi-diametre GL en P, & *p*, ſi l'on éleve par ces points G, P, & *p* des perpendiculaires à GL, & que des points A, R, *r* de la circonférence de la *tête* on tire des lignes droites aux points M, N, *n*, elles couperont ces perpendiculaires aux points H, *x*, *y*, qui feront à la circonférence d'une ellipſe, comme il eſt aiſé de le démontrer.

A cauſe des triangles ſemblables MCA, MGH, on aura MC. CA :: MG. GH, & par la même raiſon NO. OR :: NP. P *x*, & encore *n o*. *o r* :: *n p*. *p y*; mais MC = NO = *n o* & MG = NP = *n p*, donc CA. GH :: OR. P *x* :: *o r*. *p y*, donc les or-

données à l'axe de la courbe, ſont entr'elles comme les ordonnées au diametre du cercle, ce qui eſt une propriété de l'ellipſe ; donc cette ſection eſt une ellipſe, *ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 2. bis. Fig. 4.

COROLLAIRE I.

Cette démonſtration convient à toutes les poſitions de lignes paralleles à CB entre C & M ; mais il eſt viſible que toutes les ellipſes ſeront d'inégale hauteur, à meſure que le plan coupant s'approchera de C, elle s'arrondiront de plus en plus ; & au contraire plus il s'approchera de la ligne ME, plus la courbure du contour s'applatira ; en ſorte que ſi elle en approche infiniment, le petit axe *g h* ſe réduira à un point, & la courbe s'évanouira en ligne droite, égale à ME du tranchant.

COROLLAIRE II.

Si la courbe de la tête du coin-conoïde que nous avons ſuppoſée en demi-cercle, étoit ſeulement un ſegment de cercle ou une demi-ellipſe ſur ſon petit axe, la ſection ſeroit encore un ſegment d'ellipſe ou une demi-ellipſe ſemblablement poſée.

COROLLAIRE III.

Mais ſi la tête étoit elliptique d'une moitié qui eut ſon grand axe en hauteur, il ſe trouveroit une ſection circulaire entr'elle & la ligne du tranchant ME, ſuppoſant toujours le plan coupant perpendiculaire à celui du parallelogramme par l'axe & parallele à celui de la tête, au-delà duquel en tirant vers le tranchant ME, les ſections elliptiques auroient leurs axes en poſition contraire à ceux de la tête, c'eſt-à-dire, le grand ſur le plan du parallelogramme par l'axe, & le petit en hauteur, comme dans le premier cas, dans le triangle par l'axe du coin-conoïde CAM ; au lieu que dans cette derniere ſuppoſition, la moitié du grand axe eſt dans ce triangle, & le petit dans le plan du parallelogramme par l'axe ; ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir, en faiſant attention que depuis la ſection circulaire qui ne ſeroit pas ſur la ligne CB, mais en-dedans vers ME, la ligne du ſommet MA s'éleveroit d'autant plus au-deſſus du ſommet A que la ſection ſe feroit au-delà de CB en-dehors. Fig. 4.

Digitized by Google

Troiſieme ſection.

Pl. 2. *bis.* *fig.* 5. Si le plan coupant n'eſt ni parallele aux côtés du parallelogramme par l'axe MC du coin, ni au demi-cercle de la tête AHB, mais incliné à l'un & à l'autre, enſorte cependant qu'il ſoit toûjours perpendiculaire au plan de ce parallelogramme, il ſe formera des ſections qui ne ſeront plus ni circulaires ni elliptiques, ni d'une courbure uniforme de part & d'autre du milieu de leurs axes, mais plus arrondies ou enflées d'un côté que de l'autre, ſuivant les différentes circonſtances de ce plan coupant; ſçavoir,

1°. Lorſque le plan de ſection coupe les deux côtés oppoſés du parallelogramme par l'axe, & qui lui ſont paralleles ſans les prolonger au-dehors du coin, comme IK (*Fig.* 5.)

2°. Lorſqu'il ne coupe qu'un de ces côtés, & le tranchant *Fig.* 6. DE, comme AT (*Fig.* 6.)

3°. Lorſqu'il coupe le tranchant DE & la tête du coin AB, *Fig.* 7. comme ZK (*Fig.* 7.)

Fig. 8. 4°. Lorſqu'il ne coupe les côtés oppoſés que hors du coin, en les prolongeant tous deux comme KML (*Fig.* 8.)

Fig. 5. *Premier cas.* S'il coupe les deux côtés oppoſés comme en IK; il ſe formera une courbe à la ſurface de la ſection du coin, dont le contour ſur la moitié de l'axe IV ſera plus arrondi que celui de l'ellipſe paſſant par le même point V de l'axe du coin; & l'autre ſur VK ſera plus applati & deviendra aigu en K, d'autant plus que ce point approchera du point E du tranchant.

Car ſi l'on ſuppoſe une ſection elliptique GL parallele (comme il a été dit ci-devant (à la *tête* AB, on reconnoîtra que les deux plans de ces ſections ſur IK & GL qui ſont leur axe, ſe couperont ſuivant une ligne V*h* qui ſera perpendiculaire commune à ces deux axes, & au plan du parallelogramme par l'axe du coin (par la 19. du 11. Livre d'Euclide) dont elle ſera une ordonnée commune à ces deux ſections elliptique & oblique. Cela ſuppoſé il ſera aiſé de démontrer que toutes les ordonnées à la moitié de l'axe oblique IV, ſeront plus grandes que celles de la moitié de l'ellipſe GV du même côté, car la ſection triangulaire NRO ſera coupée par les deux plans des au res ſections G*h*L, & I*h*K qui auront auſſi dans leurs interſections des perpendiculaires communes Q*x*, P*d*, terminées par

la ligne NR qui s'éleve du point *d* au point *x*, dans le rapport des longueurs des baſes des triangles ſemblables NQ *x*, NP *d*, ce qui ſera vrai de toutes les ordonnées à l'axe oblique de V en I, où l'on aura toûjours NQ. Q *x* :: NP. P *d*; mais NQ eſt plus grand que NP, dont Q *x* eſt plus grand que P *d*. Pl. 2. bis. Fig. 5.

Tout au contraire, dans la moitié de la courbe de *h* en K, les ordonnées à la partie VK de l'axe oblique, ſeront plus courtes que celles de l'ellipſe, parce qu'elles approchent plus du tranchant DE, où le coin ſe réduit à un angle très-aigu, & l'on trouvera de même dans les ſections triangulaires coupées par les plans elliptiques & obliques, une pareille analogie, *np*. *nq* :: *pe*. *qy*; mais *np* eſt plus grand que *nq*, donc *pe* eſt plus grand que *qy*; *ce qu'il falloit démontrer.*

Donc la moitié de la ſection oblique qui approche le plus de la tête du coin, eſt plus arrondie & enflée à meſure qu'elle s'en approche, & plus applatie & angulaire par le côté oppoſé; donc elle n'eſt ni circulaire ni elliptique, car la partie inférieure du coin-conoïde *complet* ſeroit égale à celle des mêmes côtés; ce qui n'arriveroit pas à une ellipſe dont IK ne ſeroit pas un axe, mais un diametre, parce qu'alors l'enflure de la partie ſupérieure vers I ſe trouveroit tournée dans l'inférieure vers K, ce qui n'arrive point ici, puiſque la courbe y eſt également reſſerrée comme au-deſſus.

On a ſuppoſé ici que les différences des longueurs NQ & NP d'un côté, & *nq* & *np* de l'autre étoient connues, parce que la meſure de l'obliquité eſt néceſſairement connue par les longueurs GI, LK & un point donné, par exemple Q, dans l'axe IK, ſur lequel on veut déterminer une ordonnée Q *x*, relative à celle de l'ellipſe P *d*, ſur la ligne NO parallele à l'axe CM du coin-conoïde. On aura donc les triangles ſemblables VGI, VPQ, d'où l'on tirera l'analogie VG. GI :: VP. PQ, que l'on cherche pour l'ajouter à NP, & avoir la longueur totale NQ, ſuppoſée connue dans les analogies précédentes. Par le même raiſonnement on aura de l'autre côté les triangles ſemblables VKL, V *qp*, qui donneront VL. VK :: V *q*. *qp*, que l'on cherche pour l'ôter de *np*, & avoir la longueur *nq* qu'on a employée pour trouver les différences des ordonnées de l'ellipſe avec celles de la courbe oblique, *ce qu'il falloit faire & démontrer.*

Second cas de la ſection oblique. Si le plan coupant (toujours Fig. 6.

Pl. 2. bis. Fig. 6. ſuppoſé perpendiculaire au parallelogramme par l'axe) n'en coupe qu'un côté parallele à cet axe, & l'autre adjacent, comme le tranchant DE par exemple en T, la ſection ſera encore de la même eſpece que la précédente, avec cette différence qu'elle devient plus aigue, & que ſi l'on ſuppoſe un autre coin-conoïde oppoſé au ſommet du premier, comme on ſuppoſe des cones pour trouver les propriétés de certaines ſections coniques, & qu'on prolonge le plan de la ſection en Z, juſqu'à ce qu'elle rencontre le côté BE prolongé, il ſe feroit une ſection concave, enſuite de la convexe, par une tranſition inſenſible ſans jarret dans le rebrouſſement, comme on voit dans la Figure 6 en T z Z.

La maniere de trouver autant de points que l'on voudra dans le contour de cette ſection, eſt toûjours la même que dans la précédente, qui eſt de prendre ſur l'axe AT, tel point que l'on voudra pour y élever une ordonnée, & mener par ce point (par exemple Q) une parallele ON à l'axe CM du coin, qui formera les triangles ſemblables TAD, TNQ, & donnera les analogies ſuivantes TD. : TA : TN. TQ :: TM. T *q*, & enſuite comme ci-devant, à cauſe des triangles ſemblables NOR, NQ *x*, MCH, M *q* Y; on aura NO. OR :: NQ. Q *x* qu'on cherche, ou MC. CH :: M *q*. *q* Y, ce qui donne les points *x* & Y à la circonférence de la courbe A *x y* T.

Nous parlerons ci-après de la ſection qui ſe feroit hors du coin-conoïde, s'il y en avoit un ſecond oppoſé au ſommet.

Fig. 7. *Troiſieme cas* de la ſection oblique. Lorſque le plan coupe un des côtés du parallelogramme par l'axe, & le plan du demi cercle de la tête, alors cette ſection FK eſt bien de la même eſpece que les précédentes, mais *incomplete*; je veux dire que ſa circonférence n'atteint à ſon axe que d'un côté, & non pas de l'autre où elle eſt terminée à celle du demi-cercle de la tête, que le plan de ſection coupe ſuivant l'ordonnée FS, commune aux deux contours. Les points de cette courbe ſe trouveront comme dans le cas précédent, par les triangles ſemblables FBK, F *o p*, FCP, dans le plan du parallelogramme par l'axe du coin, & les ſections triangulaires MCH, N *o r* qui couperont le plan de la ſection ſuivant les ordonnées communes à la ſection oblique P *x*. *p y*; ce qu'il eſt inutile de repeter.

Nous avons dit que cette ſection étoit incomplete; ſi l'on veut ſçavoir ce qui lui manque pour revenir à ſon axe, il n'y a qu'à prolonger

prolonger KF en Z, jusqu'à ce qu'il rencontre le côté DA prolongé jusqu'au point d'intersection Z; alors on peut comparer cette prolongation aux ordonnées du cercle dans la partie ASF, comme l'on a comparé pareille section avec l'ellipse dans la cinquiéme figure, en supposant le coin-conoïde prolongé en avant de sa tête AHB. Pour trouver par exemple l'ordonnée G*g* en dehors par le point donné *g*, on tirera *g q* parallele à AD qui coupera le diametre AB en T, par où ayant élevé TV = TS, on tirera *q* VG qui coupera en G sa parallele *g* G ordonnée à la courbe ZGVK que l'on cherche; d'où il suit que la courbe oblique sera plus haute que le cercle, & plus enflée à mesure qu'elle avancera vers Z, c'est-à-dire que les ordonnées excéderont de plus en plus celles du cercle, ainsi qu'il a été démontré dans le second cas de la section oblique. Pl. 2. bis. Fig. 7.

Quatrieme cas. Lorsque le plan coupant ne coupe aucun des côtés paralleles à l'axe du coin, mais ceux de la tête & du tranchant, il est visible que ce cas est un composé du second & du troisieme exprimés dans les Fig. 6 & 7, la section est angulaire comme dans le second, & incomplete comme dans le troisieme, & cette section incomplete a sa circonférence d'autant plus approchant de la ligne droite que le plan coupant approche du paralleliſme de l'axe du coin, ce qui est évident. Fig. 6. & 7.

Pour résumer tout ce que nous avons dit ci-devant des sections obliques, & mettre sous les yeux les différentes courbes qui en proviennent, nous supposerons deux coins-conoïdes opposés au sommet sur un même axe prolongé CMX; & pour rendre la figure plus simple, nous ne tracerons qu'une moitié de chacun des parallelogrammes par l'axe commun de ces deux coins ADMC & MEB*c*, sur les côtés desquels CA & B*c* on tracera le quart de cercle AH, représentant celui de la tête, qui doit être supposé à angle droit sur les plans de ces parallelogrammes, ce qu'on ne peut exprimer dans la figure, de même que son opposé B*h*. Fig. 8.

Si l'on suppose ces parallelogrammes coupés par des plans qui leur soient perpendiculaires, mais tournés différemment & obliquement à l'égard de l'axe commun C*c*, (comme sont les lignes 2^1, $20'$, 1, 21) AB, KL, passant toutes par le milieu M du tranchant commun DE, on pourra transporter toutes les longueurs de ces lignes sur l'axe commun, comme M 2 en M 12, M 1 en M 11, MA en M*a*, & MK en M*k*; & par les

Pl. 2. bis. Fig 6. & 7. moyens qui ont été donnés ci devant, on tracera les courbes ſur les axes AM, 1M, 2 M comme dans le cas de la Figure 6, & KM qui excede la longueur du coin-conoïde ADMC, comme dans le cas de la Fig. 7, en prolongeant les lignes MP & DA, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en K. On en fera autant dans l'autre moitié du coin-conoïde oppoſé, & l'on aura les courbes $kZYMyl$; $axMxb$; $11xMz\,1^d$; $12yMz\,2^d$, qui exprimeront toutes les courbes des ſections faites par des plans obliques à l'axe ſuivant les angles donnés AMC, 1MC, 2MC, pMC; & ſi l'on double les courbes au-deſſous de l'axe, comme MVlyM, on aura les ſections du coin-conoïde entier, leſquelles étant jointes enſemble & raſſemblées, forment la figure de ces cordons noués qu'on appelle *lacs* d'amour. Ce qui n'eſt ici qu'une pure curioſité, à laquelle nous ne devons pas nous arrêter.

Quatrieme ſection du coin-conoïde.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que ce ſolide étoit coupé par des plans toûjours perpendiculaires à celui du parallelogramme par l'axe, mais inégalement obliques à la direction de cet axe ou des côtés, ce qui revient au même.

Préſentement nous ſuppoſons que le plan coupant eſt parallele à celui de ce parallelogramme plus ou moins éloigné d'un intervalle pris à volonté, & nous cherchons quelle eſt la courbe qui termine la ſection à la ſurface du coin, dont le contour eſt différent du cercle & de l'ellipſe, & de toutes les précédentes, & dont on trouvera autant de points que l'on voudta par le calcul, ou avec le compas. Soit ACMD la moitié du parallelogramme par l'axe du coin CM, & AHCMD le quart du corps entier, ce qui nous ſuffit, parce que les trois autres lui ſont égaux, pour éviter la confuſion des lignes dans la figure.

Fig. 10.

Ayant placé un point G ſur le rayon CH perpendiculaire au plan du parallelogramme par l'axe CD, à la hauteur donnée CG au-deſſus de ce plan, on menera GF parallele à CA qui coupera e s ordonnées au rayon AC, comme OR en P, & or en p, & paſſera par le ſommet d'une autre oF égale à CG. Si du point G on tire une parallele GZ à l'axe CM, elle coupera le côté HM de la ſection triangulaire par l'axe du coin au point Z qui ſera un de ceu xde la courbe cherchée.

Par la même conſtruction (ſuppoſant la préparaion de la

figure comme dans toutes les précédentes) on tirera une parallele au même axe, ou à ſa parallele ON par le point P, où la ligne de hauteur FG du plan coupant, croiſe l'ordonnée OR. Cette parallele P*y* coupera le côté du coin RN au point *y* qui eſt un ſecond point de la courbe cherchée; on tirera de même par le point *p* d'interſection des lignes FG de hauteur du plan, & *or* ordonnée dans le quart de cercle qui coupera le côté *r n* de la ſection triangulaire *o r n* au point *x* qui eſt un troiſieme point de cette courbe, ſur laquelle on en trouvera autant qu'on voudra, en multipliant les ordonnées & les ſections triangulaire par ces ordonnées, comme il a été dit ci-devant. Pl. 2. bis. Fig. 10.

Par où l'on voit que cette ſection differe des obliques à l'axe; en ce qu'elle ne peut jamais devenir anguleuſe, comme celles dont nous avons donné la deſcription.

De la conſtruction de cette courbe avec la regle & le compas qui donne toûjours des interſections de lignes droites, dont les points de rencontre ſont à la ſurface du coin-conoïde dans un plan parallelele au parallelogramme par l'axe, il eſt facile d'appercevoir ~~comment on peut trouver~~ par le calcul les points de la circonférence de la courbe demandée, à cauſe des triangles ſemblables qu'on y a fait CHM, GHZ; ORN, PR*y*, &c. qui donnent les analogies ſuivantes HC. CM :: HG. GZ, ce qui donne la ligne GZ qui ſera une ordonnée à GF, qu'on peut prendre pour axe de la courbe, & par conſéquent le point Z ſera un de ceux de ſa circonférence.

De même & par la même raiſon, on aura RO. ON = CM :: RP. P*y* & *r o*, *o n* = MC :: *r p*. *p x*, ce qui donne quatre points de cette courbe; ſçavoir, le point F donné par la ligne GF parallele à CA, & les trois *x y* Z qu'on vient de trouver.

En repetant cette courbe de l'autre côté du triangle par l'axe CHM, on aura la ſection toute entiere.

Il eſt viſible que ſi au lieu du point G donné pour hauteur du plan, on en avoit pris un plus bas en *g*, on auroit eu auſſi un point V plus près du parallelogramme par l'axe que donne la parallele *g* V à cet axe, & par conſéquent une circonférence de ſection plus étendue, mais qui ne ſeroit pas parallele à la précédente, à cauſe de la différence des inclinaiſons des côtés du coin pris ſur les ſections triangulaires, paralleles à la plus grande qui eſt par l'axe.

Pl. 2. bis. Fig. 10. On auroit pû chercher toutes les courbes des ſections obliques & de celle-ci, d'une maniere plus ſçavante, par le calcul analytique, qui eſt la clef des découvertes; mais la ſyntheſe eſt ordinairement plus utile aux arts, où la Géométrie linéaire repréſente mieux les objets à l'imagination, lorſque les figures ne ſont ni trop compliquées ni trop chargées de lignes pour les repréſenter.

Et pour montrer qu'on n'y perd rien pour ce qui concerne la pratique de l'art dont il eſt ici queſtion, je vais en tirer un exemple de la courbe de cette derniere ſection du coin-conoïde coupé par un plan parallele à celui du parallelogramme par l'axe: car ſoit nommé le rayon de la tête du coin $CH = CA = a$, la diſtance du centre C à l'ordonnée CO $= b$, la pareille $C\,o = c$, $F\,o = y\,q = \sqrt{a^2 - c^2}$, $RO = \sqrt{a^2 - b^2}$; $ON = CM = d$, à cauſe des triangles ſemblables on aura $OR . ON :: y\,q = FO . q\,N = y\,k$

$\sqrt{a^2 - b^2} . d :: \sqrt{a^2 - c^2} . d\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - c^2}$, donc $y\,k = q\,N = d\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - c^2}$, ce qu'il falloit trouver, c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier la longueur $CM = ON$ par la racine quarrée du rayon CA, & en ôter celle du quarré de la partie CO, & diviſer ce produit par le quarré du rayon, après en avoir retranché celui de l'abſciſſe $C\,o$, ce qui occaſionne une longue opération de chiffres en comparaiſon de la ſimple opération linéaire avec le compas, qui donne tout d'un coup $P\,y$, dont la longueur ôtée de $PK = ON$, donne la longueur $q\,N$ qu'on a cherché pour élever au-deſſus une perpendiculaire à la ligne ON égale à $o\,F$, qui donne à la ſurface du coin le point y de la ſection cherchée.

Il y auroit beaucoup d'autres curioſités à rechercher dans les différentes courbes de ce corps coupé par des plans; mais nous n'en voulons qu'à ce qui peut être utile à notre objet, qui eſt le *coin-conoïde reſſerré par le tranchant.*

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que la ſection du coin-conoïde par l'axe & le tranchant, étoit un parallelogramme, par conſéquent que ſes côtés étoient paralleles entr'eux; préſentement

nous le conſiderons comme reſſerré du côté du tranchant, de ſorte que la ſection plane par l'axe & le tranchant, eſt un trapeze ou iſoſcele, ou oblique, dont les côtés oppoſés ſont convergens comme a *d e b* de la figure 11 qui concourent en un point X, lequel eſt au-dehors ſur la ligne M *m* pouſſé juſqu'au-deſſous de la cinquieme figure. Pl. 2. *bis.* Fig. 11.

Nous avons de plus ſuppoſé dans toutes les figures, que notre coin étoit exactement la moitié du coin-conoïde entier, parce que la ſection plane formant le parallelogramme, paſſoit par l'axe, par conſéquent par le diametre du cercle de la tête.

Ici au contraire, nous ne ſuppoſons pas la ſection par l'axe, mais par une des cordes du cercle de la baſe, plus ou moins près du diametre AB, par exemple ici celle de 90 degrés.

Ces différences de ſuppoſitions en produiſent auſſi dans les ſections planes de ce corps.

Premierement en ce que les précédentes étoient des courbes tangentes aux perpendiculaires au plan du parallelogramme par l'axe, lorſque le plan coupant étoit parallele au cercle de la tête, ou qu'il ne coupoit point la ligne du tranchant; il n'en eſt pas de même ici, toutes ces courbes font avec de pareilles perpendiculaires des angles mixtes, ce qui en Architecture ne produit pas une tranſition inſenſible de la courbure de la voute à la rencontre des piédroits.

Secondement, que les ſections paralleles à l'axe ne ſont pas des triangles rectilignes, comme dans les cas précédens, mais des courbes comparables à celle de A *x* T de la ſixieme figure.

A cela près, on peut appliquer à cette eſpece de ſolide, ce que nous avons dit du premier; par exemple que les ſections des plans paralleles à celui de la tête, étoient des ellipſes ou des portions d'ellipſe proportionnelles au ſegment du cercle de la tête a H *b*, telle eſt *g z* L, par la ligne *g* L. Fig. 11.

On en appercevra facilement la raiſon, en conſiderant que toutes les parties de *g* L ſont diviſées proportionellement par les lignes tirées des points M *q* Q *b* de la corde a *b* du cercle de la tête, au point de contour X, hors de la figure, ſous la ligne AB de la cinquiéme Figure; par conſéquent que toutes les abſciſſes du ſegment circulaire & du ſegment d'ellipſe *g z* L ſont proportionnelles. Il eſt clair auſſi que toutes les ordonnées le ſont, en jettant les yeux ſur le profil de la Figure 12, qui repréſente les ſections triangulaires de ce corps.

Application à l'uſage, & remarque ſur une faute d'appareil dans le trait d'un Auteur moderne.

Pl. 2. bis. Fig. 11. La ſurface convexe du coin-conoïde étant préciſément la même que la concave des petites voutes appellées *arrieres vouſſures reglées & bombées*, comme nous l'avons dit ci-devant ; il ſuit que dans l'appareil on doit en imiter la ſurface comme la plus réguliere en ce genre. Or nous trouvons dans le Traité de la Coupe des Pierres de *la Rue* (Chap. 32. Planc. 22) une conſtruction qui en altere tellement la régularité, qu'on ne doit pas la propoſer aux appareilleurs.

Pour n'être pas trompé par le nom qu'il lui donne d'*arriere-vouſſure de Saint-Antoine ſurbaiſſée & reglée*, il eſt à propos d'obſerver que celle dont il traite n'eſt point concave du devant au derriere en coquille, comme l'annonce le nom de *Saint-Antoine*, mais qu'il s'agit de celle dont nous traitons, dont la doële ſe fait à la regle du devant au derriere, & non en arc concave.

Cela ſuppoſé, il faut diſtinguer deux cas dans cette voute ; l'un lorſqu'elle eſt établie ſur deux piédroits paralleles entr'eux.

L'autre, lorſqu'ils ſont ébrazés, c'eſt-à-dire, ouverts en-dedans du côté du bombement, & convergens au côté oppoſé vers le tranchant du coin.

Dans le premier cas, les projections de joint de lit des vouſſoirs doivent être paralleles, comme on l'a vû dans les démonſtrations précédentes.

Dans le ſecond ils doivent être convergens, comme nous venons de le dire du coin conoïde reſſerré vers le tranchant, & concourir au même point que les directions des piédroits ; par exemple en X hors de la Figure 11 où ce corps eſt repréſenté, (lequel point X eſt ſous la ligne AB de la cinquiéme Figure) où aboutiroient les lignes *qt*, QT, ſi elles étoient prolongées, ainſi que les côtés *ad*, *be*.

Cependant M. de la Rue, ſans égard à cette différence, dans la Figure 22 de ſon Livre, a fait les projections des lits des vouſſoirs paralleles à l'axe du milieu de ſon épure & en lignes droites, comme ſi les piédroits n'étoient pas ébraſés, d'où il ſuit qu'il forme par cette conſtruction la ſurface d'un coin-conoïde de la premiere eſpece, tel qu'il eſt repréſenté à la Fi-

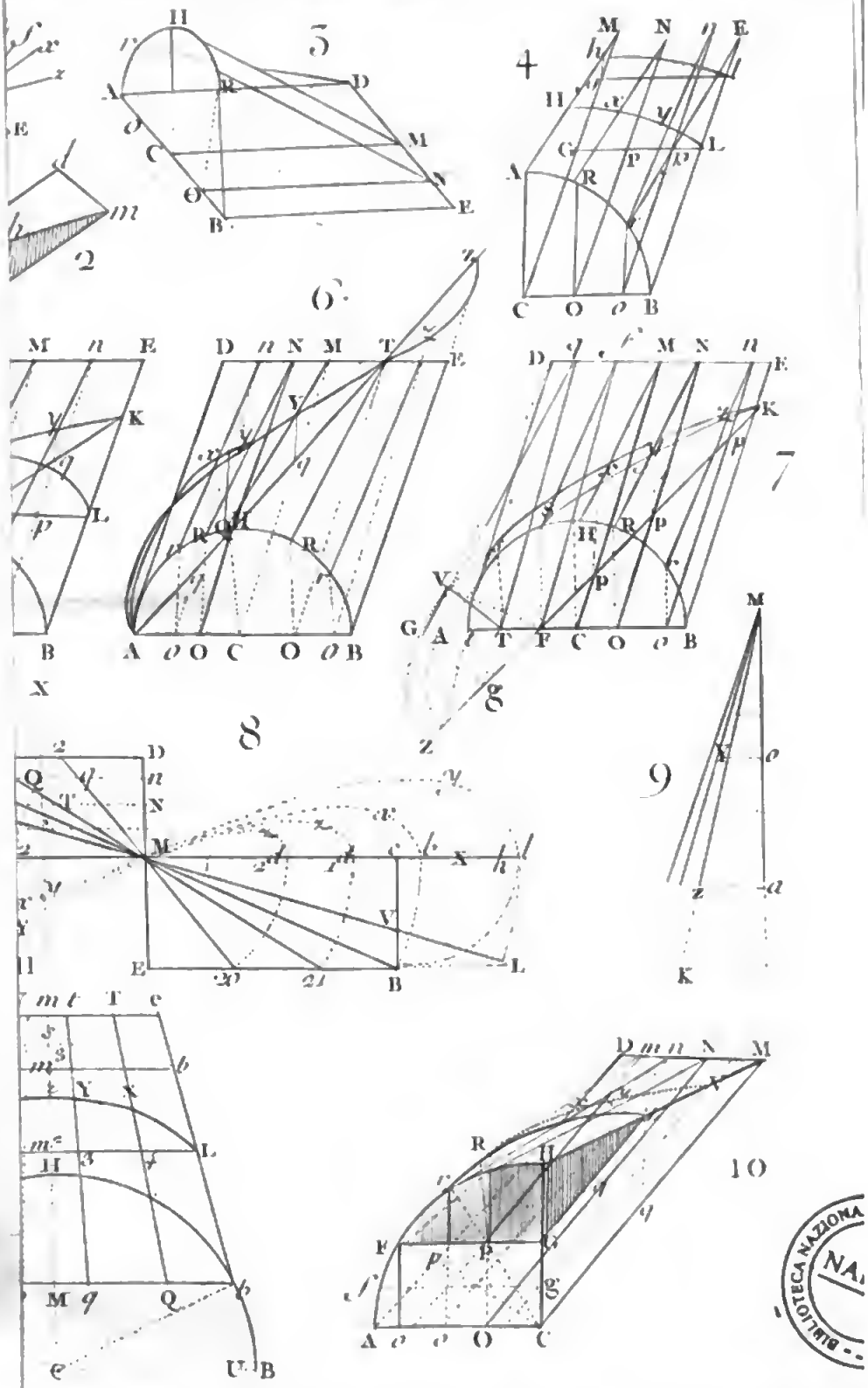
gure 6, & dont le tranchant eſt coupé de même par un plan oblique ſur AT, qui fait dans le coin une ſection courbe A x T. Pl. 2. bis. Fig. 11.

Ainſi conſidérant de même le parallelogramme a q t D (*Fig.* 11) formé (comme le coin de la Fig. 6) on reconnoîtra que le plan du piédroit a *d* coupant le coin obliquement ſuivant cette ligne, il doit y faire une ſection courbe a *f d*, & non pas droite comme la Rue fait la naiſſance a *d* de ſa voute; mais dira-t-on, comment le peut-il? La réponſe eſt facile; c'eſt au préjudice de la régularité de la ſurface du coin-conoïde, ou ſuppoſant vers le milieu une ſection parallele à la face a *b* dans la moitié a D *m* M; par exemple en GL, elle ſera un arc d'ellipſe G *x y z*, que le piédroit a *d* coupe au point *g* de ſa corde, ſur lequel élevant une perpendiculaire *g k* qui coupera l'ellipſe G *x z* en *k*, on reconnoîtra que la courbe de la ſection oblique ſera élevée ſur *g* de la hauteur *g k*. C'eſt ce point *k* que *la Rue* abaiſſe en *g*, d'où il retranche de l'ellipſe naturelle la partie G *k g*, & fait par un arrondiſſement de *g* en *x*, qui eſt un point déterminé par ſon joint de lit p d, un raccordement irrégulier avec le contour de l'ellipſe *x y z* qui corrompt l'uniformité de la ſurface du coin-conoïde, & par cette raiſon eſt à rejetter, quoique cette défectuoſité vienne en diminuant vers a & *d*, où la courbe retombe ſur l'impoſte.

Nous avons comparé juſqu'ici le coin-conoïde aux arrieres-vouſſures reglées & bombées; mais ſi nous n'en conſidérons qu'une partie tronquée vers le tranchant, comme par exemple (à la Fig. 5) le tronc AHBL *i* G, nous y trouverons le parfait modele d'une voute en berceau irrégulier, aſſez commun aux montées ou deſcentes des bâtimens, où l'on eſt obligé de paſſer ſous quelque partie trop baſſe pour pouvoir continuer le ceintre plein, c'eſt-à-dire en demi-cercle à ſon entrée ou ſortie. J'ai préſidé à la conduite d'une pareille voute dans une place fortifiée, où il falloit monter au rampart ſous une plate-forme un peu baſſe au débouché, de ſorte que le ceintre d'entrée étant circulaire, il fallut faire celui de ſortie elliptique fort ſurbaiſſée, ce qui a occaſionné dans l'appareil une difficulté qu'on n'apperçoit point en voyant l'ouvrage exécuté, & ſubſiſtant actuellement. C'eſt que tous les vouſſoirs ſont *gauches* en particulier, & inégaux en largeur & hauteur, bien alignés d'un bout à l'autre, pour paſſer inſenſiblement du plein ceintre au ſurbaiſſé. J'en ai

Pl. 2. bis. donné le trait à la fin du second Tome (*Fig.* 233) Liv. IV. Chap. X. dans le premier Corollaire du XXIIIe. Problême. Nous ne pousserons pas plus loin la Théorie des sections planes, croyant en avoir dit assez pour les besoins de la Coupe des Pierres; c'est pourquoi nous passerons à la seconde Partie de ce premier Livre, où nous tâcherons de connoître les sections que nous appellons *solides*, parce qu'elles sont faites par la pénétration des corps.

SECONDE



BIBLIOTECA NAZIONALE

Digitized by Google

SECONDE PARTIE
DU PREMIER LIVRE.

Des Sections faites à la ſurface des corps par la pénétration d'autres corps.

LES Sections planes dont nous venons de parler ne conviennent qu'aux ceintres des voutes ſimples, qui n'ont qu'une ſurface principale uniforme, & terminée par des plans; mais dans les voutes compoſées, qui ſont contigues & liées avec d'autres, il ſe fait à leur rencontre des angles & des courbes, qui les diviſent par des ſections tantôt planes tantôt *ſolides*, je veux dire, qui ne peuvent être formées que par la pénétration des ſolides, leſquelles ne ſont pas dans une ſurface plane; ces dernieres ſont preſque les plus ordinaires, & parce que nous ne pouvons les connoître ſans les rapporter à des corps réguliers, dont les voutes ſont des imitations parfaites, nous allons examiner les ſections ſolides des ſpheres, cones & cylindres, qui ſe pénetrent mutuellement.

Premierement. Les ſections faites à la ſurface d'une ſphere, pénétrée par une autre ſphere, par un cylindre, ou par un cone.

Secondement. Celles des cylindres par d'autres cylindres, & par des cones.

Troiſiemement. Des cones par d'autres cones, ſitués différemment entr'eux.

Nous avons touché légerement les ſections planes de ces corps, parce qu'on ne manque pas de livres qui en traitent amplement; nous nous ſommes contentés d'en dire ce qui étoit indiſpenſablement néceſſaire à notre ſujet; mais parce qu'il n'en eſt pas de même de leurs ſections *ſolides*, c'eſt-à-dire, qui ſont

faites par la pénétration mutuelle des mêmes corps, nous en étendrons un peu davantage la Théorie.

En effet, ſi peu d'Auteurs en ont traité qu'elles n'ont pas même de noms particuliers; le P. COURSIER dans un opuſcule Latin, qu'il ſemble avoir fait pour l'Optique, eſt le premier que je ſache, qui en ait parlé: il les appelle *Curvitegæ*, c'eſt-à-dire, qui couvrent des ſurfaces courbes; mais comme cette expreſſion n'eſt pas uniquement propre à nos ſections, puiſqu'une ſurface plane en peut couvrir une courbe, comme un cercle couvre un ſegment de ſphere, un parallelogramme, celui d'un cylindre; j'ai cru que j'étois en droit de leur donner d'autres noms, pour éviter les périphraſes & les équivoques; je les tire du mot Latin *Imbrex*, qui ſignifie une tuile creuſe, à laquelle on peut aſſez bien les comparer, ou du moins la ſurface qu'elles renferment; il auroit été plus naturel de les comparer au cylindre, ſi je n'avois craint la confuſion des idées, ayant auſſi égard à la facilité de la compoſition des mots tirés *d'imbrex*. M. CLAIRAUT le fils, de l'Académie des Sciences, nous a donné un excellent traité des *Courbes à double courbure* en général, qui comprend celles dont il eſt ici queſtion, parmi pluſieurs autres de différentes eſpeces, dont il découvre les propriétés par l'Analyſe avec beaucoup d'art & de netteté; cet Ouvrage eſt d'autant plus digne d'admiration, qu'il a été la production d'un jeune homme de ſeize ans. Mais comme notre Stéréotomie n'eſt qu'un traité de Géométrie linéaire, j'ai cru que je devois donner une Théorie de même nature que les Problêmes de pratique, auſquels elle doit ſervir d'introduction; c'eſt pourquoi j'ai ſuivi une méthode tout-à-fait différente, croyant qu'elle deviendra plus utile aux gens qui ſe mêlent d'Architecture; c'eſt ce que je vais expliquer.

De la nature des Sections ſolides par la pénétration mutuelle des Spheres, cônes & cylindres.

DÉFINITION I.

PL. 3. Fig. 27. 75. SI par les extrêmités ST, du diametre d'un cercle SATB (*Fig.* 27) on fait paſſer une ligne courbe plane S*c*T, dont l'axe ſoit C*c*, ſuivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST,

s'abaiſſent ou s'élevent parallelement à elles-mêmes d'un mouvement uniforme, enſorte que leur milieu ſoit toûjours dans le plan ST *c*, la courbe S *g b* T, qui terminera la ſurface creuſe qu'elles auront formé par cet arrangement, s'appellera un *Cicloïmbre*, par abbréviation de l'expreſſion Latine, *circulus imbricatus*, cercle en façon de tuile creuſe.

Pour ſe former une idée nette de ce changement de poſition des ordonnées, il n'y a qu'à ſe repréſenter un cercle tracé ſur la tranche d'un livre dans la preſſe, lorſque le Relieur l'a coupée d'une ſection plane, ſi enſuite il la renfonce vers le milieu, comme il arrive lorſqu'il donne de l'arrondiſſement au dos, ce cercle qui étoit plan devient un cicloïmbre, parce que chaque feuille ſe reculant de ſuite plus ou moins, ſelon qu'elle eſt près du milieu ou des extrêmités de la tranche, forme l'eſpace d'une ſurface creuſe en façon de cylindrique, dont le contour n'eſt plus un cercle comme auparavant, mais une *courbe à double courbure*, ſçavoir une autour du centre, & une en profondeur ou éloignement du plan paſſant par les extrêmités du diametre ST.

COROLLAIRE I.

De cette génération il ſuit, 1°. que quoique la ſurface creuſe ou convexe du cicloïmbre ſoit plus grande que celle du cercle plan générateur, elle ne contient pas plus d'ordonnées, puiſque le nombre des feuilles, dans l'exemple de la tranche du livre, n'a pas augmenté en ſe reculant ou en s'avançant au-delà de ce plan, depuis les extrêmités ST, ce que l'on voit clairement dans la figure, par les paralleles qu'on a mené d'un côté aux lignes A *a*, C *c*, & de l'autre par les paralleles au diametre AB, qu'on ſuppoſe perpendiculaire au plan ST *c*. On voit ſeulement que ſuppoſant une ligne *c t* parallele & égale à CT, diviſée en parties égales, les lignes paralleles à la ligne C *c*, paſſant par ces diviſions, coupent la partie *c* T en parties inégales, quand même on les ſuppoſeroit infiniment petites.

Ce que nous diſons de l'axe courbe *c* T, auquel toutes les ordonnées ſont appliquées, eſt encore vrai à l'égard du contour à double courbure *a d* T, quoiqu'il ſoit plus grand que l'axe & le contour du cercle générateur ATBS, qui eſt ici repréſenté en perſpective, où l'on appperçoit une petite notion des merveilles de la Géométrie de l'infini.

COROLLAIRE II.

PL. 3. Fig. 7. Il suit en second lieu que les diametres, c'est-à-dire, les lignes droites menées d'un des points du contour de la courbe à double courbure à son opposé, passant par l'axe C*c* hors de la surface cylindrique comprise par cette courbe, sont égaux entr'eux, comme les diametres du cercle générateur. Ainsi *g d* est égal à GD, *a b* à AB, &c. parce que les points G & D, A & B étant mûs parallelement à l'axe C*c* à distances égales, il est clair que GD *d g* est un parallelogramme; par conséquent *g d* sera égal à GD.

Il faut remarquer que si la courbe S*c*T n'étoit pas uniforme, mais à différentes infléxions, ces diametres pourroient être inégaux, & alors la courbe ne seroit plus un cicloïmbre, parce que c'est de l'égalité de ses diametres que vient l'analogie du nom.

COROLLAIRE III.

On peut remarquer que de tous les diametres du cicloïmbre, il n'y en a qu'un, sçavoir *a b*, qui soit dans la surface cylindrique, comprise par son contour, lequel est celui qui passe par le sommet *c*, de la courbe S*c*T, perpendiculairement au plan de cette courbe; tous les autres sont hors de cette surface.

COROLLAIRE IV.

De ce que nous venons de dire, il suit que l'axe C*c* de la courbe, que j'appelle axe de *profondeur* S*c*T, coupe en deux également tous les diametres de la courbe du contour du cicloïmbre, plus ou moins loin de la surface cylindrique, selon qu'ils sont plus ou moins obliques au plan de la courbe S*c*T.

COROLLAIRE V.

Il est visible que si au lieu d'une seule courbe S*c*T, on en supposoit encore une seconde plus haut ou plus bas, au-dessus ou au-dessous du diametre ST, du même cercle générateur, il se formeroit deux cicloïmbres différens, qui auroient une profondeur inégale, mais dont le contour seroit à la surface du même cylindre, qui auroit pour base le cercle générateur ATBS;

puiſque tous les points de ces contours doivent être iſſus d'un de ceux du cercle générateur, mû parallelement à l'axe C*c* de la courbe de profondeur S*c* T.

DÉFINITION II.

76. Si au lieu d'un cercle générateur on ſuppoſe une ellipſe BDLE, dont les ordonnées ED, GH s'écartent ou ſe rapprochent de la même maniere que nous l'avons dit du cicloïmbre, non pas toûjours perpendiculairement à un axe BL de cette ellipſe, mais auſſi obliquement ſuivant un angle quelconque, comme BC*c* ou LC*c*, à peu près comme une chaîne lâche pendue aux extrêmités d'un bâton incliné à l'horiſon, la ſurface formée par l'arrangement de ces ordonnées, ſuivant une courbe ſemblable, ſera terminée par un contour courbe, que nous appellons une *ellipſimbre*, par abbréviation de l'expreſſion Latine *ellipſis imbricata.* *Fig. 28.*

La néceſſité de donner des noms à des courbes qui n'en avoient point, s'étend auſſi aux lignes qui leur ſont entielles; nous en conſidérons quatre principales, qui méritent d'avoir un nom propre parce que nous les nommerons ſouvent dans ce premier Livre.

DÉFINITION III.

77. Le diametre du cercle générateur, ou l'axe de l'ellipſe plane génératrice, qui paſſe par les points S & T, ou B, L, où la courbe touche le plan du cercle ou de l'ellipſe, s'appellera *axe ſouſtendant*; la ligne courbe S*c* T, ou B*c* L, qui eſt dans le même plan que cet axe, qui coupe la ſection en deux parties égales, comme S*c* T, ou B*c* L, s'appellera *axe courbe*; la ligne correſpondanre au diametre perpendiculaire à l'axe ſous-tendant, qui eſt le petit ou le grand axe de l'ellipſe, s'appellera l'*axe droit*; parce que quoique droit, il ſera tout à la ſurface de la ſection concave; tel eſt *ab* (*Fig.* 27.) & *de* (*Fig.* 28). La ligne C*c* qui eſt le plus au chemin que parcourt le centre C, dans l'abbaiſſement du diametre AB, ou DE en *ab*, ou *de*, s'appellera l'*axe de profondeur*, qui paſſera toujours par les deux centres de la ſection plane, & de la ſection courbe à double courbure par ſon contour. *Fig.* 27 & 28.

Les lignes qui paſſeront par cet axe, & ſe termineront à la circonférence de la ſection, s'appelleront *diametres*.

COROLLAIRE.

Fig. 18. 78. Puiſque l'axe de profondeur C*c* peut n'être pas perpendiculaire à l'axe ſous-tendant BL, il ſuit que le diametre droit *d c* de la ſection, peut n'être pas au milieu de l'axe courbe B*c* L, puiſque le point *c*, centre de la ſection, correſpondant au centre C de l'ellipſe génératrice, eſt évidemment plus près du point L que du point B; cependant le nombre des ordonnées de *c* en L, ſera toujours égal au nombre de celles qui ſont poſſibles de B en *c*; puiſqu'il ne peut y avoir un plus grand nombre de paralleles à C*c*, de B en C, que de C en L, ces deux diſtances étant ſuppoſées égales; l'exemple de notre tranche de livre, dont on arrondit le creux inégalement, peut ſervir à en concevoir la vérité, puiſque le nombre des feuilles n'augmente ni ne diminue dans tous les changemens de concavité ou de convexité que l'on peut faire à la courbure de cette tranche.

DÉFINITION. IV.

79. Si au lieu de ſuppoſer que les ordonnées de l'ellipſe plane génératrice d'une ſection ſolide, s'en éloignent d'un mouvement inégal, mais uniforme dans les parties correſpondantes, & ſans changer de grandeur, on ſuppoſe au contraire qu'en s'éloignant, elles ſe ralongent ou ſe racourciſſent proportionellement à leur diſtance de l'ellipſe plane, priſe ſur des plans convergens qui ont tous une commune ſection, cette figure auſſi concave comme une tuile creuſe, aura pour circonférence une courbe, que nous appellerons *ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire, qui imite en quelque choſe l'ellipſimbre.

COROLLAIRE.

80. Il ſuit de cette définition, que l'axe droit *d e* ne ſera plus égal à l'axe correſpondant DE de l'ellipſe plane génératrice, qui eſt conjugué à celui qui eſt l'axe ſous-tendant de l'axe courbe de la ſection, mais qu'il ſera plus grand ou plus petit: plus grand s'il eſt du côté oppoſé à la commune ſection des plans convergens, & plus petit s'il eſt du même côté, ce que nous

Digitized by Google

expliquerons plus nettement dans les ſections faites par la pénétration des cones.

DÉFINITION V.

81. Lorſqu'une courbe ſera compoſée de deux portions des courbes nommées ci-devant, ſoit cicloïmbre, ſoit ellipſimbre, ſoit ellipſoïdimbre, elle ſera dite *compoſée* de ces courbes.

Enfin on apppellera de ſemblables noms toutes les courbes leſquelles, ſuivant de pareilles loix, ſeront iſſues de figures planes paraboliques ou hyperboliques, dont les ordonnées à leurs axes s'écarteront d'une maniere uniforme de leur ſommet d'un côté ſeulement; car puiſque ces figures ſont ouvertes, les ſections courbes ne les toucheront qu'en un point, & non pas en deux, comme les précédentes.

CHAPITRE V.

Des Sections ſolides des ſpheres, & premierement, de leurs variations.

LEs ſections des ſpheres peuvent varier de pluſieurs manieres.

1°. Par la pénétration des ſpheres entr'elles.

2°. Avec les cylindres.

3°. Avec les cones.

La ſection commune à la ſurface de deux ſpheres qui ſe pénetrent ne peut varier, elle ne peut être que la circonférence d'un cercle; ſur quoi l'on peut remarquer que les ſections faites par la pénétration des ſolides, peuvent en certains cas, être auſſi des ſections planes.

Les ſections faites à la ſurface de la ſphere, pénetrée par un cylindre, peuvent varier de quatre manieres.

1°. Lorſque l'axe du cylindre paſſe par le centre de la ſphere, dans la ſuppoſition du cylindre droit.

2°. Dans le même cas, dans la ſuppoſition du cylindre ſcalene.

3°. Lorſque l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la

ſphere, & que cependant le cylindre y entre de toute ſa circonférence.

4°. Lorſque le cylindre n'entre dans la ſphere qu'en partie, à l'égard de ſa circonférence.

Enfin les ſections faites à la ſurface de la ſphere, par la pénétration du cone, peuvent varier d'autant de manieres que par le cylindre, ſuivant les mêmes circonſtances de poſition relative du centre de la ſphere, à l'égard de l'axe du cone, de celle de l'axe du cone ſur ſa baſe, & de la profondeur de la pénétration.

THEOREME VII.

La courbe qui réſulte de la ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux ſpheres qui ſe pénetrent, eſt la circonférence d'un cercle.

Soient les ſpheres ABD, BFD qui ſe pénetrent, de quelque grandeur qu'elles ſoient l'une à l'égard de l'autre, dont les centres ſont en C & E, ſoit auſſi la ſection telle qu'elle puiſſe être repréſentée par la courbe BHD, qui doit paſſer par les points B & D, communs aux deux ſpheres, puiſqu'ils ſont à l'interſection de deux cercles majeurs qui ſont dans le même plan, paſſant par les deux centres C & E, (*Fig.* 29, 30, 31) le diametre de cette ſection ſera la ligne BD, qui paſſera par ces points B & D communs aux deux ſurfaces, lequel par la différente poſition des ſpheres, paſſera ou entre les deux ſpheres, comme à la Figure 29, ou par un des centres, comme à la Figure 30, ou au-dehors des deux centres, comme à la Figure 31; de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera toujours la même. *Fig.* 29. 30. & 31.

Ayant tiré une ligne CE par les centres C & E, & pris à volonté ſur la courbe de la ſection un point H, on tirera des centres C & *c* des lignes CH, *ch*, & des points G & *g*. (*Fig.* 29 & 31) ou E (*Fig.* 30) où les lignes paſſant par les centres, coupent les diametres BD & *bd*, des lignes au même point H, comme GH, EH ou *gh*.

Il eſt évident, par la définition de la ſphere, que les lignes CB, CH, CD ſont égales entr'elles, étant des rayons de la ſphere ABD, de même que EB, EH, ED, (*Fig.* 29 & 30.) & *eb*, *eh*, *ed* (*Fig.* 31.); il eſt encore évident, que les lignes BD ſont coupées également & perpendiculairement en G, par la

la ligne qui passe par les centres C & E, dont les triangles CBE, CHE, CDE, qui ont le côté CE commun, sont égaux en tout, de même que les triangles CBG, CHG, CDG rectangles en G, qui ont le côté CG commun, & les hypotenuses CB, CH, CD égales entr'elles; donc les côtés GB, GH, GD, seront aussi égaux entr'eux; puisqu'ils sont d'ailleurs les perpendiculaires abbaissées des sommets des triangles égaux CHE, CBE, CDE; donc (par la 4. du 11. d'Eucl.) ces trois lignes sont dans un même plan, & les rayons d'un cercle dont les points BHD sont à la circonférence, qui est la commune section des deux spheres. *Ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 3.

La même démonstration est plus simple dans la Fig. 30, où les points E G sont confondus. *Fig. 30.*

Application à l'usage.

86. On connoît par cette proposition que le ceintre d'une voute sphérique, qui en rencontre une autre qu'elle coupe, est un cercle; par exemple, une niche qui est au-dessus de l'impoſte d'une voute sphérique, fait avec elle à l'arête d'*enfourchement* un demi-cercle parfait, supposé que l'une & l'autre de ces voutes ne soit ni surhaussée ni surbaissée, & que l'impoſte d'une calote de dôme renfoncée en cul de four au-dessus d'une voute sphérique, est encore un cercle, aussi-bien que celle de la premiere voute.

THEOREME VIII.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre droit, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est un cercle.

Soit la courbe AIBO, la section faite par la rencontre des surfaces de la sphere ABDE, & du cylindre LNGF, dont l'axe MH passe par le centre C de la sphere. Si du point I, pris à volonté à la circonférence de cette section, on tire au centre C la ligne IC, & que du milieu K de la ligne AB, qui est supposée passer par les points A & B, communs à la surface de la sphere & à celle du cylindre, on mene la ligne IK; on verra, comme dans la proposition précédente, que les triangles AKC, IKC, BKC, rectangles en K, qui ont le côté CK commun, & les côtés AC, CI, CB égaux, étant rayons de la même sphere, les *Fig. 32.*

côtés AK, IK, BK ſeront auſſi égaux entr'eux, & dans un même plan, dont ils ſeront les rayons d'un cercle dont les points AIB ſont à ſa circonférence; mais la ligne CK étant par la ſuppoſition une partie de l'axe du cylindre FLNG ſera auſſi perpendiculaire au même plan; donc la ſection commune à la ſphere ABDE, & au cylindre LNGF, ſera un cercle formé par la rencontre des ſurfaces de ces deux corps, *ce qu'il falloit démontrer.*

Application à l'uſage.

87. On voit par cette propoſition quel doit être le ceintre de la rencontre des voutes ſphériques avec les berceaux droits, dont les axes paſſent par le centre de la ſphere; tel eſt le puits d'une citerne voutée en cul-de-four, comme il y en a un à Phalsbourg, telle eſt la fenêtre à la clef de la voute du Pantheon à Rome; telles ſont les impoſtes des lanternes ſur les dômes dans la plupart des Egliſes modernes, les rencontres des nefs en berceau avec les chevets circulaires, voutés en quart de ſphere, ou d'une plus grande portion, ſi le diametre du ſanctuaire eſt plus grand que celui du berceau de la nef; ſuppoſé que l'une & l'autre de ces voutes ne ſoit ni ſurhauſſée ni ſurbaiſſée, & que la nef ne ſoit point biaiſe ſur le chevet, quoique la direction de ſon axe, c'eſt-à-dire de ſon milieu, paſſe par le centre de la portion de voute ſphérique; car pour peu qu'il y ait de biais, la ſection n'eſt plus un cercle, comme nous allons le démontrer.

THÉOREME IX.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre ſcalene, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt une ellipſimbre.

Soit la ſphere ABIH, pénetrée par le cylindre ſcalene KLGF, (*Fig.* 33.) dont l'axe X*x* paſſe par le centre C de la ſphere, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, il ſera deux ſections différentes; ſçavoir, le parallelogramme KLGF dans le cylindre, & le cercle SDE dans la ſphere, lequel ſera grand ou majeur, parce qu'il paſſe par le centre C, & dont les points A B, où ſe coupent ces deux figures, ſont communs aux deux ſurfaces de la ſphere & du cylindre, de même que les points I

[Fig. 33.]

& H de la ſection oppoſée, qui ſont ſur les côtés du parallelogramme, & à la circonférence du cercle en même-tems, & tous autres points que ces quatre ne pourront être que ſur une des ſurfaces des deux ſolides ; car s'ils ſont ſur celle du cylindre, ils ſeront au-dedans de la ſphere ; & s'ils ſont ſur celle de la ſphere, ils ſeront hors du cylindre, puiſque les arcs ADH BEI ſont au-dehors des côtés AH & BI. Si l'on imagine un ſecond plan perpendiculaire au premier, & qui paſſe par les points A & B, il coupera ces deux corps différemment du premier, & fera deux ſections différentes ; ſçavoir, un cercle A *e* B *l*, repréſenté ici en racourci de perſpective, dont le diametre ſera AB & qui ne ſera plus un grand cercle, mais un cercle mineur, parce qu'il ne paſſe pas par le centre C de la ſphere. L'autre ſection dans le cylindre ſera* une ellipſe A *d* B *k*, dont AB ſera le petit axe ; parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt une ellipſe, & que le diametre KL du cercle de la baſe KMLN, incliné au côté LG, eſt plus grand que AB qui lui eſt perpendiculaire. En effet, ſi on lui menoit une parallele A *r* par A, elle ſeroit l'hypotenuſe du triangle rectangle, A *r* B dont AB ſeroit une jambe ; or toute ſection qui n'eſt pas parallele à la baſe, & qui n'eſt pas ſous-contraire, eſt une ellipſe. Pl. 3. Fig. 33. *Art. 59.

Préſentement, puiſque le plan paſſant par AB fait deux ſections différentes, il eſt évident que ni l'une ni l'autre ne peut être commune aux deux ſurfaces ; en effet l'ellipſe du cylindre étant circonſcrite au cercle de la ſphere, avec lequel elle n'a de commun que les deux points A & B, eſt toute hors de la ſphere, & le cercle de la ſphere eſt tout au-dehors du cylindre, donc la ſection commune ſera une autre courbe qui ſera hors de ce plan, & qui n'aura de commun avec les deux planes, que les points A & B, cette courbe paſſera donc au-deſſus ou au-deſſous du plan coupant ces deux corps par AB. Dans cet exemple elle paſſera du côté du centre C de la ſphere, comme A *f* B ; parce que le diametre MN = *fi* eſt plus grand que AB. Il faut à préſent faire voir le rapport qu'elle a avec l'ellipſe A *d* B, pour démontrer qu'elle eſt une ellipſimbre, telle que nous l'avons défini ci-devant. Pour y parvenir il faut encore une préparation.

Quoique nous ayons déja ſuppoſé deux plans coupans la ſphere & le cylindre, l'un par l'axe X *x*, l'autre par les points A & B perpendiculairement au premier ; il convient encore d'en

Pl. 3. Fig. 33. imaginer au moins deux autres paralleles entr'eux & perpendiculaires aux premiers ; ſçavoir encore un par l'axe & le diametre MN de la baſe, & l'autre par l'ordonnée OPQ ; cette multiplicité de plans eſt un peu embaraſſante pour le lecteur, mais elle eſt inévitable pour la démonſtration des propriétés de la courbe que nous examinons, on peut s'aider l'imagination par des reliefs de papier ou de carton ; il ſera bon encore de ſe rappeller ici le onzieme & le douzieme Livre d'Euclide, parce que tout cet ouvrage ne roule que ſur les ſections & rencontres des plans; on ſentira la conſéquence de cet avertiſſement dans la ſuite, où quelque attention qu'on ait eu à rendre les figures intelligibles, on ne ſe flatte pas d'avoir pû repréſenter bien ſenſiblement en ſaillie, ce qui eſt à plat ſur le papier, c'eſt à l'imagination du Lecteur à relever les objets, & à les détacher du plan où ils ſont, pour les conſidérer où ils doivent être.

Soient donc deux plans paralleles à l'axe du cylindre, paſſant par les ordonnées MN, OQ, les ſections de ces plans dans la ſphere ſeront des cercles, dont *f S i* & *t s b* ſont des arcs, & des parallelogrammes dans le cylindre, dont M *d k* N & *u* OQZ ſont des portions, parce que M *d* & N *k* ſont paralleles, étant les côtés du cylindre, & MN & *d k* auſſi paralleles entr'elles, parce que les plans KML de la baſe, & A *d* B de la ſection par AB, ſont perpendiculaires au même plan AKLB, paſſant par l'axe X *h*; or puiſque la ligne MN eſt perpendiculaire à l'axe CX, c'eſt-à-dire au rayon CS prolongé, elle eſt parallele à la tangente qui paſſeroit par S de l'arc de cercle *f S i* & les lignes M *m* & N *n* étant paralleles à cet axe, & également éloignées de part & d'autre, les lignes M *f* N *i* rencontreront cet arc en des points *f* & *i*, équidiſtans de M & N (par l'Art. 39), donc la ligne *f i* ſera parallele à MN & à *d k*; donc *df* = *ki*, & *dk* = *fi*, c'eſt-à-dire, que l'ordonnée *d k* dans l'ellipſe A *d* B eſt égale à l'ordonnée de la ſection commune aux deux ſurfaces, qui paſſent par *f* & par *i*. On démontrera de la même maniere que l'ordonnée *u z* eſt égale à l'ordonnée *t b* de la ſection ſolide qui paſſe par *t*; donc toutes les ordonnées à l'axe courbe A *h* B de la ſection ſolide, ſont égales à toutes celles de l'ellipſe à l'axe AB, donc la ſection eſt une ellipſimbre ; *ce qu'il falloit démontrer.*

Pl. 3. Fig. 33.

COROLLAIRE I.

88. Puiſque le plan MN par l'axe X*x* du cylindre, coupe perpendiculairement l'axe ſous-tendant AB de la ſection, il ſuit que la plus grande ordonnée de l'ellipſe plane, qui eſt ici *dk*, s'abbaiſſe perpendiculairement à AB en *fi*, qui eſt l'*axe droit* de la courbe, & par conſéquent que cet axe eſt équidiſtant des extrêmités de l'axe ſous-tendant AB, ce qui n'arrive dans aucun cas que dans celui des cylindres ſcalenes.

COROLLAIRE II.

89. En ſecond lieu il ſuit que la plus grande profondeur ou diſtance de l'ellipſimbre à l'ellipſe plane, eſt à l'axe droit *fi*, parce que la plus grande diſférence *de* du diametre *el* du cercle de la ſphere A*e*B*l*, & de l'axe *dk* de l'ellipſe A*d*B*k*, eſt dans le plan de l'axe droit *fi*; or puiſque *de* ou L*k* eſt la plus grande diſtance qu'il puiſſe y avoir de la circonférence du cercle à l'ellipſe, la diſtance *df* ou *i*K ſera auſſi la plus grande qu'il puiſſe y avoir du plan A*d*B*k* à la courbe A*f*B*i*; & parce que cette différence des ordonnées du cercle à celles de l'ellipſe, au même diametre AB, diminue continuellement, il ſuit que la profondeur de l'ellipſimbre diminue auſſi depuis *f* juſqu'à B, où elle rejoint le cercle de la ſphere A*e*B*l*.

COROLLAIRE III.

90. Pour trouver cette profondeur ſur l'axe courbe de l'ellipſimbre, qui eſt dans le plan de l'axe ſous-tendant AB, il n'y a qu'à décrire les ſections que font les plans paſſant par les ordonnées parallelement à l'axe du cylindre, leſquelles ſont des cercles de la ſphere, dont les centres ſont tous ſur la ligne DE, perpendiculaire à l'axe X*x* du cylindre par le centre C, & dont les lignes CS & WS en exprimeront les rayons. Pour avoir les diſtances des côtés du cylindre au plan paſſant par ſon axe & par AB, il faut faire à part (*Fig.* 34.) l'ellipſe a*e*b*E*, ſur les axes donnés; ſcavoir, a*b* égal à AB de la Fig. 33, & E*e* égal au diametre KL de la baſe du cylindre ſcalene, dans laquelle on inſcrira le cercle a*d*b*D*, qui ſera égal à celui de la ſection de la ſphere par AB de la Fig. 33. Cette préparation étant faite, Fig. 34.

Fig. 36. on tirera à part une ligne CS, (*Fig. 36*) ſur laquelle prenant CS égal à CS de la Fig. 33. pour rayon, on décrira un arc indéfini S*f*, enſuite portant la diſtance S*g* de la Fig. 36, on élevera ſur ce point une perpendiculaire *g d*, ſur laquelle prenant *g e* égal au demi-diametre du cercle a *d b* D, c'eſt-à-dire à A*g* de la Fig. 33, on aura le point *e*, où la ſection plane coupe la ſphere; mais parce que ce point eſt au-dedans du cylindre, il faut porter en-dehors la diſtance DE de la Fig. 34, qui eſt la différence du demi-diametre du cercle & de l'axe de l'ellipſe. Si par ce point *d* on mene une parallele à CS, elle coupera l'arc *f* S au point *f*, qui ſera commun au côté du cylindre *d f*, & au cercle de la ſphere S *e f*; & par conſéquent à la circonférence de l'ellipſimbre; donc la ligne *d f* ſera la profondeur de cette courbe, au milieu à ſon axe droit, laquelle diſtance ſera égale à celle de l'axe courbe à l'axe ſous-tendant, dont l'un paſſe par *g* & l'autre par *h*; puiſque les ordonnées *d g* de l'ellipſe, & *f h* de l'ellipſimbre, ſont paralleles & égales.

Fig. 33, 34, 35 & 36. Il ne ſera pas difficile de trouver cette profondeur pour tous les autres points de l'axe courbe; car ſi l'on porte la diſtance CW, de la Fig. 33. en CY de la Fig. 35, on aura la diſtance des plans qui paſſent par MN & OQ de la Fig. 33; & ſi l'on mene *u u* parallele à *e* E, Fig. 34, on aura les ordonnées Y *u* de l'ellipſe, & Y *x* du cercle, & en WS, Fig. 33, le rayon du cercle de la ſphere, avec lequel faiſant (*Fig. 35.*) l'arc ST, & la fleche *y* S égale à *y* S de la Fig. 33, on menera par le point *y* la perpendiculaire *y u*, qu'on fera égale à Y *u* de la Fig. 34; ſi par le point *u* on mene *u* T parallele à VS, cette ligne qui repréſente le côté du cylindre, coupera l'arc ST au point T, qui ſera commun à la ſphere & au cylindre, par conſéquent à la circonférence de l'ellipſimbre, la diſtance *u* T ſera celle des ordonnées *u y* de l'ellipſe, & T *u* de l'ellipſimbre que l'on cherchoit; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſque cette figure eſt une exacte repréſentation de la ſection faite dans la ſphere & dans le cylindre, par le plan OQB*t* (*Fig. 33*) parallele à ſon axe & au diametre de la baſe MN paſſant par l'axe XC, dont une partie eſt repréſentée ici par la ligne CS rayon de la ſphere, & WP qui lui eſt parallele, par WS, partie de W*p*, de même que *d f* de la Fig. 36, repréſente une portion du côté du cylindre M*f*, & TV (*Fig. 35*) celle du côté O*t* de la Fig. 33.

Application à l'uſage.

91. Ce Théorême fait voir que lorſqu'une voute en berceau biaiſe & en plein ceinrre dans ſon arc de face, rencontre une voute ſphérique, dont le centre eſt dans l'allignement de l'axe du berceau, l'arrête qui ſe forme à la jonction de ces deux voutes ne peut être en plein ceintre, ni dans un même plan elliptique ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, mais une courbe dont les aplombs s'écarrent de la ligne droite, menée d'une impoſte à l'autre. Ainſi ſuppoſant qu'une nef d'Egliſe ſoit un peu biaiſe ſur le chevet circulaire du chœur, vouté en cul-de-four, c'eſt-à-dire, en portion de ſphere, ou ſeulement dont l'arc droit ſoit ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, comme il arrive très-ſouvent, la rencontre de ces voutes eſt une ellipſimbre. L'Architecte qui n'a point de Théorie ſe trouve embarraſſé en pareil cas, pour éviter une eſpece de difformité de cette courbe à laquelle il ne s'attendoit pas; l'avantage de celui qui a des principes, eſt de connoître du premier coup d'œil, ce qui doit réſulter de ſon deſſein, ce qui le met en état d'y remédier, ou par la ſaillie de quelque arc doubleau, ou par quelque induſtrieuſe correction des ceintres.

THEOREME X.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit, qui la pénetre de toute ſa circonférence, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une ellipſimbre.

Soit la ſphere ABTD, pénetrée par le cylindre LNDF, dont l'axe M *m* ne paſſe pas par le centre C de la ſphere; ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par ce centre & par l'axe M *m*, ce plan fera deux ſections différentes, ſçavoir, un cercle ASB dans la ſphere, lequel ſera majeur, & un parallelogrammme LNDF dans le cylindre, leſquelles deux ſections ſe couperont aux quatre points ABDE, qui ſeront par conſéquent communs aux deux ſurfaces de la ſphere & du cylindre, & à la circonférence des courbes oppoſées, formées par la pénétration du cylindre à ſon entrée & à la ſortie de la ſphere. Nous nous contenterons d'en examiner une, parce que l'autre lui ſera parfaitement égale. *Fig.* 38.

Fig. 38. Si on ſuppoſe encore comme au Théorême précédent, un ſecond plan perpendiculaire au premier & paſſant par les points A & B, il eſt évident qu'il fera deux nouvelles ſections; ſçavoir, un cercle dans la ſphere repréſenté dans la Fig. 38 par la courbe A *f* BF, dont le diametre ſera AB, & une ellipſe dans le cylindre repréſentée par A *g* B G, dont AB eſt le grand axe, parce que le cylindre eſt coupé obliquement ſuivant cette ligne, par la ſuppoſition, & dont le petit axe ſera la ligne G *g*, ou ſon égale KL, qui eſt le diametre de la baſe du cylindre LNDF, d'où ſuivent les mêmes preuves qu'on a déduites au Théorême précédent, que la ſection commune aux deux ſurfaces des corps ne peuvent être ni cercle ni ellipſe; puiſque l'un étant inſcrit dans l'autre, ces figures n'ont que deux points communs A & B, qui peuvent être à la rencontre de deux ſurfaces; & qu'enfin la ſection qui leur eſt commune eſt une courbe à double courbure qui n'eſt pas dans un plan, & qui n'aura de commun avec les deux ſections planes ci-devant, que les mêmes points A & B. La ſeule différence qu'il y a du cas du Theorême précédent à celui-ci, eſt que la ligne droite AB qui paſſe par ces points communs, eſt le petit axe, & qu'ici elle eſt le grand axe, de ſorte que l'ellipſe eſt toute au-dedans du cercle de la ſphere dans ce cas, & tout au-dehors dans le précédent.

D'où il ſuit que l'axe courbe de la ſection ſolide, qui eſt une ellipſimbre dans l'un & l'autre cas, s'approche du centre de la ſphere dans le premier, & s'en éloigne dans le ſecond.

Au reſte les ordonnées à l'axe courbe de la ſection, ſeront toujours égales à celles de l'ellipſe appliquée à ſon grand axe AB, comme nous l'avons démontré à l'égard du petit, à la propoſition précédente, ce qui pourroit ſuffire pour l'établiſſement de la preuve de l'énoncé de celle-ci.

Cependant comme il importe de bien concevoir la nature & les propriétés de cette courbe, qui eſt la clef de toutes celles qui ſe forment par la pénétration des corps, nous en allons reprendre l'explication pour la rendre plus intelligible, en la préſentant ſous une autre face par une figure plus diſtincte, ou pour éviter la confuſion des lignes, on ne repréſente qu'une moitié des corps qui ſe pénetrent, parce qu'il eſt très-aiſé de conclure pour l'autre moitié.

Fig. 40. Soit (*Fig.* 40) KL *e* RQE la repréſentation en perſpective de la ſection faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre juſqu'au diametre

diametre RQ de la ſphere, perpendiculairement au plan paſſant par le même axe & les points A & B, de ſorte que $C^2 M$ de de la Fig. 38. eſt la même que $C^2 M^2$ de la Fig. 40, le demi cercle QSR, ſera la ſection que ce plan fait dans la ſphere, & le parallelogramme K *l* celle de ce même plan dans le cylindre. Soit un autre plan parallele à celui-ci, paſſant par T *t*, *q r*, qui fait auſſi deux ſections de même nature, ſçavoir, un demi-cercle *q s r*, & un parallelogramme T *t* V *u*; Il eſt évident que les interſections des côtés de ces parallelogrammes avec les demi-cercles, ſeront des points communs aux deux ſurfaces de la ſphere & du cylindre, tels ſont les points E *e*, 2 3, par leſquels le contour de la ſection ſolide doit néceſſairement paſſer de même que par les points A & B; la courbe E 2 B 3 *e* ſera donc à la rencontre des ſurfaces, depuis ſon axe droit E *e*, correſpondant du diametre de la baſe du cylindre KL juſqu'au point B, où elle va toucher la ſection plane de l'ellipſe paſſant par AB, que nous repréſentons ici par la courbe A G B *g*. Cela ſuppoſé:

Pc. 3. Fig. 40.

Puiſque le diametre KL de la baſe du cylindre eſt perpendiculaire à l'axe $C^2 M$, que l'on ſuppoſe droit, & que les moitiés de ce diametre KM & ML ſont égales, les lignes KE & L *e* menées de leurs extrêmités parallelement à cet axe, ſeront égales entr'elles (par l'Art 39.) donc E *e* ſera parallele & égale à KL; mais parce que, par la ſuppoſition, le plan AGB *g* eſt perpendiculaire au plan MN *n* C^2 paſſant par l'axe du cylindre MC^2 & par la ligne AB, les angles G *c* M, & *g c* M ſont droits; donc G *g* eſt parallele à KL, & par conſéquent à E *e*; mais auſſi à cauſe des paralleles K *k*, L *l*, qui ſont les côtés du cylindre, E *g* eſt un parallelogramme; donc E *e* & G *g* ſont deux lignes égales: & par la même raiſon H *h* & 2 3 le ſeront auſſi. Or G *g* & H *h* ſont des ordonnées de l'ellipſe plane au grand axe AB; & E *e*, 2 3, des ordonnées de la ſection ſolide à ſon axe courbe D *x* B, partie de tout l'axe AD *x* B; donc les ordonnées de cette ſection ſont égales à celles de l'ellipſe AGB *g* paſſant par les points communs A & B; donc cette courbe eſt du nombre de celles que nous avons appellées *ellipſimbre*; *ce qu'il falloit démontrer.*

92. Il reſte à faire voir que l'axe courbe AD *x* B, qui eſt dans le même plan que le ſous-tendant AB, lequel eſt le grand axe de l'ellipſe AGB *g*, s'en éloigne & s'en approche dans le rap-

Pl. 3. Fig. 40. port des ſinus verſes des arcs de cercle de la ſphere, dont les ordonnées de l'ellipſe & de l'ellipſimbre ſont les ſinus droits dans les ſections circulaites de la ſphere, faites par les plans paſſant par ces ordonnées parallelement à l'axe du cylindre M C².

Car ſi du centre C² on mene les rayons C² E & C² *e*, aux extrêmités de l'ordonnée E *e*, qui eſt la corde de l'arc ES *e*, on verra clairement que ces moitiés ED, *e* D ſont les ſinus droits des moitiés de cet arc, dont DS eſt la fleche ou ſinus verſe. De même ſi du centre O du demi-cercle *q s r* on menoit des lignes aux points 2 & 3 de la corde 2 3, autre ordonnée à la ſection, on reconnoîtroit que ſa plus grande profondeur dans le cercle, qui eſt *x s*, ſeroit la fleche de cette corde, & le ſinus verſe de ſa moitié 2 *x* ou 3 *x*, ce qui eſt clairement exprimé dans les deux figures 35 & 36, en *h*S & VS, comme nous l'avons expliqué au Théorême précédent.

Il en ſera de même de toutes les ordonnées poſſibles entre les points A & D, & D & B, dont les profondeurs diminueront depuis l'axe droit E *e*, juſqu'à ces points A & B où elles ſe réduiront à rien, parce que les ordonnées du cercle AFB *f* de la ſphere & de l'ellipſe AGBS, dont la différence cauſe celle de la profondeur de la ſection, deviennent égales à o en ces points.

COROLLAIRE.

93. D'où il ſuit que l'ellipſimbre ne fait que toucher les ſections planes, circulaire & elliptique, parce que ces deux dernieres ſe touchent ſeulement & ne ſe coupent point, & que dès le moment qu'il commence à y avoir de la différence entre les ordonnées à leurs diametres communs, dès ce moment auſſi il commence à y avoir quelque profondeur ou diſtance des ſections planes à la ſolide, dont l'axe courbe commence à s'éloigner du ſous-tendant; donc la circonférence courbe de l'ellipſimbre ne fait que toucher les circonférences des ſections planes du cylindre & de la ſphere.

94. Nous avons donné au Théorême précédent la maniere de trouver les ſinus verſes, qui font la profondeur de l'axe courbe par le moyen du compas; mais ſi l'on vouloit, pour une plus parfaite opération, les trouver par le calcul, il ne ſeroit pas difficile. Il faut ôter du quarré du rayon du cercle de la ſection de la ſphere C² S ou *o s*, le quarré de l'ordonnée ED ou 2 *x*, & il reſtera le quarré de C² D ou de *o x*, dont la racine

quarrée étant ôtée du rayon $C^2 S$ ou os, il reſtera le ſinus verſe DS ou xs pour la profondeur de l'axe courbe ADxB dans la ſphere.

Et ſi l'on veut trouver la différence des profondeurs des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, il ne s'agit que de faire encore une opération, qui eſt d'ôter du rayon $C^2 S$ ou $C^2 F$ le quarré de l'ordonnée cF du cercle de la ſection plane AFBf, il reſtera le quarré de $C^2 c$, dont la racine étant ôtée du rayon, reſtera cS, dont ôtant Ds trouvé ci-devant, reſtera cD, différence de la profondeur de la ſection plane dans la ſphere, & de la ſection ſolide, laquelle eſt la diſtance des deux ordonnées correſpondantes dans l'ellipſimbre & dans l'ellipſe plane, *ce qu'il falloit trouver.*

95. Nous avons dit dans le cas du Théorême précédent, que la plus grande diſtance de l'ellipſe plane à l'ellipſimbre, qui eſt à l'axe droit, étoit au milieu de la ſection ſolide, à diſtance égale des points A & B; il n'en eſt pas de même dans celui-ci, car 1°. l'axe droit n'eſt pas à égale diſtance des points A & B; 2°. ce n'eſt pas à l'axe droit que la ſection ſolide eſt le plus éloignée de la ſection plane.

Que l'axe droit Ee ne ſoit pas équidiſtant des points A & B, cela eſt évident : puiſque l'axe du cylindre étant incliné à l'axe ſoutendant AB, l'angle DcB eſt aigu, & DcA eſt obtus; donc le point D qui eſt le centre de l'ellipſimbre, eſt plus près de B que de A.

Secondement. Pour prouver que le point D n'eſt pas le plus éloigné de la ſection plane qui paſſe par AB, ſoit fait à part (*Fig.* 39) l'arc de cercle majeur a Tb égal au ſegment que la ligne AB retranche d'un grand cercle de la ſphere, dont le milieu de la corde eſt en C, par où on fera paſſer une ligne Ce, qui fera avec ab l'angle bCe égal à celui de l'inclinaiſon de l'axe du cylindre ſur la ligne AB, égal à l'angle LAB (*Fig.* 38). Soit auſſi a Ld b l'axe courbe de la ſection ſolide, & a b le grand axe de la ſection plane elliptique, la plus grande ordonnée à cet axe, qui eſt le petit axe, correſpond à celle qui paſſeroit par D de l'ellipſimbre, qui tient lieu de centre de cette courbe; il faut prouver qu'il peut y avoir un autre point, par exemple L, qui ſoit plus éloigné de a b que le point D. Pour cela, ſi du point C on fait CT perpendiculaire ſur a b, & que du point T, où elle coupe l'arc a T b, on mene une tangente Te à cet

Fig. 39.

Fig. 38.

(*Fig.* 39. arc, que du même point T on abaiſſe TL*f* parallele à *d* C le point L, où elle coupera l'axe courbe, ſera le plus éloigné de l'axe ſous-tendant a *b*; car les lignes *e* C, T*f*, qui ſont entre les mêmes paralleles a *b*, T *e*, ſont égales entr'elles, & parce que SC n'eſt que partie de *e* C, elle ſera plus petite que T*f*; or S*d* repréſente le ſinus verſe de l'arc, dont l'axe droit qui paſſe par D eſt la corde dans le cercle, qui eſt la ſection de la ſphere par l'axe du cylindre perpendiculairement au cercle a S*b*, & LT repréſente le ſinus verſe ou la fleche, dont la double ordonnée qui paſſe par le point L eſt la corde, laquelle étant égale à celle qui paſſe par le point *f* de l'ellipſe plane peut être très-petite; de-là on peut conclure, que ſon ſinus verſe peut être plus petit que *d* S, qui eſt dans un plus grand cercle que celui qui paſſe par L*f*, lequel eſt plus loin du centre C de la ſphere (*Fig.* 34.); mais quand nous ſuppoſerions ces ſinus verſes égaux, il ſera toûjours évident qu'ôtant des deux lignes inégales SC, T*f* des quantités égales S*d*, TL, la partie L*f* reſtera plus grande que *d c*, qui eſt plus petite que T*f*; donc la diſtance oblique L*f* étant plus grande que *d* C, la diſtance perpendiculaire L *x* ſera auſſi plus grande que *d y*, *ce qu'il falloit démontrer.*; car les triangles L*f x* & C*d y* ſeront ſemblables.

COROLLAIRE I.

96. D'où il ſuit que plus la ligne AB eſt inclinée à l'axe CS, plus il doit y avoir d'irrégularité dans l'écartement des ordonnées de l'ellipſimbre de celle de l'ellipſe plane, comme auſſi dans la diſtance de ces ordonnées entr'elles ſur leur axe courbe a *d b*, comme on voit à la Figure 41, puiſque les intervalles
Fig. 41. A 2, 2 3, 3 *d* ſont très-inégaux, meſurés ſur cette courbe A *d* B, quoiqu'ils ſoient égaux étant meſurés ſur la droite AB en *p q c*, ou ſur une perpendiculaire à leur direction, comme en *m n o*; puiſque ces ordonnées à l'axe courbe aux points 2, 3, *d*, 4, 5, ſont émanées de celles de l'ellipſe plane, aux points *p q* C, &c. ou de la baſe du cylindre aux points *m n o*.

COROLLAIRE II.

97. D'où il ſuit encore que les ordonnées à l'axe courbe de l'ellipſimbre ne ſont pas en plus grand nombre que celles de

l'ellipſe plane de part & d'autre du centre C ou D, mais qu'elles ſont plus preſſées d'un côté que de l'autre.

Remarque ſur la différence des cas qui peuvent arriver dans les cylindres ſcalenes.

98. Nous avons ſuppoſé, dans l'énoncé de ce Theorême, que le cylindre qui pénetre la ſphere eſt droit, parce que s'il étoit ſcalene, il pourroit arriver que la ſection commune aux deux ſurfaces ſeroit un *cercle*, & non pas une ellipſimbre, comme on peut le connoître par la Figure 37; car ſi du centre H de la baſe AB du cylindre ſcalene ABDE, on abbaiſſe une ligne HC perpendiculaire au plan de cette baſe, & que du point C pris ſur cette ligne à volonté, & de l'intervalle CA ou CB pour rayon, on décrive un cercle GABDE, il pourra être un des majeurs d'une ſphere, qui auroit pour centre C; or ſi l'on prolonge les côtés du cylindre ABFE vers D, il eſt évident que ce cercle coupera les côtés du cylindre en DE de la même maniere qu'en AB, de ſorte que l'angle EDB ſera égal à l'angle ABD. *Fig.* 37.

Pour en ſentir la vérité il n'y a qu'à mener CG perpendiculaire ſur les côtés du cylindre juſqu'à la circonférence du cercle en G, alors on reconnoîtra que les arcs GA, GE égaux entr'eux, * étant ôtés des arcs GD, GB, auſſi égaux entr'eux par la même raiſon, les reſtes AB & ED ſeront égaux, de même que leurs cordes qui ſont les diametres de la baſe du cylindre, donc la ſection ED ſera égale à la baſe EF, égale par la ſuppoſition de la baſe AB, parce qu'elle eſt ſous-contraire, * l'angle EDB étant égal à ABD, puiſque tous les deux ſont appuyés ſur le même arc AGE; donc ED eſt un cercle; *ce qu'il falloit démontrer.* * *Eucl. l.* 3. *p.* 3. *&* 28. * *Art.* 49.

Le même raiſonnement ſert auſſi à prouver que les ſections oppoſées AB, ED (*Fig.* 38.) ſont égales entr'elles; puiſque leurs grands axes AB, ED ſont égaux, & que les petits axes ſont égaux à ceux de la baſe du cylindre. *Fig.* 38.

COROLLAIRE III.

99. Il ſuit auſſi que plus les axes AB, ED ſeront inclinés à l'axe M*m* du cylindre, plus les ſections oppoſées ſe rapproche-

ront, & qu'enfin ſi le côté du cylindre *ll*, *ff* devient tangent à la ſphere, les ſections oppoſées a T, *d*T ſe toucheront au point T, & ſi ce côté du cylindre eſt hors de la ſphere, ces ſections ſe croiſent également, & ſe mutilent réciproquement, comme nous l'expliquerons au Théorême ſuivant.

Application à l'uſage.

100. Cette propoſition ſert à faire connoître quelle eſt la courbe de l'arrête d'enfourchement des lunettes en berceau, pratiquées pour des fenêtres, ou pour la décharge ou pour la décoration dans une voute ſphérique; car ces lunettes étant ordinairement, ou au deſſus de l'impoſte de la voute ſphérique, ou inclinées en abajour, ou rampantes, ce ſont des moitiés de cylindre ou des cylindres entiers, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, & qui doivent être cenſées faire le même effet que ſi un cylindre entier entroit dans la ſphere de toute ſa circonférence; par exemple, ſi la fenêtre étoit un œil-de-bœuf, comme ſont ceux des quatre petits dômes de S. Pierre de Rome, dont la direction ne tend pas au centre de la voute, mais au-deſſous, parce que l'abajour eſt fort incliné, il n'y a d'autre changement que l'addition d'une moitié de contour de même nature.

THEOREME XI.

La ſection faite par la pénétration d'un cylindre qui n'entre dans la ſphere que d'une partie de ſa circonférence, eſt une ellipſimbre compoſée.

Soit la ſphere BV*b*P, dont le centre eſt C, pénetrée par le cylindre YLND, qui n'entre qu'en partie de ſa circonférence dans la ſphere, enſorte que la partie RP de ſon diametre RT, (lequel étant prolongé paſſe par le centre de la ſphere) en reſte dehors. *Fig.* 42.

Ayant ſuppoſé comme dans les Théorêmes précédens, un plan qui paſſe par le centre C, & l'axe M*m* du cylindre, dont la ſection ſera un parallelogramme YLND, & celle dans la ſphere un cercle majeur BV*b*P, on reconnoîtra que les points B & *b* ſont communs aux deux ſurfaces du cylindre & de la ſphere; puiſqu'ils ſont la rencontre du côté du cylindre & du cercle majeur de la ſphere, & que le point P, qui eſt commun aux deux diametres RT du cylindre, & PV de la ſphere, ne l'eſt pas

aux ſurfaces, puiſqu'il eſt dans le cylindre de la profondeur RP qui eſt la moindre, & que l'ordonnée P*p* au diametre PV, qui paſſeroit par ce point, ſeroit toute hors de la ſphere étant une tangente; donc elle ne pourroit être commune aux deux ſections qui ſeroient faites par un plan perpendiculaire au premier, & paſſer par RV, lequel plan en feroit deux circulaires; ſçavoir RST dans le cylindre, & PBV dans la ſphere, qu'il faut imaginer en l'air, & non pas comme le repréſente la Figure ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere; mais parce que l'interſection des deux cercles RST du cylindre, & PSV de la ſphere, ſe fait en P, il ſuit que ce point S eſt à la circonférence des deux ſurfaces, d'où ayant mené l'ordonnée S*q* au diametre RT, on voit que ſa partie PT eſt commune aux diametres de ceux des deux corps; ſçavoir, RT, PV. Pl. 3. Fig. 42.

Préſentement ſi le cylindre YLND étoit ſcalene, & que la ſection par *q* & B, c'eſt-à-dire, E*q*B fût un cercle, elle auroit pour ſon égale & ſous-contraire F*q b*, auſquelles *q*S ſeroit une ordonnée commune aux deux ſections des plans, coupant le cylindre par EB & F *b*, & aux deux cercles ſur *e*B & *f b*, que ces mêmes plans ſeroient dans la ſphere, de ſorte qu'il eſt viſible que ces deux ſections planes, quoique de même eſpece, ne pourroient être communes aux deux ſurfaces, puiſque ce ſont deux cercles de différens diametres qui ſe touchent aux points B & *b*, dont le plus petit qui a pour diametre *e*B, ſeroit tout entierement dans le cylindre, & que le grand EB ſeroit dans toute ſa circonférence hors de la ſphere.

La différence ſera plus grande, ſi le cylindre eſt droit, parce que la ſection EB dans le cylindre eſt une ellipſe, & que *e*B dans la ſphere eſt un cercle fait par le même plan perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre & par la ſphere. Il en eſt de même de la ſection faite par le plan F *b* paſſant par *q* & *b*, l'ordonnée commune *q*S retranchera une partie de ces ſections planes, depuis *q* vers E, & depuis le même point *q* vers F, tant de l'ellipſe que du cercle fait par chaque plan coupant les deux corps, qui eſt hors de la ſphere; mais parce que la ſection commune à leurs ſurfaces ne peut être en même-tems un cercle & une ellipſe, il ſuit qu'elle ne peut être dans le plan EB ni F *b*, quoiqu'elle y ait un point B ou *b*; donc elle s'en éloignera en ſe courbant vers la circonférence du cercle de la ſphere, en ſorte que les ordonnées à l'axe courbe *q u*B deviennent communes

Pl. 3. Fig. 42. au cylindre en $u\,x$ de la baſe F x K, & au cercle de la ſphere $2\,x\,Z\,y$; donc elle ſera une ellipſimbre de même nature que celle du Théorême précédent, ſur chaque côté EB & F b, mais imparfaite, & mutilée par l'ordonnée commune q S où elles ſe rencontrent, & font un angle, de ſorte que la ſection totale depuis B en b par q eſt compoſée de deux parties d'ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Pour rendre cette explication ſenſible, nous ſuppoſerons un cylindre ſcalene MLN m plus petit que le précédent, dont le côté M m coupe la ſphere aux points 2 & 4, & que la ſection faite par un plan paſſant par 4 B, & un autre par 2 b, eſt un cercle parallele à ſa baſe, ou en ſection ſous-contraire; il eſt évident que le même cercle ſera auſſi la ſection plane de la ſphere de chaque côté en 4 B & 2 b; donc la ſection courbe commune b 5 B ſera la rencontre de deux portions de cercles égales, qui ont une ordonnée commune au point 5, laquelle eſt l'interſection de deux plans, qui feroient une figure ſemblable à celle qui eſt repréſentée à la Figure 43 en A ou en B, ſelon que le point 5 s'approchera d'un côté du cylindre ou de l'autre; car ſi ce point de l'interſection des plans ſe faiſoit à la tangente comme en T (*Fig.* 38) les deux arcs de cercles aboutiroient l'un à l'autre, & l'angle B (*Fig.* 43) tomberoit ſur le point t; mais à meſure que le point 5 rentrera, le point B, qui eſt la rencontre des deux arcs, s'éloignera de t.

Fig. 43.

Fig. 38. & *Fig.* 43.

La même choſe arrivera aux portions d'ellipſimbre, lorſque le cylindre eſt une partie hors de la ſphere, alors ces deux courbes feront une inflexion au milieu en angle ſaillant, tel eſt l'angle curviligne 9 Z^2 10, quand la ſphere paſſera au-delà de l'axe du cylindre, comme en P; mais ſi l'axe du cylindre paſſe au-dehors de la ſphere, alors la ſection compoſée fait un angle rectangle, comme on voit dans la Figure A (*Fig.* 43); la raiſon en eſt bien ſenſible, ſi l'on fait attention que juſqu'à l'axe du cylindre la ſection monte dans la raiſon des ordonnées à la baſe RST, & au contraire que depuis l'axe elle baiſſe dans la même raiſon juſqu'au point R auquel elle ſe joint, lorſque le côté YD eſt tangent à la ſphere, comme nous l'avons dit du point T (*Fig.* 38.)

Fig. 42.

COROLLAIRE.

101. D'où il ſuit que pour trouver les points de l'ellipſimbre compoſé,

compoſée, il ne s'agit que de trouver les ordonnées communes aux ſections circulaires de la ſphere & du cylindre, & pour cela il faut leur trouver des diametres en partie communs, ce qui ſe fait en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe M*m* du cylindre qui coupent le cylindre & la ſphere, comme F*y*', RV, *dff*, dont les parties 2K, PT, *gh*, ſont communes aux diametres du cylindre FK & 2*y* de la ſphere, ſçavoir RT, PV; *dh*, *gff*; ſi ſur chacun de ces diametres on éleve des demi-cercles F*x*K, 29*y*, RST, PBV, *dih*, *g*G*ff* leurs interſections *x*, S, *i* ſeront des points à la circonférence de la courbe, & les perpendiculaires menées de ces points aux diametres communs, qui les couperont en *u*, *q* & 7, donneront les points de l'axe courbe, & ſeront des ordonnées communes, leſquelles étant portées de W en Y, de C en Z^2, & de H en h^2, marqueront ſur un plan qui auroit pour baſe la ligne 9, 10 des points par leſquels faiſant paſſer une courbe 9 Y Z^2 h^2 10, on aura une expreſſion du contour de l'ellipſimbre compoſée, ce que nous expliquerons plus au long dans les Problêmes du Livre ſuivant. Pl. 3. Fig. 42.

Il ſera encore vrai dans le cas de ce Théorême, comme dans le précédent, que les profondeurs de la ſection ſolide dans la ſphere, ſeront dans la même raiſon des ſinus verſes, dont les ordonnées ſeront les ſinus droits, comme on le voit en 2*u*, P*q*, *g*7.

Si le côté LN du cylindre paſſe par le centre C de la ſphere, & que ſon demi-diametre ML ne ſoit pas plus petit que le rayon CS de la ſphere, il ſera aiſé de décrire l'ellipſimbre compoſée avec un compas, dont on mettra une pointe ſur ce côté, par exemple en T, l'autre point le décrira.

La raiſon en eſt claire, car le rayon CS ne peut tourner autour d'un point fixe qu'en parcourant la ſurface d'une ſphere par l'autre extrêmité mobile.

Application à l'uſage.

102. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'arête d'enfourchement, qui ſe forme à la rencontre de la ſurface d'une tour ronde, qui entre en partie dans une voute ſphérique, comme pourroit être un eſcalier à vis dans un dôme, ou un puits ſur le bord d'une citerne voutée en cul-de-four, ou d'une

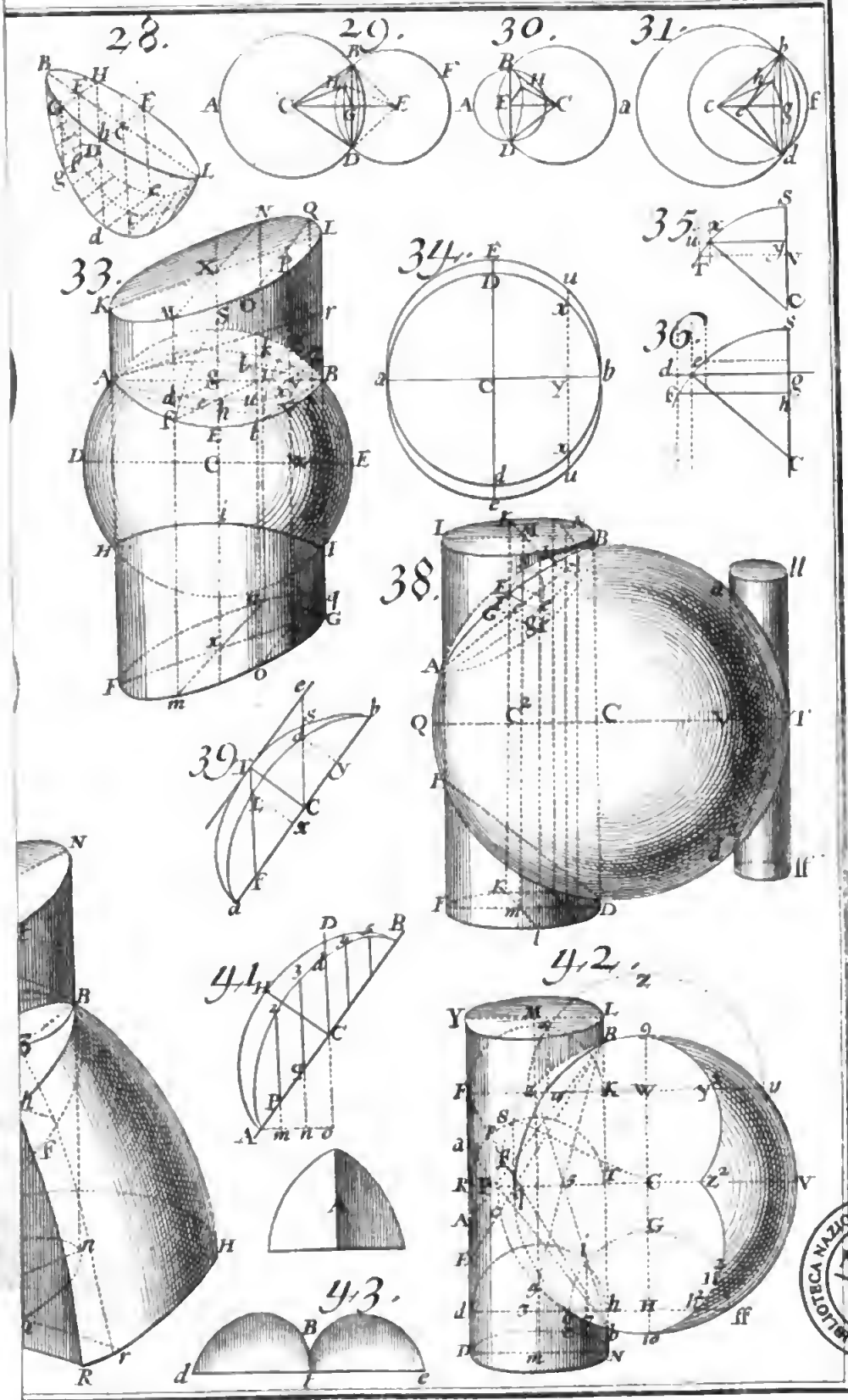
tour verticale, dans laquelle ſont des renfoncemens en niche ſphérique, comme ſont les trois du dôme du Val-de-Grace, l'un ſur le Baldaquin, & les deux autres en croix ſur le Chœur & la Chapelle oppoſée, qu'on appelle niche en tour creuſe, ou encore d'une voute ſphérique établie ſur quatre portions d'arc-de-cloître, ou qui rachete un berceau. Dans tous ces cas l'on doit remarquer que ſi la voute ſphérique n'avançoit pas juſqu'à la clef, il ſe feroit un angle en *ſurplomb*, contraire à la ſolidité, parce que les *contre-clefs* pouſſeroient à vuide.

De la rencontre des ſurfaces des ſpheres avec celles des cônes.

THEOREME XII.

La ſection faite par la pénétration des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle.

Pl. 4. Fig. 44. SOIT la ſphere ABED pénetrée par le cone SLN, dont l'axe SM paſſe par le centre C; ſoit auſſi la courbe DKE, la ſection faite par la rencontre de leurs ſurfaces, ſur laquelle ayant pris à volonté un point K, on menera du ſommet S la ligne KS qui ſera à la ſurface du cone; puiſque le point K eſt ſuppoſé commun à ſa ſurface, auſſi-bien qu'à celle de la ſphere. Si par les points D, K, E, on mene des lignes au centre C de la ſphere comme DC, KC, EC, & que du même centre C on tire des perpendiculaires CF, CG, CH aux côtés du cone SD, SK, SE, on reconnoîtra que les triangles FCS, HCS, GCS ſont égaux en tout; puiſqu'ils ont le côté SC commun, qu'ils ſont rectangles en F, G, H, & qu'ils ont les angles en S égaux entr'eux, qui ſont ceux de l'axe du cone avec les côtés; donc les parties de ces côtés SF, SG, SH ſont égales. De même les autres triangles FCD, GCK, & HCE ſont auſſi égaux en tout, car ils ſont rectangles par la conſtruction, ils ont les côtés DC, KC, EC égaux, puiſqu'ils ſont rayons de la même ſphere, & les côtés FC, CH, CG, comme nous venons de le démontrer, auſſi égaux entr'eux; donc les côtés DF, KG, HE le ſeront auſſi, leſquels étant ajoutés aux lignes égales SF, SG, SH, on aura SD = SK = SE; par conſéquent les triangles SDI, SKI,



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

SEI ſeront égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont rectangles en I, qu'ils ont les angles en S égaux, & le côté SI commun. Or les côtés ID, IK, IE étant égaux, & la ligne SI leur étant perpendiculaire, ils ſont tous dans le même plan, * & par conſéquent à la circonférence d'un cercle, dont le centre eſt en I. Mais, par la ſuppoſition, les points D, K, E, ſont à la ſurface de la ſphere, & à celle du cone dans l'interſection faite par leur pénétration; donc la ſection d'un cone droit qui pénetre la ſphere, & dont l'axe paſſe par ſon centre, eſt un cercle: *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l. 11. p. 5.*

On démontrera la même choſe de la ſection oppoſée AB vers le ſommet du cone, qui eſt évidemment toujours plus petite que celle qui ſe fait vers la baſe.

Application à l'uſage.

103. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une trompe, d'une *lunette ébraſée*, ou voute en canoniere droite, qui rachete une voute ſphérique, lorſque leurs impoſtes ſont de niveau, & leur direction tendant au centre de la voute ſphérique.

Si la trompe ou la lunette étoit biaiſe, quoique la direction de leur milieu tendit au centre de la ſphere, la courbe ne ſeroit plus un cercle, de même que ſi la direction ne tendoit pas au centre, comme on va le démontrer.

THEOREME XIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone ſcalene, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt une ELLIPSOIDIMBRE, *ou un cercle, ſi elle eſt ſous-contraire.*

Soit une ſphere a*b* BA (*Fig.* 45) dont le centre eſt C, par lequel paſſe l'axe SX du cone ſcalene SDE qui la pénetre; il eſt clair, comme dans la propoſition précédente, que ſi l'on ſuppoſe ces deux corps coupés par un plan, paſſant par l'axe SX du cone, les quatre points a, *b*, B, A ſeront communs à la ſurface du cone, & à celle de la ſphere, puiſqu'ils ſont l'interſection d'un cercle majeur de la ſphere & du triangle par l'axe du cone. *Fig.* 45.

Si l'on ſuppoſe encore un plan perpendiculaire au premier,

Pl. 4. Fig. 45. & paſſant par A & B, il ſera deux ſections différentes ; ſçavoir, un cercle dans la ſphere, que nous repréſentons ici par AKB, & dans le cone ſcalene (la ſection AB n'étant pas ſous-contraire) une ellipſe que nous repréſentons ici par ALB, leſquelles ſections n'ayant de communs que les points A & B, ne pourront être ni l'une ni l'autre commune aux deux ſurfaces ; donc la ſection ſolide paſſera au-dehors des deux plans, avec leſquels elle doit cependant avoir les deux points A & B communs.

Soit menée *h i* parallele à la baſe DE par le point M, interſection de l'axe SX & de la ligne AB, il eſt évident que *h i* ſera le diametre d'un cercle dans le cone, dont la moitié M*h* portée en ML perpendiculairement ſur AB, ſera une ordonnée commune à l'ellipſe ſur l'axe AB.

De même ſi l'on mene *d e* parallele à DE par le point *m*, milieu de l'axe ſous-tendant AB, & qu'on prenne une moyenne proportionnelle entre *d m* & *m e*, cette ligne que nous ſuppoſons ici égale à *m* L ſera auſſi une ordonnée de l'ellipſe, qui ſera égale à la moitié du grand axe de la ſection elliptique du cone, puiſqu'elle eſt ſur le milieu *m*, & qu'elle eſt plus grande que *m r*, rayon de cercle fait ſur le diametre AB plus petit que *d e*.

Soit de plus menée par le point *m* la ligne S*m*, du ſommet du cone S, qui coupera le cercle a*b*B A en H & I ; ſur HI, comme diametre, on décrira le demi-cercle H*f* I, qui ſera une ſection de la ſphere perpendiculaire au cercle majeur A B*b* a, puis ſur la même HI on élevera au point *m* la perpendiculaire *m g* égale à *m* L ; ſi du point *g* on mene au ſommet S la ligne *g* S, elle coupera le cercle H*f* I, de la ſphere au point *f*, qui ſera commun aux deux ſurfaces, par conſéquent à la ſection, puiſque S*g* eſt un côté du cone qu'il faut ſe repréſenter en l'air perpendiculairement au plan ASB. A préſent ſi du point *f* on mene *f y* parallele à S*m*, à cauſe des triangles ſemblables *g f y* & *g* S*m*, on aura S*m* : *m g* :: *f y* : *y g*, c'eſt-à-dire que la diſtance S*m* du ſommet du cone à l'ordonnée de l'ellipſe plane, qui en eſt la ſection par AB, ſera à cette ordonnée comme la diſtance de l'ellipſe à la ſection ſolide, priſe ſur un plan paſſant par le ſommet du cone, eſt à la différence *g y* des ordonnées *g m*, *f x* de l'ellipſe plane, & de la ſection ſolide A *x* B, ce qui eſt, ſuivant notre définition 4, * la propriété de *l'ellipſoïdimbre* ; mais

* Art. 79.

parce qu'on peut trouver autant de points *f* que l'on voudra, qui donneront toujours une pareille analogie, quoique leur distance *fy* ſoit plus ou moins grande, il ſuit que la courbe eſt une ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

104. D'où il ſuit que ſi par le point *f* on mene *f x* parallele à *g m*, & qui coupe la ligne S*m* au point *x*, ce point ſera celui de la profondeur de l'axe courbe dans la ſphere au-delà du point *m*, correſpondant dans la ſection plane AB, & parce que les points *m* & M, & tout autre pris à volonté, produiront ſuivant la même conſtruction différens points *f* plus près de *y*, on aura autant de points *x* que l'on voudra, ſur différentes lignes S*m* ou SM, venant du ſommet S du cone ſur l'axe ſous-tendant AB, & par conſéquent ils donneront la courbure de l'axe A*x*B.

COROLLAIRE II.

105. Il ſuit encore que lorſque AB eſt le petit axe de l'ellipſe plane de la ſection du cone, la ſection ſolide s'approchera du côté du ſommet S dans la grande ſection AB, & s'en éloignera dans la petite oppoſée a*b*; & au contraire, ſi AB eſt le grand axe de l'ellipſe, comme nous le verrons dans le Théorême ſuivant, qui ſervira d'explication à celui-ci.

THEOREME XIV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cone, qui la pénetre de toute ſa circonférence, & dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une ellipſoïdimbre. Si le cone eſt ſcalene, elle peut être un cercle.

Soit la ſphere A a *b* B (*Fig.* 46.) pénetrée par le cone DSE, dont l'axe SX ne paſſe pas par le centre C de la ſphere: ſoit auſſi dans les mêmes circonſtances qu'au Théorême précédent la ligne AB, par laquelle paſſe le plan perpendiculaire au triangle par l'axe coupant les deux corps, dans leſquels il fait différentes ſections; ſçavoir, une ellipſe ALB dans le cone qu'il coupe obliquement, & un cercle AKB dans la ſphere; il ſera clair pour peu qu'on donne d'attention à cette figure, où l'on a *Fig.* 46.

PL. 4. Fig. 46. mis les mêmes lettres qu'à la précédente, qu'il s'agit de la même ſection ; car ni le cercle de la ſphere, ni l'ellipſe du cone, qui n'ont que deux points communs A & B, ne peuvent être la rencontre des deux ſurfaces qu'en ces deux points ; par conſéquent la courbe faite par leur interſection, s'écartera de leur plan, & y reviendra aux points A & B par où elle doit paſſer.

Pour reconnoître en quels points de la ſphere entre les deux A & B, cette courbe doit paſſer, il faut ſuppoſer des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par ASB, que nous ne pouvons repréſenter ici qu'en les couchant ſur le même plan, & ſur la ligne droite de leur interſection. Soit par exemple un de ces plans paſſant par S I, la moitié de la ſection de ce plan coupant la ſphere ſera le demi cercle H *u* I, qu'il faut imaginer en l'air ; & parce que ſon diametre HI coupe AB en *m*, l'ordonnée *m* P à ce diametre ſera en partie commune à l'ordonnée de l'ellipſe à l'axe AB ; mais elle excédera, parce que le cercle AKB de la ſphere eſt circonſcrit à l'ellipſe ALB du cone. Pour trouver donc où ſe termine cette partie commune, c'eſt-à-dire, la longueur de l'ordonnée de l'ellipſe paſſant par le point *m*, on ſçait qu'il n'y a qu'à prendre une moyenne proportionelle entre *d m* & *m e*, puiſque *d e* eſt le diametre du cercle fait par la ſection du cone parallelement à ſa baſe, lequel a une ordonnée commune avec l'ellipſe de la ſection oblique AB au point *m*.

Soit *m r* l'ordonnée de l'ellipſe égale à *m* R, la ligne S *r* paſſant par le ſommet du cone, & le point *r*, qui eſt à ſa circonférence, ſera le côté du cone ; mais à cauſe que ce point *r* eſt dans la ſphere, il faut prolonger S *r* juſqu'à ce qu'il rencontre ſon cercle H *u* I au point *y*, lequel ſera commun au cone & à la ſphere ; & ſi par ce point *y* on mene *y x* juſqu'à la rencontre de l'interſection des plans perpendiculaires en SI, le point *x* ſera un de ceux de l'axe courbe de la ſection ſolide. Or ſi l'on fait comme dans le Théorême précédent *r g* parallele à SI, à cauſe des triangles ſemblables S *m r*, S *y x*, *r g y*, on aura S *m* : *m r* : : *r g* : *g y*. C'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de l'ellipſe plane, ſera à cette même ordonnée, comme la diſtance de la ſection ſolide à l'ellipſe plane, meſurée ſur un plan paſſant par le ſommet S, eſt à la différence des ordonnées de la ſection ſolide & de la ſection plane du cone ; & parcequ'on peut imaginer autant de plans que l'on voudra, perpendiculaires au plan ASB, comme S *o*, au lieu de S *m*, &

qu'on aura toujours la même analogie à l'égard des ordonnées de l'ellipſe & de la ſection ſolide ; il ſuit par notre quatrieme définition * qu'elle eſt une ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 79.

Pour une plus ample explication qui pourroit être un peu difficile aux commençans, nous avons jugé à propos de répeter la Fig. 46 en façon de perſpective, au nombre 47 ; mais dans un ſens différent, ce qui fait qu'on ne peut repréſenter les cercles que par des ellipſes. Fig. 47.

Soit APB*p* le cercle de la ſection plane de la ſphere par la ligne AB, lequel eſt perpendiculaire au triangle par l'axe ESF ; ſoit auſſi ARB*r* l'ellipſe de la ſection oblique du cone, qui paſſe par les mêmes points A & B ; puiſque la ſection ſolide n'eſt pas dans ce plan, elle paſſe par-deſſous, comme dans la partie A*hy*B. Nous n'en avons pas repréſenté davantage pour éviter la confuſion des lignes. Si l'on mene des ordonnées à l'axe AB, comme P*p*, Q*q*, qui coupent l'axe AB en M & O, & que par ces points on mene des lignes du ſommet, comme S*x*, S*z*, & d'autres par les extrêmités des ordonnées de l'ellipſe, comme S*y*E, SYF, SV*h*, S*u*H ; ces lignes qui ſeront des côtés du cone, rencontreront la ſurface de la ſphere en quelque point, comme en *y*, Y, *h* & H, par leſquels on menera des paralleles aux ordonnées de l'ellipſe *y*Y, *h*H, leſquelles ſeront les ordonnées de la ſection ſolide ; enfin ſi par les points *r*, R, V, *u*, de l'ellipſe on mene des paralleles aux lignes S*x*, S*z* ; ſçavoir, *rt*, RT, V*i*, *u*I, on reconnoîtra, comme dans la démonſtration précédente, que les triangles *yrt*, *y*S*x*, *r*SM ſeront ſemblables, de même que *h*V*i*, *h*S*z*, VSO ; donc SM : M*r* : : *rt* : *ty*, & SO : OV : : V*i* : *ih*, donc la courbe B*yh*A eſt une portion d'ellipſoïdimbre, *comme il a été démontré ci-deſſus.*

106. On voit qu'ici les ordonnées de la courbe ſolide excédent celles de l'ellipſe ; le contraire arrive à la ſection oppoſée *ab* vers le ſommet, où les ordonnées de la courbe ſont plus petites que celles de l'ellipſe plane de la propoſition précédente, où l'on a vû le contraire dans l'une & l'autre ſection, comme nous l'avons remarqué ; la petiteſſe de la figure ne nous a pas permis de trouver celle qui eſt près du ſommet, mais pour peu d'attention qu'on y donne la choſe eſt claire, & ne mérite pas une plus longue explication ; puiſqu'il eſt évident que

la ſection ſolide ſera toujours plus grande ou plus petite que l'ellipſe plane, parce que les côtés du cone étant eſſentiellement convergens, ne peuvent paſſer par l'extrêmité de deux ordonnées paralleles & égales.

107. Il faut remarquer que l'excès, ou le défaut des ordonnées de la ſection ſolide ſur la ſection plane elliptique, n'eſt pas proportionnel d'une ordonnée à une autre, entre l'axe droit yY, & le point A ou B, mais qu'il augmente à meſure que l'ordonnée approche de l'axe droit yY, & diminue en tirant vers A ou B, parce que le ſommet du cone S étant commun à tous les triangles formés par la ſection des plans qui le coupent par ces ordonnées, ces plans ſont inclinés entr'eux. Or ſi Mr étoit à xy, comme OV à zh, Sx ſeroit à SM comme Sz ſeroit à SO; donc xz ſeroit parallele à MO, ce qui eſt contre ce que nous avons démontré ci-devant; puiſque l'axe courbe BxzA doit paſſer par A & B, & s'éloigner du plan de la ſection plane paſſant par A & B; donc Mr n'eſt pas à ty comme OV eſt à ih; & par conſéquent les ordonnées de l'ellipſoïdimbre ne ſeront pas en même raiſon entr'elles que celles de l'ellipſe, comme dans *l'ellipſimbre*; d'où vient que nous l'appellons *ellipſoïdimbre*, c'eſt-à-dire qui imite ſeulement en quelque choſe l'ellipſimbre. En effet cette courbe a un rapport eſſentiel avec l'ellipſe dans les ordonnées priſes dans la ſection triangulaire d'un plan qui paſſe par le ſommet du cone & l'ordonnée de l'ellipſe quelconque, dont l'excès ou le défaut eſt proportionné à l'éloignement des deux ſections meſuré ſur le même plan de la ſection triangulaire, & non pas à la diſtance abſolue qui ſeroit priſe ſur deux plans paralleles paſſant par les mêmes ordonnées.

COROLLAIRE I.

108. Il n'eſt pas moins facile dans cette propoſition que dans la précédente, de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe de l'ellipſoïdimbre, ce qui donne un moyen commode d'en faire la projection, comme nous le dirons en ſon lieu; car (*Fig.* 46) ſi l'on veut avoir les points x & z de l'axe courbe correſpondans aux points m & o, ayant mené par ces points des lignes de, hi paralleles à la baſe DE, & par ces mêmes points des lignes SmI, SoQ, qui couperont le cercle majeur

Fig. 46.

jeur de la ſphere en H & I, *q* & Q, on décrira ſur ces lignes comme diametres, des demi-cercles, comme H *u* I, auquel on menera par le point *m*, *m* P perpendiculaire à HI, enſuite ayant pris ſur *m* P la longueur *mr* égale à la moyenne proportionelle entre *dm* & *me*, du ſommet S on menera par le point trouvé *r* la ligne S *r y*, qui coupera le demi-cercle H *u* I au point *y*, par lequel menant *y x* parallele à *m* P, le point *x*, où elle coupera la ligne SI, ſera celui que l'on cherche; car le cercle H *u* I eſt une ſection de la ſphere par un plan qui paſſe par le ſommet S, & le point *r*, qui eſt à la circonférence de l'ellipſe de la ſection oblique du cône, donne le côté du cone S*y* qui coupe le cercle en *y*; donc ce point eſt commun aux deux ſurfaces; & parce que ce plan eſt perpendiculaire à celui qui paſſe par ASB, lequel eſt auſſi perpendiculaire à celui qui paſſe par AB, l'interſection de ces trois plans ſera une ligne perpendiculaire au plan S *mx*, ſur lequel doit être meſurée la diſtance du point *m* au point *x* par une parallele à l'ordonnée de l'ellipſe plane, & qui paſſe par le point *y*; donc *x* eſt un point de l'axe courbe, correſpondant au point *m*, *ce qu'il falloit trouver.* Pl. 4. Fig. 46.

109. Si l'on veut trouver cette diſtance par une analogie, connoiſſant la diſtance du ſommet à l'ellipſe ſur le côté du cone, en diviſant le rectangle P *rp* par *rb*, on aura *ry*, parce que la propriété du cercle P *r* × *rp* = *br* × *ry*; & alors à cauſe des triangles ſemblables S *mr* & *rty*, ou (*Fig.* 46) *rgy*, on aura S *r* : *ry* :: S *m* : *rt* ou *rg*. Fig. 47.

COROLLAIRE II.

110. Il faut remarquer que l'axe du cone ne paſſe pas ordinairement par le centre de l'ellipſoïdimbre, parce qu'il ne paſſe pas par celui de l'ellipſe plane; car l'axe du cone SX diviſe en deux également l'angle du ſommet DSE du triangle par l'axe; donc, par la huitieme du ſixieme d'Euclide, AS: AB :: AO: OB; or AS eſt plus petit que SB; donc AO eſt plus petit que OB; mais le centre de l'ellipſoïdimbre doit ſe trouver au point correſpondant à G, milieu de AB, dans une ligne menée du point S par G; donc le point *z*, où l'axe du cone coupe l'axe courbe de l'ellipſoïdimbre, n'eſt pas le centre de cette courbe, *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 46.

111. Nous avons excepté dans l'énoncé de ce Théorême, touchant la pénétration du cone dans la ſphere, le cas qui peut

Fig. 48. arriver ſi le cone eſt ſcalene, lorſque la ſection plane faite par la ligne $a b$ (*Fig.* 48) eſt ſous-contraire, parce qu'alors étant un cercle dans le cone comme dans la ſphere, elle peut être commune à la ſurface des deux corps, non-ſeulement dans une ſection comme $a b$, mais encore dans ſon oppoſée $e f$, c'eſt-à-dire, dans l'emmerſion & dans l'emmerſion du cone dans la ſphere, ſans que l'axe de l'un paſſe par le centre de l'autre; car puiſque le rectangle $fS \times bS = eS \times aS$, $eS : Sf :: Sb : Sa$; & ſi l'on mene fh parallele à $b a$, les triangles fSh, fSe ſeront ſemblables, & l'on aura $bS : Sa :: fS : Sh :: eS : Sf$; donc les angles Sfh, Sef ſeront égaux, c'eſt-à-dire, que la ſection ef ſera ſous-contraire de la ſection ab, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE III.

112. Plus le côté Sf s'éloigne du centre C, & plus les ſections oppoſées ab & ef ſe rapprocheront, de ſorte que s'il devient tangent à la ſphere, comme s'il paſſoit par le point T, les ſections aT & Te ſe toucheront en ce point T; & ſi le côté SK eſt hors de la ſphere, alors il ſe formera une ſection compoſée de deux courbes, qui ne ſeront plus des arcs de cercles, parce qu'ils ne pourront être communs à la ſphere & au cone qui eſt en partie dehors, mais de deux portions d'ellipſoïdimbre, comme nous l'allons expliquer ci-après.

Application à l'uſage.

113. Ces deux Théorêmes font voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une trompe ou lunette ébraſée, ou voute en canoniere, qui rachete une voute ſphérique de biais, ſoit parce que la direction de leur milieu ne tend pas au centre de la voute ſphérique, ſoit que lorſqu'elle y tend, elle ſoit ſurhauſſée ou ſurbaiſſée dans ſon ceintre primitif qui tient lieu d'arc droit.

THEOREME XV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de la ſphere & d'un cone dont l'axe ne paſſe pas par le centre de cette ſphere, & qui ne la pénetre pas de toute ſa circonference, eſt une courbe compoſée de deux portions d'ellipſoïdimbre, ou d'autres courbes de même nature appartenant au cercle, à la parabole, ou à l'hyperbole.

Fig. 45. Soit la ſphere aTe (*Fig.* 49) pénetrée par le cone SGL;

en partie ſeulement, en ſorte que le côté SG ſoit hors de la ſphere. Soit menée du point S une tangente ST, qui touche le cercle majeur a T *e* au point T; ſi l'on ſuppoſe les deux points a & *e* communs aux ſurfaces des deux corps, & des lignes a T *b*, *e* T *f* menées de ces points à celui d'attouchement T, qu'on peut conſidérer comme les ſections de deux plans perpendiculaires au plan du triangle par l'axe paſſant par le centre de la ſphere, les parties de ces lignes qui ſont dans la ſphere, comme a T, *e* T, ſeront les diametres des cercles des ſections de la ſphere, & les lignes *e f*, a *b* ſeront les grands axes des ellipſes faites par les ſections obliques du cone; or ces cercles & ces ellipſes n'ont rien de commun que les points a & *e*, donc ni les unes ni les autres de ces figures ne peuvent être les ſections communes aux ſurfaces de ces corps; donc les ſections ſolides ne ſeront pas dans leurs plans *e f* & a *b*, & ne pourront avoir deux points communs avec chaque ſection plane, puiſque les points *f* & *b* ſont hors de la ſphere, & les parties de l'ellipſe qui ſe croiſent au point T & qui ſont hors de la ſphere, ſont mutilées par le plan qui paſſeroit par la tangente T, perpendiculairement au plan a T *e*, lequel en retranche les parties T *f* & T *b*, & la jonction de ces plans a pour interſection l'ordonnée commune, qui paſſe par le point T; mais comme ces ellipſes ne ſont pas communes aux ſurfaces des deux corps, donc la ſection eſt une ellipſoïdimbre, par le Theorême précédent, il ſuit qu'on aura deux portions de cette eſpece de courbe, correſpondantes aux deux portions d'ellipſes, ce que nous appellons une *ellipſoïdimbre compoſée.* Pl. 4. Fig. 49.

114. Il faut remarquer que puiſque les ſections ſolides s'écartent des plans des ſections planes, l'ordonnée commune aux deux portions d'ellipſoïdimbre, ne ſera pas au point T, mais en quelqu'autre comme *x*, parce que l'une *e df* paſſe au-deſſus de *f e*, & l'autre a *g b* paſſe au-deſſous de a *b*, comme nous l'avons dit des cas où la ſection elliptique du cone eſt au-dehors de la ſection circulaire de la ſphere.

COROLLAIRE I.

115. D'où il ſuit que l'ellipſoïdimbre compoſée ſera toûjours un angle d'inflexion; non pas à ſon milieu, comme l'ellipſimbre compoſée, mais plus près d'un des points communs a ou *e* que

de l'autre, parce que les ſections oppoſées étant eſſentiellement inégales à cauſe de la diminution du cone vers ſon ſommet, la partie de la courbe qui en eſt plus près, comme a x, ſera plus petite que celle qui eſt vers la baſe, comme ex, ainſi qu'il eſt repréſenté dans la Figure 49 par les courbes eiX & xga. *Fig. 49.*

Secondement, que cette inflexion ſera un angle ſaillant, ſi les ſections oppoſées ſe croiſent au-delà du centre de la ſphere, & un angle rentrant ſi elles ſe croiſent en-deça comme nous l'avons dit des ellipſimbres compoſées ; de ſorte que ſi la tangente SH étoit le côté du cone, l'angle d'inflexion ſeroit le plus ſaillant & le plus aigu qu'il puiſſe être, puiſque les axes ne peuvent ſe croiſer plus loin des points a & e, & cet angle diminuera à meſure que le point x ſe rapprochera de la ligne ae.

Nous donnerons dans la ſuite la maniere de tracer cette courbe compoſée, ſoit par la projection ſur un plan, comme nous l'avons déja indiquée par celle de tracer l'ellipſimbre compoſée, ſoit en effet dans ſon contour naturel ſur un cone ou ſur une ſphere.

COROLLAIRE II.

116. Quoique nous ayons parlé dans cette propoſition de la ſection qui produit l'ellipſoïdimbre, nous n'avons pas prétendu qu'il n'en puiſſe arriver d'autres cas où elle ne produit pas la même figure. Le cone en effet peut être ſitué de bien des façons à l'égard de la ſphere qu'il ne pénetre qu'en partie, ce que l'on pourra connoître par la combinaiſon des différentes ſituations des côtés de ſon triangle par l'axe, & de l'inclinaiſon des axes des ſections planes, qu'on ſuppoſe toujours paſſer par les points communs aux côtés de ce triangle, & aux cercles majeurs de la ſphere, coupée par le même plan, qui forme le triangle par l'axe du cone, & enfin par le point d'attouchement de la ligne menée du ſommet du cone, tangente au cercle majeur de la ſphere.

117. Premierement, puiſqu'un des côtés du cone doit couper la ſphere en deux points, & que ſa baſe ou un ſecond plan paſſant par un point commun aux deux ſurfaces, & par le point d'attouchement d'une ligne menée du ſommet, doit couper les côtés du cone ; il ſuit que dans toutes ces ſections compoſées de portions de courbes, il y en aura toujours une relative au cercle ou à l'ellipſe ; mais parce qu'un des deux plans que nous ſuppoſons com-

me l'origine de ces ſections, peut être ſitué de maniere qu'il ne coupe le cone que d'un côté, la ſection qui en réſultera appartiendra à la parabole ou à l'hyperbole, & ſera une courbe à laquelle nous pouvons donner le nom de paraboloïdimbre ou d'hyperboloïdimbre; c'eſt-à-dire que dans toutes ces ſections il ſera toujours vrai que les ordonnées à leur axe courbe qui eſt dans le plan de l'axe droit de la ſection plane & du ſommet du cone, auront un excès ou un défaut ſur les ordonnées de la ſection plane correſpondantes, relativement à leur diſtance dans un plan paſſant par le ſommet du cone & par les deux ordonnées; de ſorte que connoiſſant cette diſtance on pourra toujours connoître la différence des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide par cette analogie. Comme la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de la ſection plane:

Eſt à la longueur de la même ordonnée;

Ainſi la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à celle de la plane, priſe dans un plan paſſant par le ſommet du cone:

Eſt à la différence des deux ordonnées, c'eſt-à-dire, à l'excès ou au défaut de l'ordonnée de la ſection plane.

Il eſt clair que par le moyen de cette différence, ajoutée à l'ordonnée de la ſection plane, connue par les ſections coniques, ou retranchée de cette ordonnée, on aura un point du contour de la ſection ſolide, telle qu'elle puiſſe être, ellipſoïdimbre, paraboloïdimbre, ou hyperboloïdimbre.

Nous avons repréſenté dans les cinq figures ſuivantes, les différentes combinaiſons de ces ſections compoſées.

Dans la premiere figure où les points a & *e* ſont communs à la ſphere & au cone, & le point T celui d'attouchement de la tangente menée du ſommet S du cone au cercle majeur de la ſphere *e* a T; le plan paſſant par *e* T perpendiculairement à la tangente ST, fait pour ſection un cercle dans la ſphere & un dans le cone, dont *ef* eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par les points a & T, fait une ellipſe dans le cone, dont le grand axe eſt a *b*. Fig. 50. Fig. 51.

Dans la Figure 2e. le plan paſſant par les points E & T, fait un cercle dans le cone dont EF eſt le diametre, & l'autre plan paſſant par A & T, fait une parabole dans le cone, parce que A *b* eſt ſuppoſé parallele à SG. Fig. 52.

Dans la Figure 3e. le plan *e* T fait une ellipſe dans le cone, Fig. 53.

dont le grand axe eſt *ef*, & le plan a T fait une parabole, dont l'axe eſt a *b*.

Fig. 52. Dans la Figure 4e. le plan ET fait un cercle dans le cone dont le diametre eſt EF, & le plan a T, qui rencontre le côté du cone SF, prolongé vers z, fait une hyperbole, dont a z eſt l'axe déterminé, & le point a ſon ſommet.

Fig. 53. Dans la Figure 5e. le plan ET qui coupe les deux côtés du cone SE & S*f* fait une ellipſe, dont E f eſt le grand axe, & le plan AT qui rencontre le côté *f* S, prolongé en *y*, fait une hyperbole, dont l'axe déterminé eſt A *y*, ſuppoſant toujours la ligne ST tangente au cercle majeur de la ſphere EAT.

Application à l'uſage.

118. Ce Théorême ne paroît pas d'une grande utilité pour la pratique; on ne l'a mis ici que pour la perfection de la doctrine, il ſert ſeulement à faire connoître quelle ſeroit la courbe de l'arrête d'enfourchement d'une trompe ou voute en canoniere, qui racheteroit par le côté une voute ſphérique, ce qui ne pourroit arriver que dans une conſtruction bizarre.

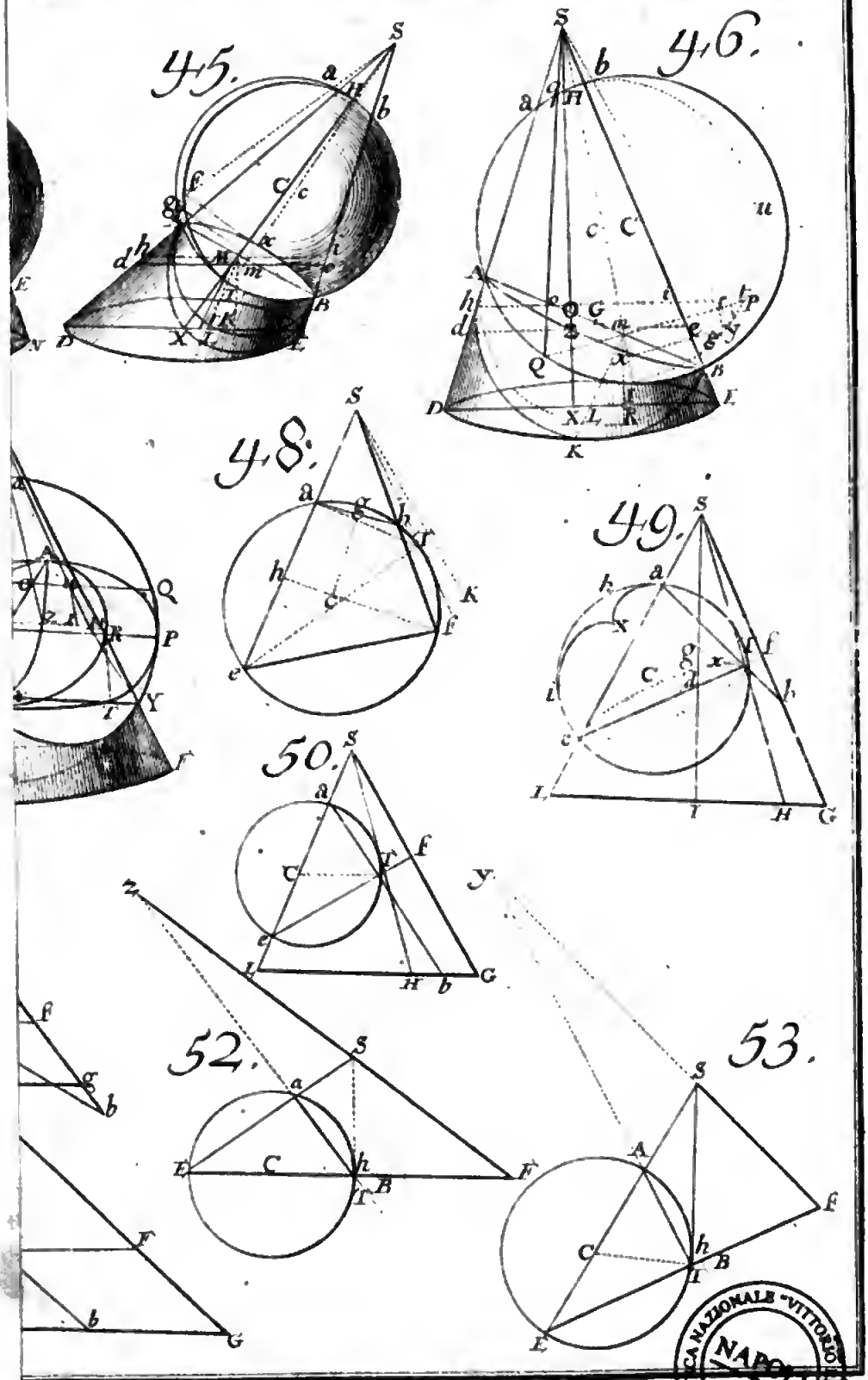
CHAPITRE VI.

Des ſections faites par la pénétration des cylindres entr'eux & avec les cones.

THEOREME XVI.

La ſection faite par la pénétration des cylindres de même nature; égaux ou inégaux, dont les axes ſont égaux en longueur, & paralleles entr'eux, eſt un parallelogramme.

LA démonſtration de cette propoſion eſt trop facile pour s'y arrêter; car puiſque la ſection d'un cylindre faite par un
Pl. 5. plan paſſant parallelement à ſon axe, eſt un parallelogramme
Fig. 55. (*Fig.* 55) ceux qui paſſeront par des cordes égales de leurs baſes & dans une même longueur, ſeront égaux; or on voit que la ligne AB qui joint les points A & B de l'interſection des cercles des deux baſes, eſt une corde commune aux deux cercles;



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO MANUELE III" NAPOLI

donc le parallelogramme qui aura pour côtés cette corde & une égale longueur d'axe, ſera commun aux deux cylindres.

Application à l'uſage.

Pl. 5. Fig. 55.

119. Cette propoſition fait voir pourquoi les voutes Gothiques, qu'on appelle en *tiers-point*, font un angle rentrant à la clef, qui ſe continue en ligne droite, comme une diviſion marquée entre les deux côtés, & les pendentifs de celles qui ſe croiſent, parce que leurs ceintres ſont compoſés de deux arcs de cercle CA, A*c*, qui ſont les parties des baſes de deux cylindres, dont les axes ſont autant éloignés que les centres C & *c* de ces arcs, qui le ſont ordinairement de la longueur de leur rayon CA; ainſi la rencontre AD de ces portions de cylindre eſt un des côtés du parallelogramme de leur interſection totale s'ils étoient entiers.

Dans l'appareil des angles des murs on trouve auſſi fréquemment des cylindres qui ſe pénetrent dans la même circonſtance, comme on en voit à l'ancien Temple de la Galluce & à l'Egliſe de la *Sapience* à Rome, dont les plans ſont des arcs de cercle inſcrits dans un cercle entier, de ſorte que les murs ſont des portions de cylindre, qui ſe croiſent parallelement à leurs axes; mais cet appareil n'a point de difficulté.

THEOREME XVII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & qui ont un diametre égal & ſemblablement poſé ſur un plan paſſant par leurs axes, eſt une ellipſe; & ſi l'un des cylindres eſt droit & l'autre ſcalene, ou ſi tous les deux ſont ſcalenes & de baſes égales, elle peut être un cercle.

Premierement. Soient deux cylindres AF, FD (*Fig.* 56) égaux entr'eux, la diagonale menée par la rencontre de leurs côtés eſt également inclinée ſur les uns comme ſur les autres; donc le plan paſſant par cette diagonale, & perpendiculairement à celui qui paſſe par leurs axes, coupera les deux cylindres d'une obliquité égale, par conſéquent fera une ellipſe commune à tous les deux. Fig. 56.

Secondement. Si les deux cylindres ſont inégaux, comme KE

Fig. W. & 57. & EN, *Fig.* W *&* 57) ou il y en aura un droit *q t* & un ſcalene, ou ils ſeront tous deux ſcalenes, comme KE: EN (*Fig.* W) dans ce cas il eſt clair que la diagonale BE, menée par la rencontre de leurs côtés KB, LE: & BN, ME, peut être le diametre du cercle de la baſe d'un cylindre ſcalene, & par conſéquent de l'autre, qui a ce cercle auſſi pour baſe, ſoit qu'il ſoit droit comme *q t*, ou ſcalene comme KE, de ſorte qu'il peut être commun aux deux cylindres qui ſe rencontrent.

Troiſiemement. Si la rencontre des cylindres inégaux ne ſe fait pas à leur baſe, il eſt évident que le plan paſſant par la diago-
Fig. W. nale BE (*Fig.* W) menée par les angles de rencontre de leurs côtés KB, LE: & BN, EM, & perpendiculairement au plan paſſant par les axes a C & CP, fera une ellipſe égale dans chaque cylindre, car l'axe BE de l'ellipſe eſt commun aux deux, & l'axe conjugué *x* X eſt ſuppoſé auſſi égal & ſemblablement poſé; donc la ſection ſera une ellipſe commune aux deux cylindres, puiſqu'elle eſt équivalente à deux égales; *ce qu'il falloit démontrer.*

120. Il en ſera de même des ſections des cylindres inégaux; ayant un diametre égal, lorſqu'au lieu de ſe rencontrer ſimple-
Fig. 58. ment par leur extrêmité, ils ſe croiſent, comme à la Figure 58, & ſe pénetrent reciproquement; car la ſection EB ſera commune aux quatre cylindres LEBK, *g* EB*f*, *h* BE*i*, *n* BE*m*, & la ſection AD ſera commune aux quatre cylindres *h* D A *i*, LDAK & *f* AD*g*, *m* AD*n*, qui aboutiſſent les uns aux autres, comme dans le cas précédent; donc BE & AD ſont deux ellipſes; mais ſi les cylindres ſont inégaux, & qu'ils n'ayent pas un diametre égal & ſemblablement poſé, leur ſection commune ne ſera plus une figure plane, comme nous le démontrerons au Theorême ſuivant.

Application à l'uſage.

121. Cette propoſition eſt des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes des *enfourchemens* des voutes les plus uſuelles, qui ſont les berceaux; elle fait voir que lorſqu'ils ſont de même hauteur, quelle que puiſſe être leur largeur, leur ceintre d'enfourchement eſt toujours une ellipſe, ſoit qu'ils aboutiſſent l'un à l'autre perpendiculairement ou obliquement, & alors l'angle de leur rencontre eſt moitié rentrant vers l'angle-
Fig. W. ſaillant de leurs côtés, comme depuis C en B, ce que l'on appelle

pelle alors partie de voute en *arc de cloître*, & moitié ſaillant vers l'angle rentrant des côtés, comme de C en E, ce qu'on appelle partie de *voute d'arête*. Soit que les deux berceaux ſe croiſent, & alors ils ſont tous ſaillans, & font ce que l'on appelle proprement *voute d'arrête*. Fig. 58.

Cette obſervation eſt néceſſaire pour faire connoître la fauſſeté du trait du ceintre ſurhauſſé des voutes d'arrête barlongues dans le Livre de la Coupe des bois du ſieur Blanchard, qu'il fait en tiers-point non-ſeulement dans la Figure de la Planche 17, mais encore dans le diſcours; car il dit, *page 68, que leurs élévations . . . tendent au centre ſuppoſé 18 de ſa Planche 27.*

THEOREME XVIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres droits inégaux qui ſe pénetrent, & dont les axes ſe coupent perpendiculairement, eſt un cicloïmbre.

Soit le cylindre ABED, dont l'axe FG eſt perpendiculaire à l'axe CO d'un autre cylindre plus petit HILK, & dont la baſe eſt le cercle HMIN, ayant ſuppoſé un plan qui paſſe par les deux axes, ſi l'on en ſuppoſe d'autres qui lui ſoient perpendiculaires & à l'axe FG, ces plans qui ſeront paralleles entr'eux feront deux ſections différentes chacun; ſçavoir, un parallelogramme MNQR, dans le cylindre ſupérieur HILK, qu'ils couperont par l'axe, ou parallelement à ſon axe, & un cercle QSRT dans le cylindre inférieur ABED, qu'ils couperont perpendiculairement à ſon axe, leſquelles deux ſections ſe rencontreront en deux points oppoſés RQ, *rq*, qui ſeront par conſéquent communs à la ſurface des deux cylindres, & à la circonférence de la courbe qui eſt formée par l'interſection des deux ſurfaces, auſſi-bien que les points K & L, qui ſont à l'interſection des deux parallelogrammes formés par la ſection du premier plan paſſant par les deux axes des cylindres, de ſorte que cette courbe paſſera néceſſairement par les points KR *r* L d'un côté, & KQ *q* L de l'autre; & ſi l'on joint les points oppoſés par des lignes QR, *qr*, ces lignes ſeront perpendiculaires au plan paſſant par les deux axes des cylindres, qui les coupe en deux également aux points P & *p*, par où paſſe l'axe courbe de la ſection ſolide KP*p*L; or il eſt aiſé de voir que ces ordonnées ſont Fig. 59.

Pl. 1. Fig. 59. paralleles & égales à celles de la baſe du cylindre MN, *mn*; puiſque cette baſe HMIN eſt perpendiculaire au plan paſſant par les axes, auſſi-bien que QR & *qr*, qu'elles ſont entre mêmes paralleles QM, RN, ou *qm*, *rn* qui ſont les côtés du cylindre, étant dans le même plan MR, ou *mr* paſſant par l'axe OP, ou parallelement à cet axe; & s'il reſtoit quelque doute ſur l'égalité des côtés MQ, MR, pour établir le paralleliſme de MN & QR, il n'y a qu'à ſe rappeller l'article 39, où l'on a fait voir que MN étant parallele à la tangente du cercle QSR par S, & les points M & N étant également éloignés du point O, qui eſt dans le diametre TS prolongé, les paralleles à ce dimetre MQ & NR, terminées à la circonférence du cercle, ſeront égales entr'elles; donc les ordonnées QR & *qr* ſont égales aux correſpondantes de la baſe du cylindre dans les mêmes plans MN & *mn*. On prouvera la même choſe de toutes les ordonnées poſſibles; donc la ſection creuſe KLRQ eſt celle que nous avons appellée un *cicloïmbre* par la premiere définition; *ce qu'il falloit démontrer.*

Art. 39.

Art. 75.

Il n'eſt pas néceſſaire d'ajouter que les ordonnées de cette ſection ſolide ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'il eſt évident qu'elles s'éloignent de celui qui paſſeroit par l'axe ſoustendant KL, à meſure qu'elles s'éloignent de ces deux points juſqu'au milieu QR qui répond au diametre MN, perpendiculaire au plan paſſant par les axes des cylindres. Or il eſt aiſé de faire voir dans quelle raiſon elles s'éloignent ou ſe rapprochent de l'axe ſous-tendant KL; car puiſque toutes les ſections faites dans le cylindre AE, par les plans paſſans par les ordonnées de la baſe HMIN au diametre HI, parallelelement à l'axe OP, ſont des cercles égaux à celui de la baſe AD; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide, qui ſont égales à celle de la baſe HMIN, ſont autant de cordes inſcrites dans un cercle égal à la baſe du cylindre AE, qu'on a mis en ſuite de la figure en a*d* par les lignes ponctuées PP^2, pp^2; de ſorte que la profondeur de ces cordes dans le cercle eſt meſurée par la longueur de leurs fleches aP^2, ap^2 égales à SP, *sp*, qui font voir de combien la courbe s'éloigne du plan qui paſſeroit par l'axe KL, ſoustendant de l'axe courbe KP*p*L, à meſure qu'elle approche du milieu de ces deux points communs KL; de ſorte qu'elles augmentent continuellement en longueur dans la raiſon de celle des ordonnées de la baſe HMIN, & de profondeur dans le rap-

port des fleches des doubles ordonnées, inſcrites dans la baſe du cylindre AE ; ou ſi l'on veut prendre les ordonnées pour des ſinus droits, leur profondeur ſera meſurée par les ſinus verſes ; ce qui montre évidemment que toutes les doubles ordonnées priſes enſemble forment une ſurface courbe en façon de tuile creuſe plus ou moins profonde ſelon la grandeur relative des deux cylindres, qui ſe pénetrent perpendiculairement ; de ſorte que s'ils ſont égaux, la ſection eſt la plus profonde qu'elle peut être, parce qu'alors la plus grande ordonnée du milieu, que nous appellons l'axe droit, paſſera par l'axe du cylindre AE, c'eſt-à-dire par le centre C^2 du cercle a R^2 d Q^2, & alors la ſection change de nature, & devient plane comme au Theorême précédent, ſe diviſant en deux parties, qui ſont un angle rentrant KCL.

122. Il reſte à démontrer que tous les diametres de cette ſection ſolide ſont égaux, c'eſt-à-dire toutes les lignes, qui, paſſant par l'axe de profondeur SP, ſont terminées à la circonférence de la courbe. Premierement il eſt clair que l'axe ſoustendant KL = HI eſt auſſi égal à l'axe droit QR = MN = HI, puiſque ce ſont les diametres du même cercle HMIN ; il en ſera de même des diametres W V & u U, qui ſeront entre mêmes paralles W u, & VU & d'une égale profondeur au-deſſous de KL, mais tous hors de la ſurface creuſe formée par les ordonnées, qui forment la circonférence de la ſection, car ils coupent l'axe SP au-deſſus du centre P, par exemple en x ; donc par la définition premiere la ſection ſera un cicloïmbre ; *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 75.

COROLLAIRE I.

123. Non-ſeulement les ordonnées au plan paſſant par KPL, dans lequel eſt l'axe courbe, ſont égales aux correſpondantes ordonnées au diametre HI ; mais encore celles qui ſeroient perpendiculaires au plan paſſant par QSR, dans lequel eſt l'axe droit, ſeroient égales aux paralleles à l'axe HI, correſpondantes dans un plan parallele à l'axe OP, leſquelles renfermeroient une portion cylindrique, terminée par la courbe KRLQ.

Lorſque nous avons dit que tous les diametres du cicloïmbre ſont égaux, nous n'avons entendu parler que des lignes droites, menées d'un point de la courbe à ſon oppoſé, en paſ-

Pl. 5. Fig. 59. sant par l'axe de profondeur SP ; car ſi l'on vouloit appeller diametres les lignes courbes qui paſſent à la ſurface du cylindre par le point S, & les points oppoſés de la circonférence du cicloïmbre, on s'apperçoit bien que de tels diametres ſeroient tous inégaux en longueur & en courbure, le plus grand eſt l'arc de cercle QSR, dont l'axe droit QR eſt terminé à la courbe, & les autres ſeroient des portions d'ellipſe, toujours moins concaves à meſure qu'elles s'éloigneroient de cet arc de cercle, & qu'elles approcheroient de l'axe ſous-tendant KL, où l'arc elliptique ſe change en ligne droite dans la ſuppoſition qu'elles paſſent toutes par le milieu S ; & parce que tous ces arcs inégalement courbes, auroient pour corde des diametres droits égaux entr'eux ; il ſuit que ces courbes ſeroient toutes inégales en longueur développée, c'eſt-à-dire rectifiée.

COROLLAIRE II.

124. D'où il ſuit que le cicloimbre, conſidéré comme une portion de la ſurface du cylindre, étendue en ſurface plane, ſeroit un ovale dont le grand axe ſeroit QSR, & le petit KL.

COROLLAIRE III.

125. Il ſuit encore que plus le cylindre HL ſera petit à l'égard du cylindre AE, moins la ſection ſolide ſera creuſe ; & au contraire plus le cylindre HL ſera grand à l'égard du cylindre AE, plus elle ſera creuſe, ſoit qu'on la conſidere comme portion de la ſurface du cylindre, ou comme une autre ſurface formée par une ſuite d'ordonnées à l'axe courbe KPL ; de ſorte qu'en cas d'égalité, comme nous l'avons dit, la ſection ſolide devient égale à deux moitiés de ſections planes elliptiques, qui ſe rencontrent au diametre paſſant par l'axe FG, parce qu'alors les côtés MQ, NR du cylindre HL deviennent tangens au cylindre AE, & par conſéquent ne le coupent qu'en un point chacun, qui eſt à l'extrêmité du diametre du cylindre AE ; de ſorte que la profondeur ſera SC, qui ne peut être plus grande, parce qu'au cas que le cylindre HL devienne encore plus grand, ce ne ſera plus lui qui pénetrera, mais qui ſera pénetré par le cylindre AE.

On remarque bien auſſi que dans le cas d'égalité des cylindres, les plans des demi-ellipſes qui ſe rencontrent en C, ſe-

coupent à angle droit, puiſque les rayons KS, SL & SC ſont égaux, les angles imaginés en KCS & LCS ſont de 45 degrés; donc KCL ſera de 90, c'eſt-à-dire droit. Pl. 5. Fig. 59.

COROLLAIRE IV.

126. De ce que nous avons dit que la profondeur du cicloïmbre dans le cylindre, étoit meſurée par les fleches des cordes égales aux ordonnées à ſon axe courbe, inſcrites dans la baſe du cylindre, on tire une maniere fort aiſée de trouver autant de points que l'on voudra de ſon axe courbe; car ayant fait un cercle aR^2dQ^2 à côté de la figure, & lui ayant mené par le point a une tangente ra T, perpendiculaire au diametre a d, on portera ſur cette tangente les ordonnées PR, & pr en aT & aZ, & par les poinrs T & Z on menera TR^2, Zr^2 paralleles au diametre a d, qui couperont la circonférence du cercle aux points R^2 r^2, par où menant des paralleles à la tangente aT, on aura ſur le diametre a d qu'elles couperont, les fleches aP^2, ap^2, qui ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondans aux ordonnées MN, mn de la baſe du cylindre HL, égales à celles du cicloïmbre.

Si l'on vouloit trouver ces profondeurs par le calcul, on ſe ſerviroit de la même méthode qu'on a donnée ci-devant au Theorême IX, pour trouver celle de l'ellipſimbre, avec cette différence qu'elle eſt plus aiſée dans celui-ci, parce que toutes les ordonnées s'inſcrivent dans un même cercle, & que pour l'ellipſimbre de ce Theorême, elles devoient toutes être inſcrites dans des cercles inégaux.

Il eſt inutile de faire remarquer que les cicloïmbres oppoſés ſont égaux dans l'immerſion d'un cylindre dans un autre, comme dans ſon émerſion; cette vérité ſe fait ſentir par le parallelisme des côtés de l'un & de l'autre de ces ſolides.

Application à l'uſage.

129. Rien n'eſt plus ordinaire dans les voutes que la courbe dont nous parlons, on voit preſque par-tout les berceaux en plein ceintre, percés de lunettes droites auſſi en plein ceintre, dont les impoſtes ſont à même hauteur que la naiſſance de la voute, comme ſeroient celles de la nef du Val-de-Grace, ſi les

vitraux étoient parfaitement en demi-cercle. On connoît donc par cette propoſition, que la courbe de l'arrête de leur enfourchement eſt un *cicloïmbre*. Cette courbe n'eſt pas moins commune dans l'Architecture militaire; car les ſoupiraux circulaires des ſouterrains en berceaux de niveau & en plein ceintre, & poſés à plomb ſur la clef, ſont des cylindres qui en pénetrent d'autres perpendiculairement ſur leur axe; tels ſont encore les puits des citernes, poſés au milieu des voutes en berceau.

THEOREME XIX.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes ſe coupent obliquement, & qui ſe pénetrent de ſorte que l'un entre dans l'autre de toute ſa circonférence, eſt une ellipſimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi ſemblable à celle de la précédente, qu'on peut l'appercevoir à la ſeule inſpection de la Figure 60; ſoit a *b e d* un cylindre droit, dont l'axe eſt *f g*, pénetré par un autre cylindre *h i k l* plus petit, c'eſt-à-dire d'un moindre diametre, dont l'axe *x* X coupe l'axe *f g* obliquement en C. Ayant ſuppoſé, comme dans la propoſition précédente, un plan qui paſſe par ces axes, il fera pour ſection deux parallelogrammes, dont les interſections des côtés qui ſe couperont en K, L, V, *u* donneront les points K & L, communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe d'autres plans perpendiculaires à celui-ci, qui paſſent par l'axe *x* X, ou parallelement à cet axe comme M *y*; ces plans feront deux ſections différentes; ſçavoir, un parallelogramme MY ou *m y*, dans le cylindre *h l*, & une ellipſe SRT, ou *s r t* dans le cylindre a *d*, dont les interſections R & *r* ſeront communes à la ſurface des deux cylindres, ce qui eſt évident. Si enfin l'on ſuppoſe un autre plan auſſi perpendiculaire au premier, mais paſſant par KL, ou parallelement à a *b* par *h* I, ce plan fera pour ſection dans le cylindre *h* L une ellipſe *h* MIN, dont toutes les ordonnées à l'axe *h* I comme NO, *n o* ſeront égales à toutes les ordonnées RP, *r p* de la ſection ſolide, par les mêmes raiſons que nous avons expliquées fort au long dans la propoſition précédente; car la ligne MN étant (par la ſuppoſition) perpendiculaire à OC, puiſqu'elle eſt l'interſection de deux plans *h* NI, ONYX perpendi-

Fig. 60.

culaires à un troiſieme *h* ILK, elle ſera parallele à la tangente, qui paſſeroit par le point S; donc NR & MQ qui ſont paralleles, étant les côtés du cylindre, & également éloignées du diametre de l'ellipſe SRT prolongé en O, couperont cette ellipſe à des diſtances égales de N & M; donc RQ ſera parallele à NM, elle lui ſera auſſi égale, puiſqu'elle eſt entre mêmes paralleles NY, MZ. On démontre la même choſe de l'ordonnée *r q*, dont toutes les ordonnées à l'axe courbe KPL de la ſection paſſant par KR *r* L, ſont égales à celles de l'ellipſe plane *h*MIN, correſpondantes dans des plans paralleles entr'eux, & à l'axe *x* X du cylindre *h l*; or toutes ces ordonnées PR, *p r* ne ſont pas dans un même plan, puiſqu'elles s'écartent & ſe rapprochent de l'axe ſous-tendant KL, auquel elles viennent ſe terminer à rien aux points K & L donc leur ſomme forme une ſurface creuſe, comme celle du Theorême IX, dont le contour eſt une *ellipſimbre* ſuivant notre définition; *ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 5. Fig. 40.

COROLLAIRE I.

128. On doit tirer les mêmes conſéquences de ce Theorême que du précédent. 1°. Que plus le cylindre *h i* LK ſera grand par rapport au cylindre a *b d e*, la ſection KRLQ ſera plus profonde; de ſorte que ſi les deux cylindres deviennent égaux, elle changera de nature, de ſection ſolide qu'elle étoit, elle deviendra une ſection plane, compoſée de deux ellipſes qui ſe rencontrent au diametre du cylindre a *d* paſſant par l'axe *f g*, au point C & perpendiculairement au plan a *d*, où ſera l'interſection des plans des deux demi-ellipſes, ce qui retombe dans le cas du Theorême XVII & de la Figure 58, où deux cylindres inégaux ont un diametre commun ou ſemblablement poſé à l'égard du plan paſſant par les axes des cylindres.

Et au contraire, plus le cylindre *h l* ſera petit à l'égard de l'autre a *d*, moins la ſection ſera profonde; car puiſque les profondeurs de l'axe courbe ſont déterminées par les fleches, dont les ordonnées de la ſection ſont les cordes inſcrites dans une commune ellipſe, qui a pour grand axe la ſection oblique ST, plus les ordonnées ſeront petites, moins elles entreront dans l'ellipſe, où les plus petites cordes ſont toujours les plus éloignées du centre, de même qu'on l'a dit du cercle.

COROLLAIRE II.

PL. 5. Fig. 60. 129. Nous remarquerons auſſi, comme au Theorême X, que la plus grande profondeur de l'ellipſimbre n'eſt pas au milieu des points K & L, parce que l'axe droit correſpondant au petit axe MN de l'ellipſe *h* MIN eſt plus près de L que de K, l'angle KSP étant plus grand que l'angle LSP, d'où il ſuit que les ordonnées à l'axe courbe KPL, qui ſont en nombre égal à celles de l'ellipſe plane *h* MIN à l'axe *h* I, ſeront plus preſſées d'un côté que de l'autre; ſçavoir, de P en L, que de P en K.

130. La méthode de trouver les profondeurs de la ſection, c'eſt-à-dire les points de ſon axe courbe KPL, eſt tout-à-fait la même que celle du Theorême précédent; la ſeule différence eſt que l'on inſcrit ici dans une ellipſe, qui eſt la ſection oblique du cylindre, les ordonnées qu'on inſcrivoit dans le cercle de ſa baſe.

Fig. 61. Si l'on fait l'ellipſe SDTB (*Fig.* 61) égale à la ſection oblique, qui a pour grand axe ST, ou S *t* de la Fig. 60, & le petit axe BD égal au diametre *b d* de la baſe du cylindre a *d* (*Fig.* 60) enſuite que l'on faſſe la ligne SH, perpendiculaire ſur ST, grand axe, S 1 = PR & S 2 = *p r*, qu'enfin on mene par les points 1 & 2, les lignes 1 R, 2 *r*, paralleles à l'axe ST, qui rencontreront l'ellipſe SRB aux points R & *r*, ces lignes 1 R, 2 *r*, ou leurs égales S *p*, SP, ſont les profondeurs des points de l'axe courbe, correſpondant aux points O & *o* de l'axe *h* I de l'ellipſe *h* MIN (*Fig.* 60.)

Dans le cicloïmbre nous avons trouvé que ces lignes SP, S *p* étoient les ſinus verſes des ſinus droits RP, *rp* ici ce ſont des abſciſſes du diametre ST, leſquelles ſont encore en même
Fig. 62. raiſon que ces ſinus verſes; car ſi l'on fait l'angle LSC (*Fig.* 62) égal à l'angle LSC de la Fig. 60, & S *i* perpendiculaire ſur SC, & que l'on prenne ſur SC les parties SP & S *p*, égales aux abſciſſes de la fig. 61, ſi par ces points P & *p*, on mene PO, & *po* perpendiculaires à la ligne SL, les lignes SO, S *o* ſeront les abſciſſes de *h* I; or il eſt clair que SP : SO :: S *p* : S *o* à cauſe des paralleles *p o*, PO. Si enfin l'on fait l'angle LS *i*, égal à l'angle IH *i*, & que l'on mene des points *o* & O les lignes *of*, OF, perpendiculaires ſur S *i*, les lignes S *f*, SF repréſenteront les abſciſſes du cercle, c'eſt-à-dire les fleches, dont les doubles ordonnées

ordonnées de la ſection ſolide ſont les cordes, ou les ſinus verſes des ordonnées conſidérées comme ſinus droits, leſquelles ſont encore en même raiſon; car SO : SF : : S*o* : S*f* : : SP ; S*p*, *ce qu'il falloit démontrer*, c'eſt-à-dire, que les abſciſſes de l'axe ST de l'ellipſe SRTQ ſont à celles de l'axe *h*I, de l'ellipſe *h*MIN, comme celles-ci ſont à celles du cercle.

Application à l'uſage.

131. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'une & de l'autre ſont ſur un même plan, ou la courbe de l'enfourchement d'un puits ou d'un ſoupirail circulaire, qui rachete un berceau rampant, comme on en voit au Fort S. Jean, à Marſeille, & en pluſieurs fortereſſes.

THÉOREME XX.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonférence; perpendiculairement ou obliquement à ſes côtés, ſans que leurs axes ſe rencontrent, eſt une ellipſimbre.

Pour rendre la figure néceſſaire à l'intelligence de la démonſtration de ce Theorême auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, nous ne ſuppoſerons qu'une tranche du grand cylindre (*Fig.* 63) faite par deux plans paralleles entr'eux, perpendiculaires à ſon axe, & tangens au petit cylindre HILK, que nous ſuppoſons premierement perpendiculaire aux côtés du grand cylindre, enſorte que ſon côté HB tombe à angle droit ſur le côté V*u* du grand cylindre; nous verrons ci-après qu'il peut tomber obliquement ſans qu'il arrive de changement à la ſection ſolide. *Fig.* 63.

Si (comme dans toutes les propoſitions précédentes) nous commençons par ſuppoſer un plan paſſant par l'axe du petit cylindre HL, & perpendiculairement à celui du grand, nous verrons qu'il fera deux ſections différentes; ſçavoir, un parallelogramme HILK dans le petit, & un cercle DVG *u* dans le grand, qui ſe couperont aux points AB, EF, leſquels ſeront par conſéquent communs aux deux ſurfaces des cylindres. Si par deux de ces points A & B, on fait paſſer un ſecond plan

parallele à l'axe du grand cylindre, il fera auſſi deux ſections différentes dans ces deux corps ; ſçavoir, un parallelogramme ST *u* V dans le grand, & une ellipſe AMBN dans le petit qu'il coupe obliquement dont le grand axe ſera AB, & le petit MN, égal au diametre de la baſe HI, & les côtés du parallelogramme ST *u* V ſeront tangents de cette ellipſe à l'extrêmité de ſes axes, & par conſéquent au-dehors du cylindre ; donc il ne peut être la ſection commune aux deux ſurfaces. L'ellipſe AMBN ne peut auſſi être une ſection commune, puiſqu'elle eſt toute au-dedans de la ſurface du grand cylindre, avec laquelle elle n'a de commun que les points A & B ; donc la ſection commune faite par la rencontre des ſurfaces, ſera une courbe différente de ces deux figures avec leſquelles elle doit cependant avoir les points A & B communs, par conſéquent elle ne ſera pas dans un plan, mais une courbe à double courbure ; cependant elle aura toutes les ordonnées à ſon axe courbe égales à celles de l'ellipſe, qui eſt la ſection oblique du petit cylindre par les points communs A & B.

Pour trouver les points par où cet axe courbe paſſe, il eſt plus aiſé dans cette propoſition que dans toutes les précédentes ellipſimbres, puiſqu'il n'eſt pas une courbe inconnue, mais un arc de cercle APB, qui eſt portion de celui de la ſurface du grand cylindre, coupé par un plan perpendiculaire à ſon axe, & paſſant par les points DBAV, ſi le cylindre HL tombe perpendiculairement ſur les côtés du grand.

Ou dans un autre cas cet arc courbe ſera une portion de l'ellipſe faite par un plan paſſant par l'axe du cylindre HL, & coupant obliquement le grand cylindre par les points A & B.

Soient les points RQ & *r q* la rencontre des deux ſurfaces, les ordonnées menées par ces points à la courbe de la ſection ſolide ſeront donc ſur la ſurface du grand cylindre, dont elles ſeront partie des côtés, telles ſont ici PR, *p r*, leſquelles ſeront paralleles & égales aux correſpondantes N C, *n* O dans l'ellipſe plane AMBN ſur des plans paralleles à l'axe *x* X ; car les lignes paſſant par ces points NR, *n r* parallelemens à l'axe *x* X ſont des parties de côtés du cylindre HL, par conſéquent paralleles entr'elles ; mais parce que les doubles ordonnées NM, *n m* ſont paralleles à l'axe du grand cylindre, elles le ſeront auſſi aux côtés du même cylindre ; donc RM & *r m* ſont des parallelogrammes, par conſéquent

$rq = nm$, & RQ = NM; c'eſt-à-dire, que les ordonnées ou doubles ordonnées de la ſection ſolide ſont égales à celles de l'ellipſe plane dont le grand axe eſt le ſous-tendant de l'axe courbe BPA; donc la ſection eſt une ellipſimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

132. D'où il ſuit que cette ellipſimbre eſt beaucoup plus parfaite & plus ſimple que celles des propoſitions précédentes; plus parfaite en ce que ſon axe courbe eſt une portion réguliere de cercle ou d'ellipſe; & plus ſimple en ce que ſes ordonnées ne ſont pas une ſurface différente de celle du grand cylindre, comme dans les ellipſimbres précédentes, & par conſéquent le centre P de cette ſection ſe trouve à la ſurface du cylindre, où eſt auſſi l'axe droit RQ, qu'il diviſe en deux également. Tous les autres diametres courbes qui paſſeront par le centre P ſeront des portions d'ellipſes, dont les cordes ſeront les diametres droits de la ſection, égaux auſſi à ceux de l'ellipſe plane ſous-jacente AMBN.

Au reſte cette ellipſimbre a toutes les propriétés des autres; ſes ordonnées par exemple ſont plus ſerrées d'un côté que de l'autre, excepté qu'elle eſt encore plus ſimple dans les profondeurs de ſon axe courbe, leſquelles ſe trouvent naturellement en faiſant d'un point donné ſur l'axe ſous-tendant a b, mis au bas de la Figure 63, l'angle pOa ou PCa égal, à celui de l'axe xX, avec la ligne AB, & toutes les lignes paralleles à PC, ou pO iront ſe terminer à l'arc de cercle bPA de la baſe du grand cylindre, ſi le petit le traverſe perpendiculairement à ſes côtés, ou à un arc d'ellipſe bPA, s'il le traverſe obliquement, comme à la Figure 64; ſi l'on veut avoir les profondeurs perpendiculaires à l'axe ſous-tendant ba, il ſera bien aiſé d'abbaiſſer des perpendiculaires $p d$, PD ſur cet axe, elles donneront ces profondeurs. *Fig. 64.*

133. Il nous reſte à faire voir que ſoit que le petit cylindre traverſe le grand perpendiculairement à ſes côtés, comme nous l'avons ſuppoſé (*Fig. 63*), ſoit qu'il le traverſe obliquement, la ſection ſera toujours une ellipſimbre, ce qui eſt aſſez clair de ſoi-même; car ſoit que le côté HB tombe d'une façon ou de l'autre ſur VB, le plan VSTu ſera toujours un parallelogramme dans le grand cylindre, & une ellipſe AMBN dans le pe- *Fig. 63.*

tit: la ſeule différence eſt, que la ligne AB (*Fig. 63*) eſt néceſſairement le grand axe de l'ellipſe, & que ſi le cylindre *h* L (*Fig. 64*) eſt oblique ſur le côté AB du grand cylindre, elle peut devenir le petit axe.

134. Nous ſuppoſons dans l'un & l'autre cas le petit cylindre droit: s'il étoit ſcalene, le plan VST *u* pourroit le couper, de maniere que ſa ſection ne ſeroit plus une ellipſe, mais un cercle; & alors la ſection ſolide ne ſeroit plus une ellipſimbre, mais un cycloïmbre, parce que l'axe ſous-tendant *b* a ſeroit
Fig. 64. égal à l'axe droit AB, & toutes les ordonnées de la ſection ſolide & de la plane étant paralleles & égales, les diametres droits ſeroient égaux entr'eux, ce qui eſt la propriété du *cicloïmbre*, qui en conſtitue la différence avec l'ellipſimbre où ils ſont tous inégaux.

135. L'obliquité du petit cylindre ſur les côtés du grand, occaſionne encore une différence dans la maniere de trouver les profondeurs perpendiculaires de la ſection ſolide ſur la ſection plane. Premierement, en ce qu'au lieu d'un arc de cercle pour ſon axe courbe, il faut trouver l'arc de l'ellipſe formée par l'obliquité du plan paſſant par l'axe du petit cylindre de laquelle le grand axe ſera FG & le petit *hi*, baſe du petit cylindre; mais ce n'eſt pas aſſez d'avoir trouvé cet arc *b* a, car les perpendiculaires *p d*, PD, ſur la corde *b* a, ne ſont pas perpendiculaires au plan VST *u* de la Figure 63, lequel eſt parallele à l'axe du grand cylindre, parce que la ligne PD & la parallele *y d* eſt en-
Fig. 64. core inclinée au côté du grand cylindre *d k*; de ſorte que pour trouver cette inclinaiſon il faut faire à part l'angle PD*y* égal à l'angle FCH ou *x* CH de l'axe *x* X avec le côté LH du grand cylindre, la perpendiculaire P*y* ſur le côté D*y* ſera la profondeur que l'on cherche.

COROLLAIRE II.

Fig. 63. 136. D'où il ſuit, comme au Théorême X, que plus le côté HK du petit cylindre approchera de l'extrêmité D du rayon CD, perpendiculaire à l'axe *x* X, plus la ſection ſera allongée, & plus les ſections oppoſées AB, EF ſe rapprocheront, de ſorte que ſi le côté HK devient tangent au cercle DVG *u*, les ſections ſe toucheront au point D; & qu'enfin s'il eſt hors du grand cylindre, elles ſe tronqueront réciproquement, & la

ſection totale ſera compoſée de deux portions d'ellipſimbre, comme nous l'avons dit ailleurs.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbe des arrêtes des lunettes droites ou biaiſes, dont la naiſſance eſt audeſſus des impoſtes d'une voute en berceau, dans laquelle elles ſont pratiquées, ſoit que leurs clefs ne montent pas à la hauteur de celle du berceau, comme ſont celles de la nef du Valde Grace à Paris, & de la Chapelle de Verſailles, ſoit que leurs clefs ſoient de niveau, comme aux traverſes du rampart de Landau à la gorge des tours baſtionnées, ce qui eſt le cas du ſecond Corollaire, où le côté du petit cylindre HK devient tangent au grand au point D; alors il ſe forme une voute d'arrêtes difformes en ce qu'elles ne peuvent pas ſe bornoyer en lignes droites dans les diagonales, comme aux voutes d'arrêtes, dont les clefs & les impoſtes ſont de niveau. En effet, dans celles-ci les interſections ſont des ellipſes planes, comme nous l'avons démontré au Theorême XVII, & dans l'autre cas ce ſont des ellipſimbres, c'eſt-à-dire, des courbes à double courbure, qui ne peuvent être bornoyées en ligne droite, en quelque ſituation que le ſpectateur puiſſe ſe mettre.

Si au lieu de faire attention aux rencontres des ſurfaces concaves des deux cylindres, on conſidere la convexe de l'un & la concave de l'autre, on reconnoîtra la courbe de rencontre d'une tour ronde dans un berceau, ou ſi l'on veut s'arrêter à de petits ouvrages, on remarquera que c'eſt celle d'un pilier rond gothique, qui rachete un chapiteau octogone dans une moulure de cavet, comme on le voit ordinairement aux anciennes Egliſes entre la nef & les bas côtés.

On peut donner un grand nombre d'autres exemples de conſtructions qui ont rapport à ce Theorême, comme ſont les abajours cylindriques qui éclairent des berceaux par une direction qui ne tend pas à leurs axes, comme ſont ceux des voutes ſouterraines des tours baſtionnées de Landau, leſquels ſont fort ſurbaiſſés dans leur orifice, c'eſt-à-dire que ce ſont des cylindres ſcalenes, dont les rencontres avec les cylindres droits des berceaux ſont des courbes à double courbure en ellipſimbres.

On verra au quatrieme Livre, lorſque nous donnerons les

traits des deſcentes biaiſes qui rachetent un berceau, l'uſage du petit triangle DP*y*, qui eſt ſous la Figure 63, pour en trouver la double obliquité.

THEOREME XXI.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres dont l'un ne pénetre l'autre que d'une partie de ſa circonférence, & dont les axes ne ſont pas paralleles, eſt une ellipſimbre *compoſée.*

Soit, comme dans la Figure 63, une tranche de cylindre
Fig. 65. *g* VH *u* (*Fig.* 65) repréſentée en perſpective, laquelle eſt pénetrée par le cylindre HL, qui n'y entre qu'en partie de ſa circonférence, le côté IL étant hors du grand cylindre; je dis que la ſection formée par la rencontre de leurs ſurfaces ſera compoſée de deux portions d'ellipſimbre.

Car ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe *x* X du petit cylindre perpendiculairement à l'axe du grand, il ſera dans l'un un parallelogramme, & dans l'autre un cercle, leſquels ſe coupant aux points A & a marqueront que ces points ſont communs aux deux ſurfaces des cylindres, & ſi par le point D, équidiſtant des points A & a, pris ſur la circonférence du cercle *u d* VD, on fait paſſer deux plans coupans les deux cylindres par les points A & a parallelement à l'axe du grand cylindre, ils feront chacun deux ſections différentes; ſçavoir, un parallelogramme dans le grand cylindre, & une ellipſe dans le cylindre HL, laquelle ſera en partie hors du grand cylindre, & parce que ces plans ſe croiſent en D, leur commune interſection GH ſera une ordonnée commune aux deux ellipſes AHBG & a H *b* G; mais parce que la ſection commune aux deux ſurfaces des cylindres qui ſe coupent, eſt une ellipſimbre, par le Theorême précédent, il ſuit que chaque ſection plane elliptique correſpondra à deux portions d'ellipſimbre qui ſe tronqueront mutuellement, comme les ellipſes avec les ordonnées, dès qu'elles ont un rapport d'égalité dans les plans paralleles à l'axe *x* X, & perpendiculaires au plan paſſant par les points ADa; donc la ſection totale ſera compoſée de deux portions d'ellipſimbre, *ce qu'il falloit à montrer.*

Cependant puiſque par la propoſition précédente la ſection ſolide peut être un cycloimbre, dans le cas où le cylindre qui

en pénetre un plus grand eſt ſcalene, il peut auſſi arriver que la ſection totale ſoit un *cycloïmbre compoſé*. Pl. 5. Fig. 65.

137. Quelle que ſoit la ſection, ſi l'on veut trouver l'ordonnée commune aux deux courbes à laquelle elles ſe terminent réciproquement à leur angle d'inflexion, il n'y a qu'à mener du centre C de la ſection circulaire du cylindre *d* V D *u*, la ligne CF perpendiculaire ſur l'axe *x* X, laquelle coupera les côtés du cylindre HL en E & F; ſur EF comme diametre, ayant fait le demi-cercle ETF, on élevera du point D, ſection des lignes AB, a*b*, la perpendiculaire TD; cette ligne, qu'il faut imaginer couchée ſur les côtés du grand cylindre parallelement à ſon axe, ſera l'ordonnée que l'on cherche; car le point T & ſon oppoſé au diametre, paſſant par l'axe *x* X du cylindre HL, ſeront à ſa circonférence, puiſque ce cercle ETF eſt égal à la baſe, & que la ligne DT eſt à la ſurface du grand cylindre, quoique par la néceſſité de joindre dans la figure les plans qu'on ſuppoſe perpendiculaires entr'eux, elle ne paroiſſe pas dans ſa ſituation, qui ſeroit celle de DH & ſon double en GH.

COROLLAIRE.

138. On tirera la même conſéquence de la différence des inflexions du milieu de l'ellipſimbre compoſée, que dans la propoſition 11, c'eſt-à-dire, que plus & moins le cylindre HL entrera dans l'autre, plus l'inflexion ſera ſenſible: que plus le point D approchera de l'axe, moins elle ſera ſenſible; & que depuis le point D vers F elle fera un angle ſaillant, & au contraire depuis D vers E elle fera un angle rentrant.

Application à l'uſage.

139. On voit par cette propoſition quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une tour ronde qui rachete un berceau de niveau ou rampant, & qu'il n'eſt pas poſſible de ſupprimer les murs de la tour ſous cet enfourchement, lorſqu'elle pénetre le berceau au-delà de la clef, parce que l'angle d'inflexion devenant ſaillant, les *contreclefs* de l'arcade qui devroient ſupporter la tour, pouſſeroient au vuide; au contraire en de-çà de la clef, il ſera facile de faire porter la tour par une arcade, par-

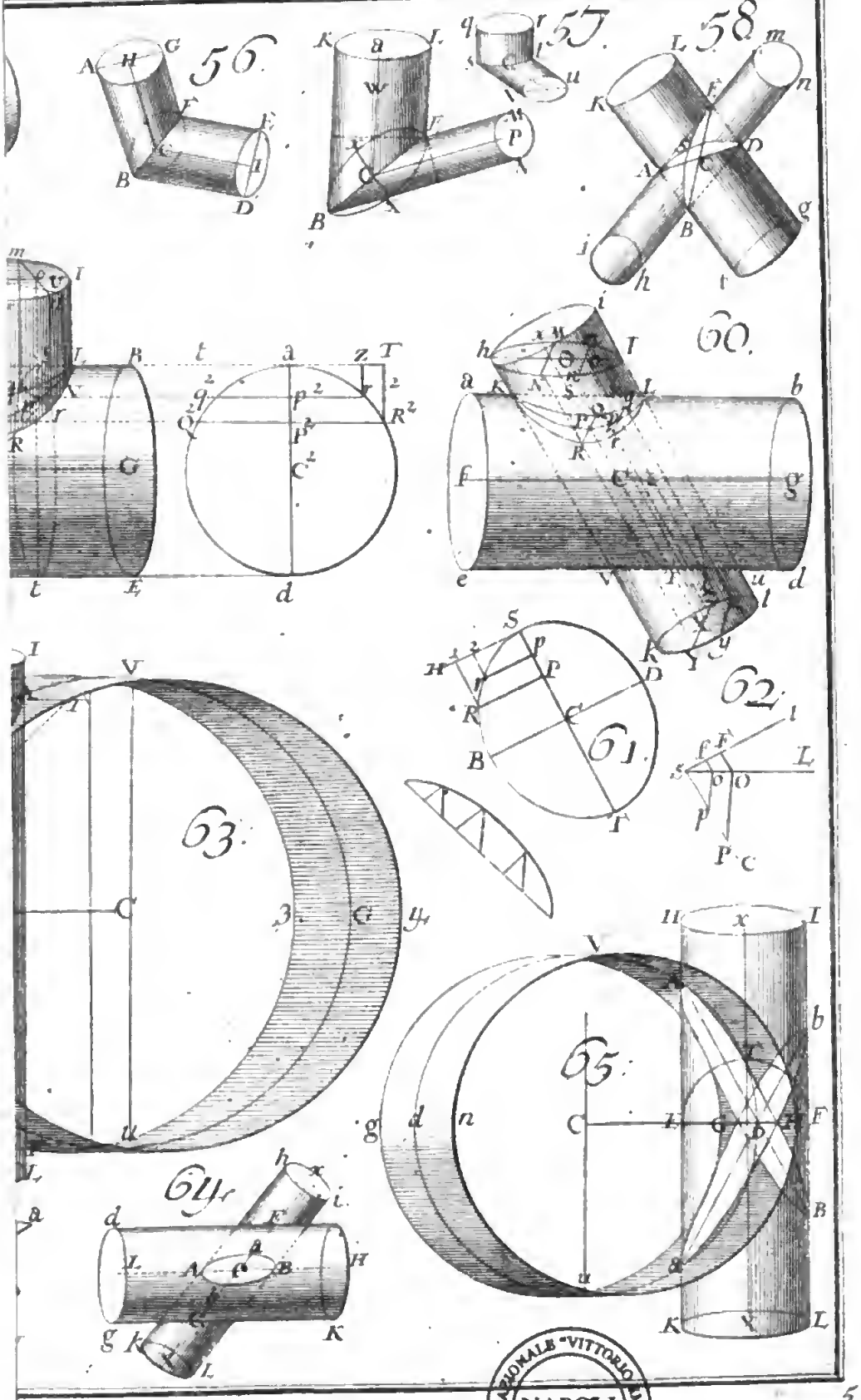
ce que l'angle d'inflexion eſt rentrant, & fait l'effet d'une voute en tiers-point.

REMARQUE.

140. Il eſt conſtant que les ſections des cylindres entr'eux ſont les plus néceſſaires à connoître, parce que les plus communes de toutes les voutes ſont les berceaux circulaires ou ſurhauſſés ou ſurbaiſſés; or quels que ſoient les ceintres de leurs *arcs-droits*, c'eſt-à-dire, des ſections perpendiculaires à leurs axes, tant qu'ils ne varieront que du cercle à l'ellipſe, ou d'une ellipſe à une autre plus ou moins allongée, il n'arrivera aucun changement à la nature des courbes, qui ſe feront par les interſections de leurs ſurfaces, puiſque les cylindres ſurhauſſés ou ſurbaiſſés ſont de vrais cylindres, leſquels au lieu d'être droits, ſont ſcalenes; de ſorte qu'ils peuvent toûjours être coupés de maniere qu'ils auront pour baſe un cercle, comme nous l'avons dit dans les ſections cylindriques, ce qu'il n'eſt pas inutile de répeter, afin qu'on y faſſe attention dans la pratique.

Des Sections faites par la rencontre des ſurfaces des cones & des cylindres qui ſe pénetrent.

141. IL ſemble au premier abord, que ſoit que le cylindre pénetre le cone, ou que le cone pénetre le cylindre, il en doit réſulter une même ſection à leur ſurface. Cependant nous y ferons voir de la différence; dans le premier cas le cone embraſſe le cylindre, & dans le ſecond le cylindre embraſſe le cone. Or quoiqu'un cone d'une grandeur donnée n'embraſſe pas le cylindre donné, il eſt cenſé le faire, lorſqu'étant prolongé il le peut; ainſi les deux axes de ces corps étant paralleles, quoique le cylindre ne coupe qu'une partie du cone, il ne faut pas mettre en queſtion lequel des deux embraſſe l'autre; car il eſt évident qu'en prolongeant les côtés du cone, il s'élargira de maniere qu'il enveloppera le cylindre auſſi prolongé, & la ſection ſera toûjours la même, quoiqu'avant la prolongation elle fut moindre, parce qu'elle étoit imparfaite. Il n'en eſt pas de même



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

même lorſque les axes ſe croiſent ſans ſe rencontrer, la ſection eſt tellement mutilée, que le prolongement du cone ne peut la rendre plus complete.

THEOREME XXII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cone & d'un cylindre droits, ou d'un cone & d'un cylindre ſcalenes de même obliquité ſur leurs baſes, dont les les axes ſe confondent, eſt un cercle.

La démonſtration de cette propoſition eſt ſi aiſée qu'elle ſe préſente d'elle-même ; car puiſque les ſections de ces corps coupés par des plans paralleles à leurs baſes, ſont des cercles, il eſt évident que les ſections FG (*Fig.* 66) & *fg* (*Fig.* 67) ſont paralles aux baſes AB, & a*b*; car les corps étant coupés par un plan paſſant par leurs axes communs SC, KC, les triangles ADF, BEG ſeront égaux; par conſéquent F & G équidiſtans de D & E, (*Fig.* 66.) & dans la Fig. 67, à cauſe des paralleles *hd*, *ie* on aura *be* : *eg* : : *b* C : CS ; & a *d* : *df* : : aC : CS, mais a C = C*b*, & a *d* = *be*, donc *eg* : CS : : *df* : CS, donc *eg* = *df*, par conſéquent *fg* eſt parallele à a*b*, & la ſection faite par un plan paſſant par les points communs *f* & *g*, qui ſera un cercle dans le cylindre comme dans le cone, ſera commune aux deux ſurfaces, dont elle ſera l'interſection à leur rencontre. On peut démontrer la même choſe en ſuppoſant le point R à la circonférence de la ſection ; car on connoîtra (*Fig.* 66) que les trois triangles rectangles en L, SLF, SLG, SLR, qui ont le côté SL commun, & les angles en S égaux, ſont égaux en tout, par conſéquent que les trois lignes LF, LR, LG ſont égales, & dans un même plan *, & les rayons d'un même cercle ; & (*Fig.* 67) à cauſe de l'égalité des rayons de la baſe C a, CP, C *h*, & des triangles ſemblables aCS, F*l*S ; PCS, R*l*S ; *b*CS, *gl*S les lignes *lf*, *l*R, *lg* ſont égales, & dans un même plan parallele à a*b* ; par conſéquent rayons d'un même cercle comme au cone & au cylindre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig. 66 & 67.

* *Eucl. l.* 11. *p.* 5.

142. Quoique les axes du cone & du cylindre ſe confondent dans leur pénétration, ſi l'un de ces deux corps eſt droit & l'autre ſcalene, comme ſi (*Fig.* 68) le cylindre D *d* E *e* étoit droit ſur la baſe circulaire *de*, la ſection ne ſeroit plus un cercle, mais une autre courbe à double courbure.

Fig. 68.

Application à l'uſage.

143. On voit par cette propoſition que le ceintre de l'ébraſement d'une porte étant de même nature que celui de la porte circulaire, droit ou biais, par tête & en plein ceintre, l'arrête d'enfourchement de la partie qui fait berceau avec celle qui eſt ébraſée eſt un cercle, c'eſt-à-dire, une portion de cercle égale à celle de la porte, qui peut être d'une moitié ou d'un arc moindre, comme à celles qui ſont ſimplement bombées.

THEOREME XXIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cone qui ne ſont pas de même nature, c'eſt-à-dire, dont l'un eſt droit & l'autre ſcalene, & dont les axes ſe confondent, eſt une ellipſoïdimbre.

Fig. 68. Soit (*Fig.* 68) le cone BSA ſcalene, pénetré par le cylindre droit DE*ed*, dont l'axe *x*X eſt en partie commun avec l'axe SC du cone. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par ces axes, qui fera deux ſections différentes; ſçavoir, un triangle BSA dans le cone, & un parallelogramme DE*de* dans le cylindre, qui ſe couperont aux points *b* & a; on reconnoîtra que ces deux points ſont communs aux deux ſurfaces, par conſéquent à la circonférence de la ſection. On ſuppoſera enſuite un ſecond plan perpendiculaire au premier, paſſant par *b*a, lequel fera deux ſections différentes; ſçavoir, un cercle dans le cone ſcalene, parce que nous avons démontré que *b*a étoit parallele à la baſe BA (au Theorême précédent) & une ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement, leſquelles figures ſoient repréſentées par leurs moitiés *b g* a, demi-cercle & *b f* a demi-ellipſe, ayant pris un point P à volonté ſur le diametre commun *b*a, on abaiſſera une perpendiculaire P*g* ſur ce diametre, laquelle coupant le cercle & l'ellipſe, donnera les ordonnées de l'un & de l'autre, P*g* pour le cercle, & P*f* pour l'ellipſe. Du même point P ayant mené au ſommet du cone S la ligne PS, & ſur cette ligne une perpendiculaire. PF égale à P*f*; on prendra PF égale à P*f*; par le point F qui appartient à l'ellipſe, on fera paſſer une parallele à *x*X pour repréſenter un côté du cylindre, &

par les points G & S une ligne GS, qui repréſentera le côté du cone, & coupera celui du cylindre en *y*, où ſera un des points de la ſection des deux ſurfaces ; par ce point *y* on menera une parallele *yv* à PG, & une autre *yz* à PS : cette préparation étant faite. Pl. 6. Fig. 68.

A cauſe des triangles ſemblables GSP & G*yz* on aura SP : PG : : *yz* : *z*G, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cone eſt à l'ordonnée de l'ellipſe, comme la profondeur ou diſtance de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la différence des ordonnées du cercle & de la ſection ſolide ; donc cette ſection eſt une *ellipſoïdimbre*, par la quatrieme définition.

Et parce que *y* V eſt parallele à PG, le point V qui eſt dans le plan paſſant par les axes, & les *points b* & *a* ſeront à l'axe courbe *b* V a de l'ellipſoïdimbre. Art. 85.

Quelque point P que l'on prenne dans l'axe, on aura toujours la même conſtruction & la même analogie ; puiſque le plan *b* a étant perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes, toutes les lignes menées du ſommet du cone à la ligne *b* a ſeront perpendiculaires aux ordonnées des ſections de la circulaire *b g* a & de l'ellipſe *b f* a, & parce que les intervalles de ces deux courbes ſont toujours inégaux, les points *y* ſeront toujours inégalement éloignés du plan paſſant par *b* a, où ſont les ordonnées du cercle, qui eſt la ſection conique, de ſorte que le point *y* ſe rejoindra en *b* & en a, ſi les points P ſont pris en *b* & en a.

Application à l'uſage.

144. Cette propoſition fait voir que ſi l'*arc-droit* d'un berceau ou d'une porte eſt en plein ceintre, & qu'on lui faſſe une lunette ou un ébraſement en biais auſſi en plein ceintre, l'arrête d'enfourchement de l'ébraſement & du berceau ſera une courbe à double courbure, de ſorte que les *aplombs*, c'eſt-à-dire les verticales, tirés de pluſieurs de ſes points, ne tomberont pas ſur une ligne droite. La même choſe arrivera, mais en ſens contraire, ſi l'ébraſement eſt ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, & le biais du berceau en plein ceintre par tête.

THEOREME XXIV.

La ſection faite par la pénétration d'un cylindre & d'un cone, dont les axes ſe coupent obliquement, peut être dans un ſeul cas (expoſé ci-après) une ellipſe plane.

Fig. 69. Soit (*Fig.* 69) le triangle BSA, la ſection d'un cone par ſon axe SC, dont la baſe BA eſt indéfiniment prolongée vers D.

Soit EL le diametre de la ſection elliptique, faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe SC, lequel ſoit prolongé juſqu'à la rencontre de la baſe en F, ayant mené par le ſommet S la ligne SD parallele à EL, qui rencontrera la même baſe prolongée en D, ſi l'on fait D *x* moyenne proportionelle entre BD & AD, & qu'on la place de D en *x*, ſur le diametre de la baſe, le point *x* donnera la poſition du pied d'une ligne parallele à l'axe d'un cylindre, laquelle paſſant par le ſommet du cone S, déterminera celle des côtés par les points E & L, en lui menant les paralleles G*g*, K*k*, je dis que la ſection faite par le plan paſſant par EL, perpendiculaire à celui qui paſſera par les axes du cone & du cylindre, ſera l'ellipſe ERL*r*, dont EL ſera le grand axe, & que cette ſection plane ſera commune aux deux corps.

Pour le démontrer, ſoit pris ſur le grand axe EL un point P à volonté, par lequel ayant mené *bi* parallele à la baſe BA, qui coupera le cone aux points *b* & a, & le cylindre aux points *g* & *i*, ſur les lignes *b*a & *gi*, comme diametres, on décrira deux demi-cercles *boa*, *goi*, qui repréſenteront les ſections faites dans le cone & dans le cylindre, par un plan paſſant par P perpendiculairement au triangle par l'angle BSA.

Si du point P on éleve une perpendiculaire PO, qui coupe le cercle du cone en R & celui du cylindre en O, on démontrera que cette ligne eſt une ordonnée commune aux deux cercles & à l'ellipſe ERL*r*; car dans le cone, à cauſe des triangles ſemblables EP*b*, SDB, aPL, LAF & SAD, on aura les analogies ſuivantes; $\left.\begin{matrix} EP : P\,b :: SD : DB \\ PL : P\,a :: SD : DA \end{matrix}\right\}$ donc EP × PL : P*b* × P a = $\overline{PR}^2 : \overline{SD}^2$: DB × DA. Dans le cylindre, à cauſe des triangles ſemblables EP*g*, *i*PL, SD*x*, on aura encore

les analogies ſuivantes; $\left.\begin{matrix} EP : Pg :: SD : Dx \\ PL : Pi :: SD : Dx \end{matrix}\right\}$ donc $EP \times PL : Pg \times Pi = \overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2 : \overline{Dx}^2$, ou ce qui eſt la même choſe à DB × DA. Donc les lignes PO & PR ont même rapport aux lignes PE, PL; donc elles ſont égales & ſe confondent en une terminée en P & en O ou R, qui deviennent un même point; & puiſqu'on peut prouver la même choſe de tous les points P pris à volonté, il ſuit que l'ellipſe du cylindre eſt la même que celle du cone, puiſque les ordonnées à l'axe EL ſeront toujours communes; donc la ſection d'un cone & d'un cylindre dont les axes ſe coupent obliquement, peut être une ellipſe plane, *ce qu'il falloit démontrer.* Pl. 6. Fig. 69.

Hors de ce cas la ſection faite par la pénétration de ces corps ne peut être une figure plane, comme nous le démontrerons dans la ſuite.

COROLLAIRE.

145. Il ſuit de cette propoſition qu'un cone BSA étant donné, & une ellipſe ERL*r* dans ce cône, il eſt facile de trouver le cylindre qui a pour ſection la même ellipſe; puiſqu'ayant trouvé une troiſieme proportionnelle aux lignes BD & DA, on aura ſur la baſe du cone un point *x*, lequel avec le ſommet S détermine la poſition de l'axe du cone, & les points E & L celle des côtés.

Nous donnerons l'inverſe dans les Problêmes, c'eſt-à-dire, la maniere de trouver le cone auquel convient l'ellipſe de la ſection d'un cylindre donné.

Application à l'uſage.

146. Cette propoſition fait voir qu'il faut examiner quelle eſt la poſition du cylindre dans le cone, lorſque les axes ſe coupent obliquement, pour reconnoître ſi la ſection eſt plane ou ſolide, comme elle eſt preſque toujours. Et dans la pratique elle peut être appliquée à la conſtruction d'une arriere-vouſſure conique ou ébraſement biais, rachetant un ceintre ſurhauſſé ou ſurbaiſſé, dont la direction du milieu ſe croiſe avec celle de l'ébraſement.

THEOREME XXV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cone & d'un cylindre qui le pénetre, enſorte que les axes de ces deux corps ſe croiſent, ou ſoient paralleles entr'eux, eſt une ellipſimbre.

Ce Theorême renferme deux cas, & les comprendroit tous en le joignant aux précédens, s'il comprenoit celui où les axes ne ſe rencontrent pas & ne ſont point paralleles; mais il eſt ſi compoſé que nous le laiſſons à la recherche de quelque bon Mathématicien. Cependant quoique ce défaut rende notre théorie un peu imparfaite, la pratique ne s'en reſſentira pas, parce que nous trouverons une maniere Géométrique de trouver autant de points qu'on voudra de la courbe de cette ſection, quoiqu'elle nous ſoit inconnue en général, on ne perd en cela qu'une formule générale d'Algebre qui embraſſe tous les cas.

Premier cas, où les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Fig. 70. Soit (*Fig.* 70) ASB le triangle par l'axe du cone, & IGHK le parallelogramme par l'axe du cylindre, ou un autre plan CDFS paſſant par l'axe SC du cone, & par celui du cylindre xX, ce dernier plan coupera la ſurface du cone ſuivant une ligne droite SP ſuivant laquelle un troiſieme plan perpendiculaire au plan CF ſera ſuppoſé couper le cylindre & toucher le cone, de ſorte qu'il ne fera qu'une ſection dans un des corps; ſçavoir, une ellipſe dans le cylindre, qu'il coupe obliquement en E*m* L M, dont EL ſera le grand axe, lequel eſt dans la ligne SP à la ſurface du cone, auquel cette ellipſe étant tangente, ſera toute au-dehors.

Si par les points M & *m*, N & *n*, pris à volonté ſur la circonférence de cette ellipſe, on mene des lignes QM, *q* N paralleles à l'axe du cylindre xX, prolongées juſqu'à la rencontre de la ſurface du cone, aux points Y & *y*, ces points ſeront à la circonférence de la ſection ſolide, auſſi-bien que les points E & L, de ſorte que la ligne E*y* Y L ſera au contour de la ſection ſolide; & ſi par les mêmes points M & N, ou ceux qu'ils ont

produit à la baſe du cylindre Q R, *qr*, on mene des ordonnées au diametre GH, ou EL, par leſquelles on ſuppoſe des plans YR, *yr*, qui coupent le cylindre & le cone, ils feront deux ſections différentes; ſçavoir, des parallelogrammes *yr* & YR, dans le cylindre, & des cercles ou des ellipſes dans le cône, dont YTV & *ytu* ſeront des arcs; mais parce que les ordonnées M*m* & N*n* ſont tangentes à ces courbes, que les points M & *m* ſont également éloignés du point d'attouchement T & *t*, de même que N & *n*, & que les lignes YM, *y*N, qui ſont les côtés du cylindre, ſont paralleles entr'elles; il ſuit que les ordonnées de la ſection ſolide YV & *yu* ſont paralleles & égales aux ordonnées à l'axe EL de l'ellipſe plane EML*m*, donc la courbe EYLV eſt une ellipſimbre, *ce qu'il falloit demontrer.*

Second cas, où les axes ſont paralleles entr'eux.

Soit ASB le triangle par l'axe du cone, & un plan SFPC paſſant par l'axe X*x* du cylindre GH, ce plan fera deux ſections différentes; ſçavoir, un parallelogramme GH*hg* dans le cylindre, & un triangle a S P dans le cone, dont SP ſera un côté, & par conſéquent à ſa ſurface. Si l'on ſuppoſe un troiſieme plan qui lui ſoit perpendiculaire & tangent au cone, ſuivant la même ligne SP, il fera par ſa ſection dans le cylindre une ellipſe EML*m*, dont l'axe EL ſera partie de cette ligne SP, laquelle ellipſe ſera toute hors du cone & dans le cylindre. Si enſuite on prend à la circonférence des points M & N à volonté, & que par ces points on mene des paralleles à l'axe *x*X, comme MY, N*y*; elles rencontreront la ſurface du cone en quelques points Y & *y*, qui ſeront à la circonférence de la ſection ſolide, puiſqu'ils ſont communs à la ſurface du cone & à celle du cylindre, dont ces lignes ſont les côtés; donc la ligne courbe E*y*Y L eſt celle de la ſection ſolide. *Fig. 71.*

Il reſte à démontrer que les ordonnées à l'axe courbe de cette courbe ſeront égales à celles de l'ellipſe à l'axe EL, ce qui eſt facile par l'application de la démonſtration précédente, dont celle-ci n'eſt qu'une répetition; car les plans paralleles à l'axe du cylindre paſſant par les ordonnées de l'ellipſe plane M*m*, N*n* ſont un parallelogramme dans le cylindre, & des hyperboles ſemblables dans le cone, dont les arcs YTV & *ytu* ſont touchés aux points T & *t* par les ordonnées de l'ellipſe plane

M *m* & N *n*, & les points M & *m*, N & *n*, également distants des points T & *t*; donc, par l'Article 39, les lignes MY, *m* V coupent l'hyperbole à des distances égales de la tangente MT*m*; par conséquent les lignes YV, & *yu* sont paralleles aux lignes M *m* & N *n*, & elles leur sont égales, puisqu'elles sont entre mêmes paralleles, qui sont les côtés du cylindre MY, *m*V; donc la section est une ellipsimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

147. Quant au troisieme cas où les axes ne sont pas paralleles & ne se coupent pas; quoique nous ne déterminions pas la figure qui résulte de la rencontre des surfaces du cone & du cylindre par un Theorême général, nous donnerons dans les problêmes la maniere de trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, en coupant le cone & le cylindre par des plans paralleles entr'eux; mais parce que l'inclinaison de ces plans peut changer quatre fois la courbe de la section du cone, & deux fois celle du cylindre, la rencontre des surfaces des deux corps sera dans l'interfection de différentes sections; quelquefois d'une parabole & d'une ellipse, d'une hyperbole & d'un cercle, de deux ellipses ou de deux cercles, de sorte que la combinaison de ses sections devient fort composée, d'où résulte une si grande variété, que je laisse à quelque Sçavant l'invention d'une formule algébrique, qui donne la solution de tous les cas de cette proposition.

COROLLAIRE.

148. Il suit de la pénétration du cylindre dans le cone, que lorsque leurs axes sont perpendiculaires entr'eux les sections opposées sont égales, & que lorsqu'ils sont obliques, elles sont inégales. Celle qui est plus près du sommet du cone est la plus petite, & son opposée la plus près de la base, la plus grande; cette observation est encore vraie, lorsque les axes ne se coupent pas, & qu'ils ne sont pas paralleles.

Application à l'usage.

149. Cette proposition fait connoître quelle est la courbe de l'enfourchement d'une voute en canoniere, percée de lunettes en berceau, comme il peut arriver au grand escalier du Vatican à Rome, ou celle d'un ébrasement fait au bout d'un berceau

ceau dont la naiſſance ne ſeroit pas de niveau avec celle du plein ceintre de l'ébraſement.

THEOREME XXVI.

La ſection faite par la pénétration d'un cone dans un cylindre eſt une ellipſoïdimbre.

Un cone peut pénétrer un cylindre de ſix manieres.

1°. Lorſque l'axe du cone coupe perpendiculairement celui du cylindre.

2°. Lorſqu'il le coupe obliquement.

3°. Lorſque l'axe du cone ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, & entre dans le cylindre de toute la circonférence de ſon contour.

4°. Lorſque dans les mêmes circonſtances, ſon axe tombe obliquement ſur les côtés du cylindre.

5°. Lorſqu'il ne pénetre le cylindre que d'une partie de ſa circonférence, & que ſon axe tombe perpendiculairement ſur le côté du cylindre.

6°. Enfin lorſqu'il n'y a qu'une partie de ſon contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas la ſection eſt une ellipſoïdimbre de même eſpece, que celle dont nous avons parlé ci-devant au Theorême XXIII.

Pour le premier & ſecond cas. Soit un cylindre D*d* F*f* (*Fig.* 72) pénetré par un cone BAS, dont l'axe CS coupe celui du cylindre KX perpendiculairement ou obliquement. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces deux axes, il coupera le cylindre ſuivant une ligne droite EL, dont les points E, L ſeront communs aux deux ſurfaces, étant à l'interſection du triangle par l'axe fait dans le cone, & du parallelogramme par l'axe du cylindre, à la ſurface duquel ſera la ligne EL. Si l'on ſuppoſe un ſecond plan tangent au cylindre ſuivant la ligne EL, que nous ſuppoſons oblique à l'axe CS, ce plan fera dans le cone une ſection elliptique, dont EL ſera le grand axe; ſi enſuite l'on prend à ſa circonférence autant de points que l'on voudra à volonté, comme M*m*, N*n*, par leſquels on mene des lignes droites au ſommet S du cone, ces lignes rencontreront la ſurface du cylindre en quelques points Y & *y*, leſquels ſeront com- Fig. 72.

Pl. 6. Fig. 72. muns aux deux ſurfaces, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtés du cone & du cylindre; donc la courbe E*y* Y L eſt celle de la ſection ſolide.

Si par les mêmes points M & N on tire des ordonnées à l'axe EL, elles toucheront le cylindre aux points T & *t*, & ſeront perpendiculaires aux lignes TS, *t* S, & les plans qui paſſeront par ces ordonnées feront dans le cone des triangles SM *m*, SN *n*, & des cercles ou des ellipſes dans le cylindre dont YTV, & *ytu* ſeront des arcs, & les ordonnées YV & *yu* de la ſection ſolide, ſeront leurs cordes. Il eſt viſible qu'à la ſection ſolide la plus près de la baſe, ces cordes ſeront plus petites que les ordonnés de l'ellipſe M *m* & N *n*, puiſque les lignes MV, N *u*, *m* Y, *n y* ſont convergentes, en ce qu'elles tendent toutes au ſommet S; or ſi l'on prend leur différence en tirant les lignes *h* Y, HV, & *yo* paralleles à l'axe CS, on aura des triangles ſemblables ST *m*, Y *hm*, & S *tn*, *yon*, dans leſquels on aura les analogies ſuivantes ST : T *m* : : Y *h* : *hm*, & S *t* : *tn* : : *yo* : *on*; c'eſt-à-dire, que la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de l'ellipſe plane eſt à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ou diſtance à l'ordonnée de l'ellipſe plane, eſt à la différence de cette ordonnée avec celle de la ſection ſolide; donc * la courbe E*y* Y L eſt une ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 79.

150. Il paroît inutile de répeter ici ce que nous avons dit de pareilles ſections, que les oppoſées avoient leur axe courbe tourné en ſens contraire, de ſorte que ſi dans l'une la différence des ordonnées de la ſection ſolide & de l'ellipſe plane eſt un excès, dans l'autre elle ſera un défaut, ſans que le rapport des analogies ſoit changé pour cela.

On ſçait encore que le même rapport de cette différence ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport différent à la correſpondante, car il eſt clair que le rapport de *on* à *t n* eſt bien plus petit que celui de *h m* à T *m*; la raiſon eſt que ſi les axes du cone & du cylindre ſe coupent à angle droit, les triangles S *t n*, ST *m* ſont de même hauteur, ayant leurs ſommets en S & leurs baſes inégales, *t n* étant plus petit que T *m*, & ſi les axes ſe coupent obliquement, ces différences de rapport ſubſiſteront encore, comme nous l'avons démontré au Theorême XXV, ce qui comprend le ſecond cas.

151. Dans le troiſieme cas de cette propoſition, ſi l'axe du cone ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur ſon côté, c'eſt-à-dire ſur une ligne priſe à la ſurface du cylindre parallele à ſon axe ; je dis que la courbe eſt encore la même.

Soit (*Fig.* 73) le triangle *b*Sa, qui pénetre le cylindre G*g d*D, dont l'axe SC ne rencontre pas celui du cylindre KX, comme on le voit par le profil où S^2 C^2 ne paſſe pas par le centre *x* du cercle 2*e l*, mais qui tombe perpendiculairement ſur le côté du cone, comme ſi ST eſt perpendiculaire ſur HI: ſi l'on imagine un plan SEL, coupant l'axe du cylindre perpendiculairement à la ligne HI, les points E & L, qui ſont à l'interſection des côtés du cylindre Q*q*, R*r*, & de ceux du cone SE, SL, ſeront communs aux deux ſurfaces, & par conſéquent à la circonférence de la ſection ſolide. Si enſuite on ſuppoſe un ſecond plan paſſant par ces deux points parallelement à l'axe KX du cylindre, il fera deux ſections, l'une dans le cylindre, qui fera un parallelogramme QR*r q*, & une ellipſe EML*m* dans le cone qu'il coupe obliquement, parce que l'axe SC du cone ne paſſe pas par le centre du cercle, qui eſt la ſection faite dans le cylindre par le plan ESL, où il faut remarquer que dans la figure on a repréſenté ce plan en perſpective, enſorte qu'il n'eſt pas perpendiculaire à HI ; pour éviter la confuſion des lignes, & faire voir l'arc ETL partie de ce cercle, qui auroit été confondu en une ligne droite. *Fig.* 75.

Si ſuivant notre méthode on mene des ordonnées M*m*, N*n*, à l'axe EL de l'ellipſe, & que par les points de ſa circonférence MN, *m n*, qui ſont dans le cylindre, on tire des lignes au ſommet du cone S, ces lignes ſeront à ſa ſurface & couperont celle du cylindre (au-deſſous de laquelle les points MN, *m n* ſont enfoncés) en quelques points comme *y*Y, V & *u*, leſquels ſeront à la circonférence de la ſection ſolide, comme il eſt évident, puiſqu'ils ſont à l'interſection des côtés du cone & de ceux du cylindre ; donc la ligne qui paſſera par les points E*y*YLV*u* ſera la courbe de la circonférence de la ſection ſolide.

Maintenant pour trouver le rapport des ordonnées de cette ſection avec celles de l'ellipſe plane EML*m*, qui eſt la ſection oblique du cone par un plan, il n'y a qu'à mener des paralleles aux lignes SP & S*p* par les points Y & *y*, leſquelles retranche- *Fig.* 4

PL. 6. Fig. 59. & Fig. 4. ront des ordonnées de l'ellipſe les différences M*h*, N*o* de leurs excès ſur celle de la ſection ſolide Y*x*, *yz*, & donneront les analogies ſuivantes, à cauſe des triangles ſemblables SPM, Y*h*M & S*p*N, *yo*N, qu'on a répetés à côté de la figure, pour éviter la confuſion des lignes SP : PM :: Y*h* : *h*M ; & S*p* : *p*N :: *yo* : *o*N ; donc la courbe E*y*YL eſt une ellipſoïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

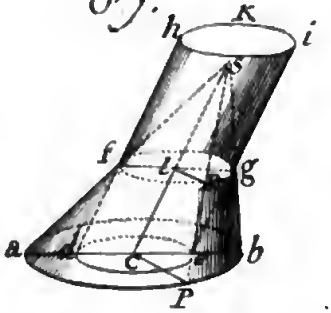
REMARQUE.

152. On voit ici que la différence des ordonnées de la ſection ſolide à l'ellipſe eſt en défaut, comme on a vû dans les exemples des ſections précédentes, dans la partie la plus près de la baſe (*Fig.* 72) ce qui ſemble ſe contrarier, puiſque les ſections oppoſées ſont tournées en ſens contraire ; mais il faut remarquer que dans le cas précédent les points E & L ſont conſidérés poſés ſuivant la longueur du cylindre, enſorte que le plan paſſant par la ligne EL eſt tangent, par conſéquent au dehors du cylindre, & de la ſection ſolide ; & qu'ici au contraire le plan paſſant par EL coupe le cylindre, & ſe trouve au-dedans de la ſection, comme l'on voit au profil à côté de la figure en *e l* qui eſt la corde de l'arc *e*T*l*, de ſorte que l'ellipſe plane à laquelle on la compare, étant différemment ſituée, il n'eſt pas étonnant qu'elle donne des analogies de défaut, quoique la ſection ſoit plus près du ſommet, où elle donneroit de l'excès ſi on l'avoit ſituée comme à la Figure 72, en examinant la ſection qui paſſeroit par *e*T*l* du profil. Au reſte les rapports ſont toujours les mêmes dans chaque plan paſſant par les ordonnées des deux ſections & le ſommet du cone. La diſtance de ce ſommet à l'ordonnée de la ſection plane eſt toujours à cette ordonnée, comme la profondeur de la ſection ſolide eſt à la différence des ordonnées des deux ſections par excès ou par défaut.

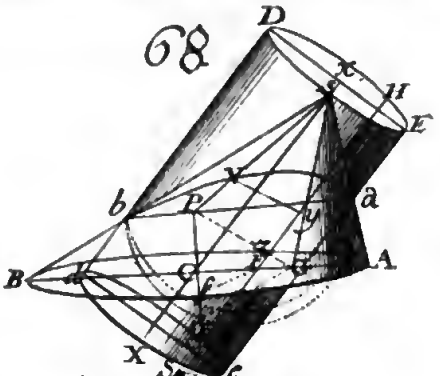
Il eſt aiſé de voir les différences qui peuvent arriver à ces courbes dans les cones ſcalenes, où les ſections planes que nous avons conſidéré comme des ellipſes, peuvent être des cercles.

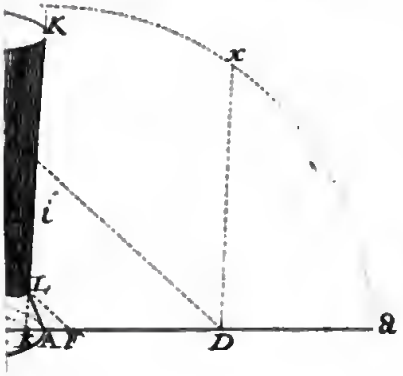
153. *Quatrieme cas*, où l'axe du cone tombe obliquement ſur les côtés du cylindre ; il n'y aura aucune différence de ſection, toute celle qui en peut réſulter, c'eſt qu'il peut arriver que les diametres EL & M*m* deviennent égaux, & que la ſection ſoit une eſpece de cicloïmbre altéré, pour lequel nous n'avons pas fixé de nom.

67.

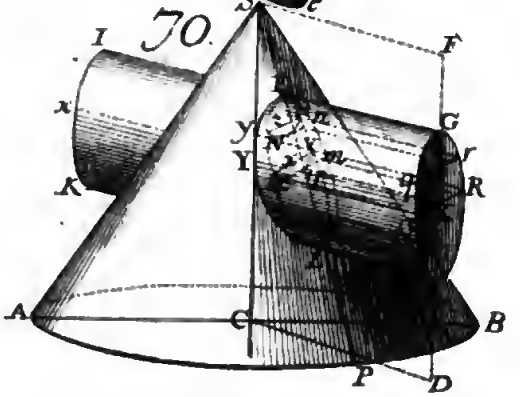


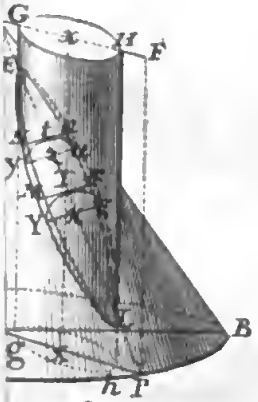
68



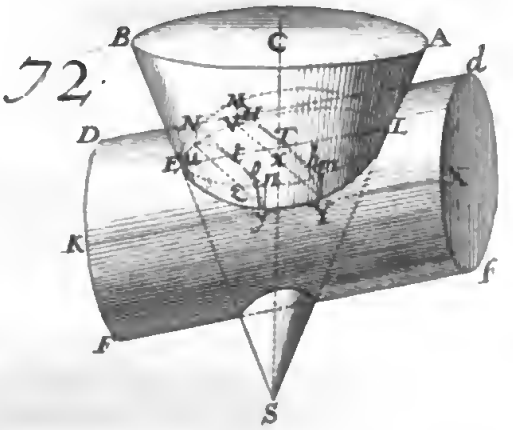


70.

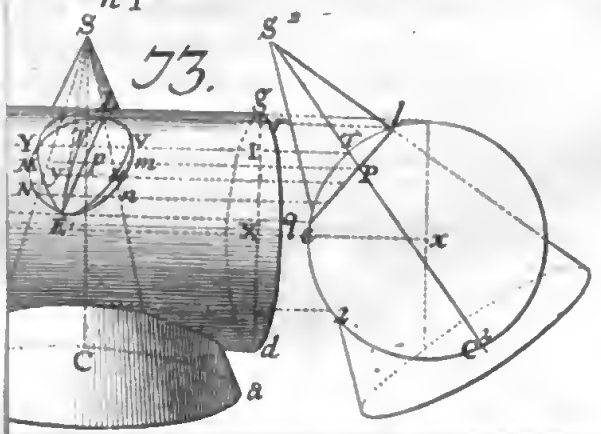




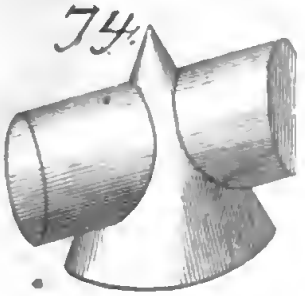
72.



73.



74.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

154. Enfin au cinquieme & au ſixieme cas, ſi l'axe du cone tombe perpendiculairement ou obliquement ſur le côté du cylindre, & que le cone ne le pénetre que d'une partie de ſa circonférence, la ſection ſera compoſée de deux portions de courbes, l'une plus grande que l'autre; parce que celle qui approchera du ſommet ſera plus petite que celle qui ſera plus près de la baſe, comme nous l'avons déja remarqué, & ces courbes feront entr'elles deux angles d'inflexion plus ou moins rentrants, ſelon que la pénétration du cone dans le cylindre ſera plus ou moins profonde; car ſi un de ces côtés touche celui du cylindre, elles ſeront toutes les deux fermées & ſe toucheront en un point, comme nous l'avons dit de toutes les autres ſections compoſées, ce qui ne mérite pas de repétition, avec cette différence que celles-ci ne peuvent pas être égales, quand même les deux côtés du triangle par l'axe du cone toucheroient le cylindre. Et ſi enfin ces deux côtés du cone s'élargiſſent, de ſorte qu'ils ſoient tous les deux hors du cylindre, la ſection change de nature, & retombe dans le cas du Theorême précédent, où le cone embraſſe le cylindre; car il s'agit alors de conſidérer la pénétration du cylindre dans le cone, & non pas celle du cone dans le cylindre, dont nous avons fait la diſtinction au commencement de ce Chapitre.

Application à l'uſage.

155. Cette propoſition fait connoître quelle eſt la courbe de l'arrête d'enfourchement de toutes ſortes de lunettes ébraſées dans des berceaux, ſoit qu'elles ayent leurs naiſſances de niveau avec celle du berceau, & qu'elles ſoient droites, comme au premier cas, ſoit qu'elles ſoient biaiſes, comme au ſecond; ſoit que leurs naiſſances ſoient au-deſſus ou au-deſſous de celle du berceau, comme dans le troiſieme & quatrieme cas, ce qui peut ſouvent arriver; ſoit enfin que la lunette fût priſe en maniere d'abajour en partie hors du berceau, ce qui ne peut guere arriver, à moins qu'on ne voulut le faire exprès par caprice, ou au bout d'un berceau, comme on en voit aux ſouterrains des nouvelles fortifications de Manheim dans le Palatinat.

La Figure 74 fait voir l'effet du cone qui embraſſe le cylindre, enſorte que les deux ſections ſe rapprochent, tellement que ſi le cylindre s'écartoit encore un peu plus du milieu du Fig. 74.

cone, elles n'en feroient plus qu'une composée.

CHAPITRE VII.

Des sections faites par la pénétration des cones entr'eux.

UN cone peut être à l'égard d'un autre cone, de différente grandeur & en différente position; d'où résultent les cas qui changent la nature des sections formées à leurs surfaces, par leur pénétration mutuelle.

La combinaison de leur situation respective peut beaucoup plus varier que celle des cylindres entr'eux, qui sont des corps plus simples, & dont les sections ne peuvent être que de trois especes; celles des cones au contraire peuvent être de cinq especes, qui donnent neuf combinaisons, rejettant les inutiles. Je ne doute pas cependant qu'on ne puisse trouver une formule générale, qui comprendroit tous les cas des sections solides, qui peuvent se faire par la pénétration des cones entr'eux, dans quelque situation que soient leurs axes & leurs côtés, les uns à l'égard des autres: il seroit à souhaiter que quelque Sçavant Algébriste voulut y travailler. Le célebre M. BERNOULLI de Bâle, qui a bien voulu jetter les yeux sur ce petit Ouvrage, & me donner des instructions sur la courbe de la section de l'anneau, m'a dit que le calcul pour la formule générale de l'intersection des cones étoit plus long que difficile; pour moi qui le trouve au-dessus de mes forces, je me contenterai de ce que la Géométrie linéaire pourra nous indiquer suivant notre méthode ordinaire, de la supposition des plans coupans ces corps de différentes façons, & comparant les sections planes aux solides; & quoique je n'en approfondisse pas la Théorie, je fournirai les moyens nécessaires à la pratique pour en trouver les courbes par celui de la projection, ce qui suffit au projet de cet Ouvrage, où l'on s'est borné aux connoissances qui doivent être de quelque usage dans l'Architecture. Je puis aussi dire que les rencontres des voutes coniques entr'elles sont des cas assez rares, comme on le verra au quatrieme Livre; cependant nous ne laisserons rien à désirer de ce qui peut tomber en pratique, quoique nous ne puissions donner ici une Théorie complete sur

cette matiere ; quelque Sçavant pourra peut-être ſuppléer à ce qui manque ici à la curioſité.

THEOREME XXVII.

Les ſections faites par la pénétration de deux cones égaux, dont les axes (s'ils ſont droits) ou les côtés ſemblables (s'il ſont ſcalenes) ſe coupent à diſtances égales de leur ſommet, ſont des ſections planes.

Ce Theorême contient ſept combinaiſons de poſition de cones, qui ſe pénetrent lorſqu'ils ont l'axe commun & qu'ils ſont tournés en ſens contraire.

1°. Lorſque leurs axes ſe confondent & qu'ils ſont tournés en ſens contraire, comme à la Fig. 83. *Fig. 83.*

2°. Lorſque les cones ſont droits & leurs axes paralleles entr'eux. *Fig. 75.*

3°. Lorſque leurs axes ſont inclinés entr'eux, & qu'étant prolongés ils ſe rencontrent au-delà des ſommets. *Fig. 76.*

4°. Lorſqu'étant inclinés ils ſe croiſent au-deſſous des ſommets, & que les côtés oppoſés ſont paralleles entr'eux. *Fig. 77.*

5°. Lorſqu'ils ſe croiſent au-deſſous des ſommets, & que les quatre côtés ſe coupent. *Fig. 78.*

6°. Lorſque les cones étant ſcalenes, les côtés ſemblables & oppoſés ſont parallelles entr'eux, mais tournés en ſens contraire, le ſommet de l'un du côté de la baſe de l'autre. *Fig. 79.*

7°. Lorſqu'étant auſſi ſcalenes ils ſont tournés en ſens contraire, ſeulement à l'égard de la baſe, & qu'ils ont un axe commun. *Fig. 80.*

Au deuxieme & troiſieme cas la ſection HD eſt une hyperbole ; au quatrieme, PR, une parabole ; au cinquieme, EL, & au ſixieme, *b* B, une ellipſe ; & au ſeptieme, SD *d*, un triangle iſoſcele.

DÉMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par les axes des deux cones, il fera, par la ſuppoſition, deux triangles ſemblables & égaux ASB, a *s b* ; & ſi un ſecond plan perpendiculaire à celui-ci, le coupe par le point H d'interſection des côtés SB, *s* a, & des axes CX, *c* X en X, ou parallelement aux axes, s'ils ſont pa- *Fig. 76.*

Fig. 75 & 76. ralleles entr'eux, comme la Figure 75; il eſt clair qu'il retranchera des ſegmens de cercles égaux DE a, DE *b*, dans chaque baſe du cone, puiſque les abſciſſes D a, D *b*, qui ſont les fleches des arcs, ſont égales par la ſuppoſition; mais auſſi il retranchera des ſegmens de cone DH a, DHB, qui ſeront de même hauteur & inclinaiſon ſur ces portions de baſe, puiſqu'il les coupe à diſtances égales des ſommets S & *s* par la ſuppoſition; donc tous les arcs de ces ſegments de cone paralleles à ceux de la baſe comme *f* G, FG, ſeront encore égaux entr'eux, parce qu'ils ſeront coupés en même raiſon dans chaque cone à même diſtance de la baſe; donc ils n'avanceront pas plus d'un côté que de l'autre, & par conſéquent aboutiront au même plan, qui fera deux ſections égales, une à droite dans un cone, & une à gauche dans l'autre, ou pour mieux dire une ſection équivalente à deux.

Quant à la figure de la ſection, il eſt viſible qu'elle ſera déterminée par la poſition du plan coupant perpendiculairement les triangles par les axes, comme s'il n'y avoit qu'un ſeul cone, puiſque ſa poſition à l'égard de l'autre eſt ſuppoſée égale.

Application à l'uſage.

Fig. 75. Cette propoſition conſidérée, 1°. au ſecond & troiſieme cas;
76 & 77. fait voir quelles ſont les arrêtes de rencontre des creneaux paralleles, convergens & divergens, joints enſemble dans une ſeule ouverture intérieure, comme on en voit en pluſieurs vieux Châteaux, & dans les Fortifications modernes aux redoutes de
Fig. 78. Luxembourg & ailleurs. 2°. Au quatrieme & cinquieme cas des cones égaux, dont les axes & les côtés ſe croiſent, on voit quelle eſt la courbe qui ſe forme à l'angle rentrant des enfourchemens des voutes ſphériques fermées en polygones, à leurs diagonales dans la méthode du *trait*, qui ſuppoſe des cones tronqués, inſcrits dans la ſphere, pour y former des panneaux de développement, comme on le verra au Chapitre ſeptieme du quatrieme Livre, où nous ferons voir en quoi conſiſte l'erreur du trait du P. Derand & du P. Deſchalles qui l'a ſuivi, & que M. de la Rue qui l'a connu à peu près n'en a pas apperçû
Fig. 79. la raiſon. 3°. Au ſixiéme cas, cette propoſition fait voir quelle ſeroit la courbe d'arrête d'enfourchement d'une *corne de vache double* exactement faite, comme ſi ſes piédroits étoient ceux d'un biais paſſé. 4°.

4°. Au ſeptieme cas elle fait voir que les trompes coniques que tous les Auteurs de la coupe des pierres mettent aux angles des eſcaliers ſuſpendus à repos, ſont un compoſé de deux cones, qui font un *jarret* à la clef en angle ſaillant ; car la ſection par les points A & a, faite par un plan perpendiculaire aux deux triangles par l'axe commun SX, fait deux ellipſes, l'une AC dans le cone ſcalene ASB, l'autre a*c* dans l'autre cone égal S a *b*, leſquelles ſe croiſent en *m* ou en *i* entre les deux axes *c* H & C *h*, de ſorte que cette ſection eſt une courbe compoſée, telle qu'elle eſt repréſentée en A H *i h* a, & en projection par la droite A *c m* C a. *Fig.* 80.

THEOREME XXVIII.

La ſection faite par la pénétration des cones droits inégaux, dont les axes ſe confondent, ou des cones ſcalenes inégaux, dont les axes ſe confondent, & ſont également inclinés à leurs baſes, eſt un cercle.

La vérité de cette propoſition ſe préſente d'elle-même, & n'a pas beſoin de demonſtration ; car les ſections planes, paralleles à la baſe par les points communs EF & D *d*, *d d*, ſont des cercles communs aux deux cones, ſoit que les baſes ſoient confondues, comme aux Figures 81, 82, ou parallelement éloignées, comme aux Figures 83 & 84. *Fig.* 81, 82, 83 & 84.

THEOREME XXIX.

La ſection faite par la pénétration de deux cones inégaux, mais ſemblables, dont les axes & les côtés ſont paralleles entr'eux, eſt un paraboloïdimbre.

Soit (*Fig.* 85) le triangle A *s* D la ſection par l'axe du petit cone, & BSE celui du grand, & le point P commun aux deux ſurfaces des cones. Si on ſuppoſe un plan qui coupe le premier A *s* D perpendiculairement, ſuivant le côté BS, parallele à A *s*, il touchera le grand cone, & fera dans le petit une parabole qu'on repréſente ici par la courbe P *r* R L, dont l'axe ſera PB, auquel ſi l'on tire à volonté les ordonnées *o r*, OR, & par le ſommet *s* les droites *s r z* & *ſ* R *y*, ces lignes qui ſeront les côtez du petit cone étant prolongées, rencontreront la ſurface du grand BSE en quelques points *z* & *y*, par leſquels on menera des paralleles *z x* & *y* X aux ordonnées *o r* & OR, juſqu'à la rencontre des lignes *s x*, *s* X, tirées du ſommet *s* par *Fig.* 85.

les points *o* & O, & enfin par les mêmes points *r* & R d'autres lignes *rq*, RQ, paralleles à ces mêmes lignes *sx*, *s*X, on aura des triangles ſemblables *rqz* & *sor*, RQ*y* & *s*OR; par conſéquent les mêmes analogies à l'égard de la parabole plane, qu'on a eu dans les Theorémes XXIII & XXV, à l'égard de l'ellipſe; ſçavoir, la diſtance du ſommet du cone à l'ordonnée de la ſection plane eſt à cette même ordonnée, comme la diſtance à celle de la ſection, eſt à la différence des deux ſections; *so* : *or* : : *rq* : *qz*, & *s*O : OR : : RQ : Q*y*; donc la ſection (par la def. 4.) eſt un paraboloïdimbre; *ce qu'il falloit démontrer.*

THEOREME XXX.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones qui ſe pénetrent, dont les axes ſont paralleles, & dont l'un des côtés d'un des triangles par l'axe rencontre celui de l'autre (prolongé s'il le faut) eſt une ellipſoïdimbre.

Soit (*Fig.* 86) les triangles B*s*A & *b*S*a*, la ſection faite par un plan paſſant par les axes de deux cones qui ſe pénetrent, dont les points E & L ſont communs aux deux ſurfaces. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par EL perpendiculairement au premier, il touchera le cone B*s*A, & fera une ellipſe dans l'autre *b*S*a*, qu'il coupe obliquement ſuivant la ligne EL qui en ſera le grand axe, auquel ayant mené des ordonnées *or* & OR à volonté, on tirera par le point S des lignes S*r* & SR, juſqu'à la rencontre de la ſurface du cone B*s*A en *z* & en *y*, ces points ſeront à la circonférence de la ſection ſolide, laquelle ſera la courbe E*zy*L; or faiſant, comme au Theorême précédent *zx*, parallele à *ro*, & *y*X parallele à RO juſqu'à la rencontre des lignes S*o*, SO, tirées du ſommet du cone, & prolongées vers *x* & X, & tirant enſuite des mêmes points *r* & R des lignes *rq* & RQ paralleles aux lignes S*x* & SX, on aura les mêmes analogies à l'égard des ordonnées de l'ellipſe, qu'on a eu dans la propoſition précédente à l'égard de la parabole; ſçavoir, S*o* : *or* : : *rq* : *qz*, & SO : OR : RQ : Q*y*; donc la ſection ſolide eſt une ellipſoïdimbre; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 86.

Nous avons ajouté à l'énoncé de la propoſition, que le côté d'un des triangles par l'axe d'un cone devoit couper celui de l'autre, prolongé (s'il le faut), parce qu'il peut arriver, comme à la Fig. 89, que le côté *s*A du triangle B*s*A ne rencontre pas

le côté Sa de l'autre triangle, mais il le rencontrera ſi l'un & l'autre ſont prolongés vers L, parce que nous ſuppoſons qu'ils ſeront inclinés entr'eux, & non pas paralleles; de ſorte que la ſection ſera toujours la même. La ſeule différence qu'il y aura avec le cas précédent, c'eſt qu'elle ne ſera pas une ellipſoïdimbre complete, mais mutilée, qui ſera défaillante de toute la partie correſpondante à AL de l'axe ſouſtendant EL, laquelle eſt hors du cone.

REMARQUE.

156. Il faut remarquer que, quoique le plan que l'on feroit paſſer par la ligne SE perpendiculairement à celui des triangles par les axes *s*C, S*c*, doive faire une hyperbole dans le cône A*s*B, la ſection ne ſera pas pour cela une hyperboloïdimbre, parce que les côtés A*s* & a S étant divergens vers S, ſont convergens vers L; de ſorte qu'en prolongeant ces côtés, on revient toujours au premier cas de l'ellipſoïdimbre.

THEOREME XXXI.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces des deux cones, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, enſorte que les côtés prolongés de l'un ou de l'autre, ne ſe rencontrent pas au-deſſus & au-deſſous du ſommet d'un d'entr'eux, eſt une ellipſoïdimbre.

La démonſtration de cette propoſition eſt tellement ſemblable à celle de la précédente, qu'on s'eſt contenté d'en mettre ici la figure, pour le cas où les axes ſe coupent perpendiculairement; & la Figure 88 pour celui où ils ſe coupent obliquement; en coupant les cones qui traverſent par des plans tangens aux cones qui ſont pénétrés, comme on a fait ci-devant, il ſera bien aiſé de voir les rapports des ordonnées de la ſection ſolide à celle de la ſection plane; & parce que, ſuivant les conditions du Theorême, ces ſections planes ne peuvent être que des ellipſes ſi les cones ſont droits, ou des cercles s'ils ſont ſcalenes, il ſuit que la ſection ſolide ſera une ellipſoïdimbre, ou eſpece de cicloïmbre élargi ou reſſerré, c'eſt-à-dire une courbe dont les ordonnées ont un excès ou un défaut ſur celles du cercle. Fig. 87 & 88.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des ſections oppoſées; elles ſont ici comme ailleurs les mêmes, diſpo-

ſées en ſens contraire à l'égard du ſommet, & l'une toujours plus petite que l'autre.

On verra par le Theorême ſuivant, la raiſon pour laquelle nous exceptons dans l'énoncé de celui-ci, le cas où les côtés prolongés ſe rencontrent.

THEOREME XXXII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones dont les axes ſe coupent obliquement, & dont un côté d'un des triangles par l'axe rencontre les deux de l'autre triangle qui eſt dans le même plan, ou un des côtés étant prolongé au-deſſus de ſon ſommet, eſt une hyperboloïdimbre dans l'un & l'autre cône.

Fig. 91. Soient (*Fig.* 91) les triangles BSA & DEF les ſections d'un plan paſſant par les deux axes CS & *g* E, des cones qui ſe pénetrent dans une poſition reſpective, où le côté DE rencontre les deux du triangle BSA, l'un SA qu'il coupe naturellement en H, l'autre BS en *y*, parce qu'il eſt prolongé au-delà du point S en *y*; ou bien, où le côté SA du triangle BSA rencontre les deux DE, EF du triangle DEF; ſçavoir, DE en H, & FE prolongé en X.

Si l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui qui paſſe par les axes SC, E*g*, & qui coupent les cones, l'un par HA, l'autre par HD, les ſections qu'ils feront ſeront des hyperboles, dont HA & HD ſeront les axes, & HX, H*y* les axes déterminés, & les mêmes plans qui coupent un cone ſeront tangens de l'autre. Soit une moitié de ces hyperboles la courbe H*r*R, ſur laquelle ayant pris le point *r* à volonté on menera l'ordonnée *r o* à l'axe HD, & par le même point *r* & le ſommet S la ligne S*r*z, cette ligne rencontrera la ſurface de l'autre cone DEF en quelque point z, qui ſera à la circonférence de la courbe de la ſection ſolide qui paſſera par le point H, commun aux deux ſurfaces, & par le point z qui leur eſt auſſi commun, puiſqu'il eſt la rencontre du côté du cone BSA avec la ſurface de l'autre DEF. Or parce que la ligne S*r*z, part du même point S, que la ligne SA, ces lignes s'écartent & ſont divergentes, de ſorte qu'on peut ſuppoſer, comme aux Theorêmes précédens, une ligne parallele à SA, & tirée du point *r*, juſqu'à la rencontre de la ligne z*x*, ce qu'on n'a pû faire bien nettement dans la figure pour éviter la confuſion des lignes, mais qu'on peut
Fig. 90. bien ſe repréſenter par la Figure 90 miſe à côté, où *h x* repré-

ſente HD, & l'on aura des triangles ſemblables *sor*; *rqz*; donc S*o* ou E*o* : *or* :: *rq* : *qz*; par conſéquent la courbe qui paſſera par *hz*, ſur la ſurface des cones, ſera une hyperboloïdimbre, *ce qu'il falloit démontrer.*

Il en ſera de même à l'égard de l'autre cone, & cette ſection commune variera ſuivant la différence des grandeurs reſpectives des deux cones.

THEOREME XXXIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cones dont les axes ſe coupent obliquement, & dont un des côtés des triangles par l'axe eſt parllele à un des côtés de l'autre triangle de la ſection par l'axe de l'autre cone, eſt une courbe équivalemment différente dans chaque cone; ſçavoir, une hyperboloïdimbre dans l'un des cones, & une paraboloïdimbre dans l'autre, ſelon que l'un des deux cones ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par l'autre, dans l'allignement de ces côtés.

Soient (*Fig.* 92) les triangles BSA & DEF les ſections de deux cones, coupés par un plan qui paſſe par leurs axes *c*S, CE, leſquels étant prolongés vers K ſe coupent obliquement. Soit auſſi le côté DE parallele au côté BS; il faut démontrer que la courbe H*x*, qui eſt faite par l'interſection des ſurfaces de ces deux cones, a des rapports d'excès & de défaut avec les ſections planes faites par des plans tangens aux côtés des cones SA & DE, ce qui ſe fera de la même maniere qu'à la propoſition précédente; car le plan tangent par DE fera une parabole dans le cone BSA, & le plan tangent en SA fera une hyperbole dans le cone DEF, dont YH eſt l'axe déterminé, & HI l'axe prolongé. Or ſi l'on prend dans le contour de ces courbes différentes un point *r*, par lequel & par le ſommet on tire une ligne *Srz*, qui rencontre la ſurface de l'autre cone en *z*, la courbe qui paſſera par H & *z* ſera celle de l'interſection des deux corps; mais du même point *z* menant au ſommet E une ligne *z*E, cette ligne qui ſera un côté du cone DE*f* paſſera à la circonférence de l'hyperbole, dont HI eſt l'axe & ſon ordonnée, c'eſt-à-dire la perpendiculaire menée du point *z* au plan paſſant par les axes, aura un rapport d'excès ou de défaut avec cette hyperbole, qui ſera proportionné à la profondeur *Fig.* 92.

de la ſection ſolide, c'eſt-à-dire à la diſtance du plan de l'hyperbole, meſurée dans un plan paſſant par les ordonnées correſpondantes & le ſommet du cone; donc cette ſection ſera une paraboloïdimbre, conſidérée comme étant dans le cone DEF, & une hyperboloïdimbre, conſidérée dans le cone BSA; *ce qu'il falloit démontrer.*

Il faut ici que l'imagination aide un peu à la Figure, qui ne peut bien repréſenter le relief.

Il nous reſteroit à déterminer la courbe qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des cones dont les axes ne ſe coupent pas & ne ſont pas paralleles; mais ſans qu'il ſoit beſoin d'un Theorême général, nous pouvons en trouver autant de points que nous voudrons pour chaque poſition reſpective de cones donnés; ce qui ſuffit à la pratique, puiſque nous démontrerons que chacuns de ces points ſont bien trouvés, comme on le verra au Livre ſuivant.

Nous n'ajouterons rien ici des ſections compoſées de deux portions de courbes qui ſe mutilent réciproquement, lorſqu'un cone n'en pénetre un autre que d'une partie de ſa circonférence; nous en avons aſſez dit aux Theorêmes XXI & XXVII, où nous avons auſſi fait remarquer que ces parties de ſections ſont toujours inégales; celle qui approche le plus du ſommet étant toujours la plus petite.

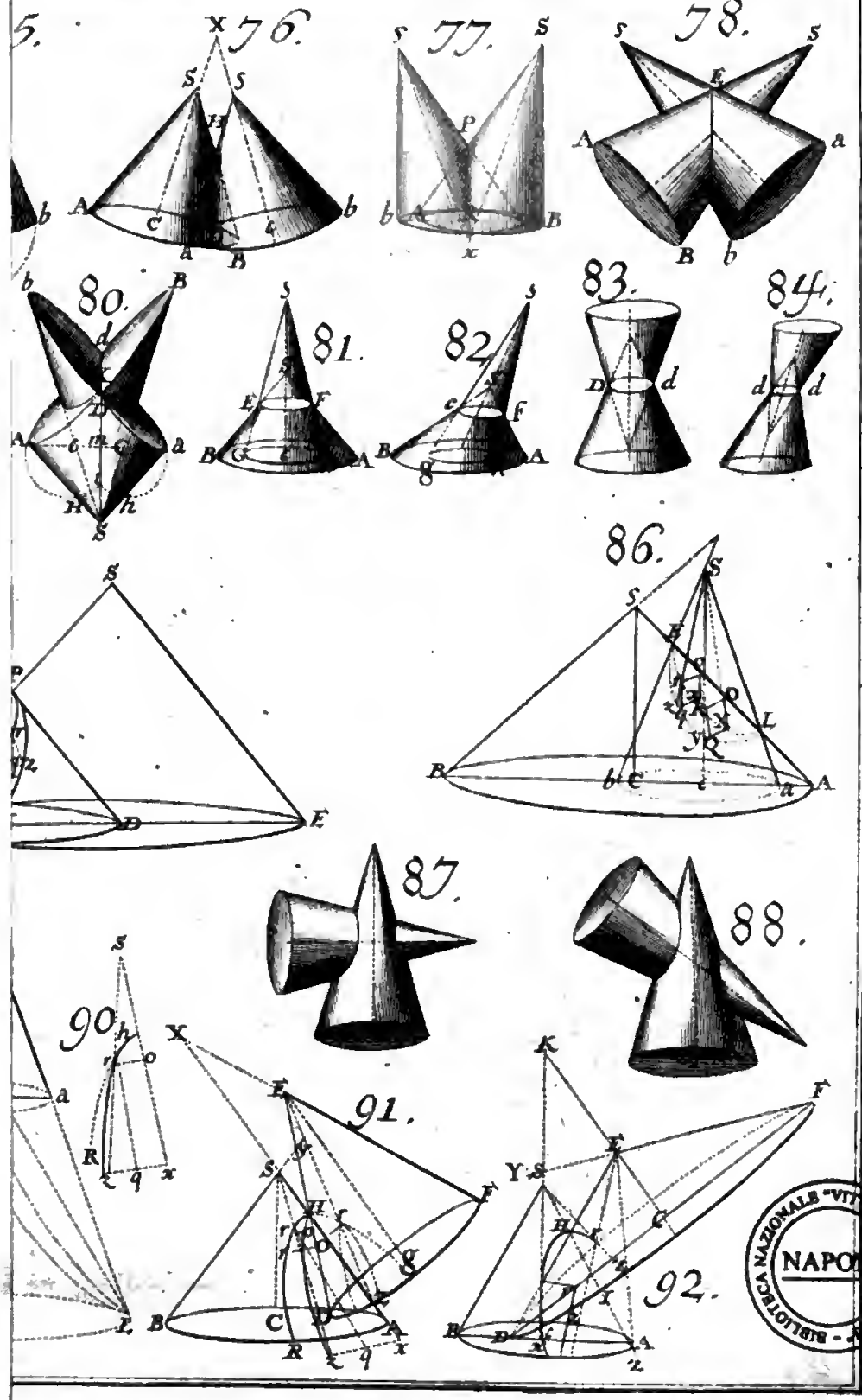
USAGE.

157. Les rencontres des voutes coniques entr'elles tombent rarement dans la pratique, nous n'en trouvons d'exemples que dans les trompes & voutes coniques qui rachetent une tour ronde & en talud, dans les lunettes ébraſées d'une voute en canoniere, ou dans les creneaux qui ſe croiſent, ce qui eſt de peu d'uſage & de peu de conſéquence.

CHAPITRE VIII.

Des ſections faites à la ſurface des ſphéroïdes pénetrés par des ſpheres, cones ou cylindres.

Fig. 93. & 54. NOus avons diſtingué au Chapitre IV différentes ſortes de ſphéroïdes; mais nous ne parlons ici que des plus réguliers, qui ſont faits par la révolution d'une demi-ellipſe ſur un



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

de ſes axes; ſçavoir, de *l'oblong* PL*p* (*Fig.* 93) ſur le grand axe P*p*, & de *l'applati*, ſur le petit axe AL comme *p t p* (*Fig.* 94.)

THEOREME XXXIV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde avec celle d'une ſphere, d'un cylindre & d'un cone qui le pénetrent, ou qui en ſont pénetrés, de maniere que les axes de ces corps ſe confondent, eſt un cercle.

Cette propoſition eſt claire, ſi l'on fait attention à la génération de ces corps, car:

1°. Pour le ſphéroïde & la ſphere, puiſque le ſphéroïde eſt formé par la révolution d'une demi-ellipſe DBE ou *d b e* ſur ſon grand axe DE, ou ſur le petit *d e*, & la ſphere par celle d'un demi-cercle PF*p*, l'ordonnée MO ou *m i* à l'axe commun D*e*, auquel elle eſt perpendiculaire, étant commune au ſphéroïde & à la ſphere, formera par ſa révolution autour de ſon point M ou *m* immobile, un cercle qui ſera commun à la ſphere & au ſphéroïde, dont la circonférence ſera à la ſurface de l'un & de l'autre, par conſéquent à leur interſection; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 95.

2°. Le même raiſonnement s'applique naturellement à l'interſection des ſurfaces du ſphéroïde & du cylindre droit (*Fig.* 96) puiſque ce dernier eſt formé par la révolution d'un parallelogramme rectangle MO *i m*, ſur ſon côté M*m*; or dans la ſuppoſition que ce côté qui eſt l'axe du cylindre, ſe confond avec les axes du ſphéroïde, ſoit applatti comme *d b e*, ou allongé comme DBE, il eſt viſible que les côtés MO & *m i* ſont des ordonnées communes, dont la révolution fait un cercle, qui ſera l'interſection commune de ces deux corps. *Fig.* 96.

3°. Il en ſera de même de l'interſection d'un ſphéroïde & d'un cone droit, qui eſt formé par la révolution d'un triangle rectangle SCF ou *s c f*, ſur ſon côté SC ou *s c*, qui en devient l'axe, paſſant par les axes des ellipſes qui engendrent le ſphéroïde, les ordonnées MO & *m i* ſeront les rayons des cercles dont la circonférence ſera l'interſection des deux ſurfaces, ſoit que le ſommet S du cone ſoit au-dehors du ſphéroïde ou au-dedans, comme KCF (*Fig.* 97.) auquel cas l'ordonnée commune eſt *n h* ou V*u*: Fig. 98. *Fig.* 97. & 98.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir que l'arrête d'enfourchement d'une lunette en berceau ou ébraſée, qui rachete une voute en cul-de four ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, dont les impoſtes ſont de niveau à celle de la voute, & dont la direction, c'eſt-à-dire celle de leurs axes, tend au centre du cul-de-four, eſt une circonférence de cercle, en termes de l'art, un plein ceintre.

Fig. 95. De même que l'arrête d'enfourchement d'une niche ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou plutôt renfoncée ou applatie par ſon plan horiſontal dans une voute ſphérique, avec les mêmes circonſtances de direction de ſon axe au centre de cette voute eſt un cercle, ce qui n'eſt pas rare dans les bâtimens.

THEOREME XXXV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un ſphéroïde, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere, eſt une eſpece d'ellipſoïdimbre, c'eſt-à-dire, une courbe à double courbure, dont on peut marquer quelque rapport conſtant à une ellipſe.

Fig. 101. Soit une ſphere ABRN, pénetrée par un ſphéroïde APBL*p*; dont l'axe P*p* ne paſſe pas par le centre C de la ſphere. Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par le centre & par l'axe du ſphéroïde, il fera pour ſection un cercle dans la ſphere, & une ellipſe dans le ſphéroïde, par le Theorême V, dont l'interſection qui eſt aux points A & B, marquera que ces points ſont communs aux deux ſurfaces, mais non pas les autres points de ces deux courbes, qui ſont l'une en-dedans de la ſphere, l'autre au-dehors du ſphéroïde, de ſorte que ni l'une ni l'autre de ces ſections ne peut être commune à la ſphere & au ſphéroïde.

Préſentement ſi l'on veut lui chercher quelque rapport avec d'autres courbes planes; il faut ſuppoſer un plan perpendiculaire au premier (comme nous avons fait juſqu'ici) paſſant par les points communs A & B, lequel fera deux ſections de même eſpece que les précédentes; ſçavoir, une ellipſe AKB dans le ſphéroïde, & un cercle AMB dans la ſphere, repréſentés ici en perſpective; d'où il ſuit évidemment que la commune ſection de

de ces deux ſurfaces eſt une courbe à double courbure, puiſqu'elle ne peut être en même-tems cercle & ellipſe, & cette courbe étant tournée du côté du pole P du ſphéroïde, a des ordonnées à ſon axe courbe AYB, toujours moindres que celles de l'Ellipſe plane de la ſection faite par les points communs A & B dans le rapport des ordonnées à l'axe P *p* du ſphéroïde, qui paſſe l'un par l'axe ſouſtendant AB, l'autre par l'axe courbe AYB. Pl. 8. Fig. 101.

On pourroit conſidérer le ſphéroïde comme une infinité de petits cones tronqués (*Fig.* 101) faits par la ſection de pluſieurs plans *e e*, perpendiculaires à ſon axe P *p*, & c'eſt ainſi en effet qu'on le réduit le plus ſouvent pour la pratique de la Coupe des Pierres; ces cones tronqués auroient tous leur ſommet ſur l'axe P *p* prolongé par exemple en S, & les côtés du cone *f e*, *f e* ſeroient tangentes au ſphéroïde. Alors on pourroit trouver la courbe de la ſection ſolide par les analogies de celle du cone dans la ſphere, comme au Theorême XIV; mais à chaque cone on auroit un nouveau ſommet S, & parce que le nombre de ces cones à la ſurface du ſphéroïde eſt infini, il y auroit autant de ſommets que de points dans l'axe prolongé, de ſorte que la courbe de cette ſection n'eſt pas de la même eſpece que l'ellipſoïdimbre telle que nous l'avons défini.

Cependant elle y a quelque rapport, la différence eſt que les ordonnées à l'axe de l'ellipſe, & celles à l'axe courbe de la ſection ſolide n'ont pas des excès ou des défauts les unes à l'égard des autres en raiſon arithmétique, comme les côtés du triangle, mais en raiſon géométrique, comme les racines des quarrés des ordonnées des ellipſes planes, faites par des plans paſſant par ces ordonnées & l'extrêmité de l'axe du ſphéroïde, ce que l'on va démontrer comme il ſuit.

Ayant ſuppoſé comme ci-devant le ſphéroïde APL *p* (*Fig.* 101) qui pénetre une ſphere ABRN, & que les points A & B ſont communs à leurs ſurfaces, ſoit AKB *h* l'ellipſe faite par la ſection d'un plan paſſant par AB perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du ſphéroïde & le centre C de la ſphere. Soit auſſi AMB *m* le cercle fait par la ſection du même plan dans la ſphere.

Si par le centre C on tire une perpendiculaire CE à l'axe P *p*, elle le coupera au point D, duquel pour centre & pour rayon DH ou DN, moitié de HN conſidérée comme corde de la

Fig. 101. ſphere, ayant décrit un demi-cercle HEN, il rencontrera en x la demi-ellipſe PAp du ſphéroïde, & donnera ainſi un point x commun aux deux ſurfaces, par lequel menant une perpendiculaire xy à l'axe Pp, on aura xy pour ordonnée de la ſection ſolide. Mais parce que la ſection plane paſſant par A & B coupe l'axe au point g, l'intervalle gy ſera la différence des profondeurs des deux ſections dans la ſphere, & la ligne Fg, perpendiculaire, à Pp, ſera l'ordonnée de la ſection circulaire de la ſphere, & Gg celle de l'ellipſe dans le ſphéroïde. Or, par la propriété de l'ellipſe, $Py \times yp : Pg \times gp :: \overline{xy}^2 : \overline{Gg}^2$, donc ſi l'on connoît la longueur des ordonnées on trouvera leur diſtance, & ſi on connoît leur diſtance, c'eſt-à-dire la profondeur de l'axe courbe à la ſection plane par AB, on connoîtra les longueurs des ordonnées, & par conſéquent leur différence.

Il en ſera de même ſi par le point P on fait paſſer un plan par les ordonnées or de la ſection ſolide, & nq de l'ellipſe plane, leſquelles ſont ici exprimées en façon de perſpective à l'égard du cercle AMB & de l'ellipſe AKB, qui ſont repréſentés de même, parce que ces deux plans étant en partie confondus enſemble, & ayant le diametre commun AB, ſeroient auſſi confondus avec ce diametre, ſi l'on n'aidoit un peu l'imagination.

Pour voir ces ordonnées plus diſtinctement, il faut les conſidérer, comme ci-devant, dans un plan perpendiculaire au premier PANR, & paſſant par le pole P, comme PR, alors faiſant un demi-cercle IQR ſur IR, corde de la ſphere, & une demi-ellipſe PVL ſur PL, comme grand axe, dont u eſt le centre, & ſur uZ, moyenne proportionelle entre xu & ut, pour moitié du petit axe, l'interſection V du demi-cercle IQR, & de la demi-ellipſe PVL donnera un point V de la ſection ſolide, duquel abaiſſant une perpendiculaire Vo ſur PR, on aura le point o à l'axe courbe de cette ſection, & le point n à l'axe droit, par une analogie ſemblable à la précédente $Po \times oL : Pn \times nL :: oV : nz$.

COROLLAIRE.

158. D'où il ſuit qu'on peut trouver autant de points qu'on veut de l'axe courbe, & leur diſtance à l'axe droit, ſur un plan paſſant par le point P perpendiculairement au plan paſſant par

l'axe P*p* du ſphéroïde & le centre C de la ſphere ; puiſque nous avons démontré au Theorême V. que toutes les ſections planes des ſphéroïdes, leſquelles ſont obliques à leurs axes ſont des ellipſes, & que celles de la ſphere ſont des cercles, on aura toujours à l'interſection de ces deux courbes un point commun, qui ſera à la circonférence de la ſection ſolide.

USAGE.

159. Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe de l'enfourchement d'une niche renfoncée ou raplatie dans une voute ſphérique, ſi les impoſtes ne ſont pas de niveau, c'eſt-à-dire, que l'un des deux ſoit au-deſſus ou au-deſſous de l'autre, quoique chacune ſoit de niveau entr'elles, ou que les unes ſoient de niveau, & les autres rampantes ; alors la courbe de l'arrête qui ſe fait à la rencontre des deux ſurfaces, eſt une courbe à double courbure, dont les *aplombs* ne ſont pas dans une ligne droite, comme au Theorême précédent, & cette courbe a quelque rapport avec celle que nous avons appellée ellipſoïdimbre, parce que les ordonnées à ſon axe courbe ont toujours un rapport connu avec celle de la ſection elliptique ou ſphéroïde, coupée par un plan paſſant par AB.

La même choſe arrivera ſi les niches, au lieu d'être renfoncées ou raplaties horiſontalement, étoient ſurhauſſées ou ſurbaiſſées verticalement ; la ſeule différence qu'il peut y avoir eſt le changement du rapport des ordonnées qui ont dans un cas, un excès ſur celles de l'ellipſe, & dans l'autre un défaut ; mais toujours en même proportion.

THEOREME XXXVI.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre droit & d'un ſphéroïde, dont l'axe eſt perpendiculaire à celui du cylindre, eſt un cicloïmbre.

Soit un cylindre AB*b*a, dont l'axe *m n*, prolongé en C & *c*, eſt perpendiculaire à celui d'un ſphéroïde allongé P*fpg* formé par la révolution de la demi-ellipſe P*fp* ſur ſon grand axe P*p* ou applati P*dpe*, formé par une ſemblable révolution ſur le petit axe P O*cp*. Ayant ſuppoſé ces corps coupés par un plan paſſant par leurs axes, & une ſeconde fois par un autre plan per- *Fig. 59.*

Fig. 99. pendiculaire au premier, & paſſant par les points A & B, a & *b* communs aux deux ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde, on reconnoîtra que cette ſeconde ſection ſera un cercle dans le cylindre & une ellipſe dans le ſphéroïde, laquelle ſera ſemblable à celle de ſa ſection par l'axe P*p*. La rencontre des deux ſurfaces n'eſt donc pas dans un plan, puiſque l'ellipſe eſt hors du cylindre, & le cercle au-dedans du ſphéroïde; cependant elle doit paſſer par les points A & B ou *a* & *b*.

Suppoſant un troiſieme plan perpendiculaire au premier, paſſant par l'axe du cylindre, ou parallelement à cet axe, il ſera un cercle dans chaque ſphéroïde, & un parallelogramme dans le cylindre. Soit le quart d'un de ces cercles *d*H ou *g h*, & le point X ou *x*, celui où il rencontre le côté du cylindre, ce point ſera commun aux deux ſurfaces, d'où ſi l'on abaiſſe la perpendiculaire XY ou *x y* ſur l'axe C*c*, qui le coupera en Y ou en *y*, ce point ſera un de ceux de l'axe courbe AYB ou a*y b* de la ſection ſolide; mais parce que toutes les ordonnées à cet axe ſont perpendiculaires aux côtés du cylindre, & qu'elles ſe terminent toutes à ſa circonférence, il ſuit qu'elles ſont toutes égales & paralleles à celles de ſa baſe, ce qui eſt évident; donc tous les diametres droits ſeront auſſi paralleles & égaux à ceux de la baſe du cylindre, comme nous l'avons démontré en pareil cas au Theorême XVIII, donc la ſection ſolide eſt un cicloïmbre; *ce qu'il falloit démontrer.*

La différence qu'il y a de celui qui ſe fait à la rencontre des ſpheroïdes différemment poſés à l'égard du grand ou petit axe, eſt que le cicloïmbre, fait à la rencontre des ſurfaces du cylindre & du ſphéroïde allongé, s'approche du grand axe en creuſant pour ainſi dire dans ce ſphéroïde, & qu'à celle du ſphéroïde applati, il s'éloigne du petit axe en s'approchant de la ſurface, comme on le voit dans la Figure 99 par les lignes AYB & a*y b*.

COROLLAIRE.

160. Il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'axe courbe, en tirant par un point quelconque K de la ligne *a b* une ligne K*l* parallele à l'axe C*c*, & décrivant ſur O*r* & *m*a pour rayons, des arcs de cercles. Si l'on fait K*t* = K*s* & *tz* parallele à C*c* pour côté du cylindre, elle coupera l'arc *sr* en *z*, par où on menera *z q* perpendiculaire à L*l*, laquelle

donnera ſur O*r* un point *g* qui ſera celui de la courbe que l'on cherche.

On appliquera ici tout ce que nous avons dit du rapport des profondeurs de la ſection ſolide au Theorême XVIII, ſoit en les conſidérant comme les fleches des cordes inſcrites dans différens cercles, ou comme les ſinus verſes des ordonnées priſes pour des ſinus droits.

THEOREME XXXVII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un ſphéroïde, dont les axes ne ſe rencontrent pas, eſt une eſpece d'ellipſimbre.

Et peut être une ellipſe dans certains cas.

Soit (*Fig.* 100) un cylindre AB*b*a, qui rencontre obliquement un ſphéroïde allongé ou applati. Ayant ſuppoſé un plan paſſant par l'axe du cylindre, qui ſera pour ſection un parallelogramme dans ce corps, & une ellipſe dans le ſphéroïde, dont les interſections *a* & *b*, A & B donnent des points communs à ces ſurfaces, ſi l'on coupe ces corps par un plan perpendiculaire au premier & paſſant par A & B, a & *b*, la ſection ſera de deux ellipſes qui peuvent être égales, en ce cas la ſection faite par la rencontre des ſurfaces devient plane; mais comme la différence des ſphéroïdes peut donner une infinité d'ellipſes différentes, la ſection ſera ordinairement ſolide à cauſe de l'inégalité des ellipſes du cylindre & du ſphéroïde, ce qu'il eſt aiſé d'appercevoir. *Fig.* 100.

Or parce que toutes les ordonnées de cette ſection doivent être terminées à la ſurface du cylindre auſſi-bien qu'à celle du ſphéroïde, il ſuit qu'elles doivent toutes avoir un rapport d'égalité avec celles de l'ellipſe plane, qui eſt la ſection oblique du cylindre ſuivant la ligne AB, ce que nous avons aſſez expliqué aux Theorêmes IX & X, pour qu'il ne ſoit pas néceſſaire d'entrer ici dans un plus grand détail. Il y a même ſi long-tems que nous rebattons la même démonſtration, appliquée à différentes occurrences, que je crains que le Lecteur ne ſe trouve offenſé de la défiance qu'il ſemble qu'on ait de ſa pénétration, en entrant dans un trop grand détail.

COROLLAIRE.

On peut facilement appercevoir les changemens que les cylindres ſcalenes cauſeroient aux ſections faites par la rencontre des ſurfaces des ſphéroïdes, puiſque les ſections obliques qu'on a ſuppoſé elliptiques, peuvent être circulaires, & les perpendiculaires ſe trouver aux axes des ellipſes.

Application à l'uſage.

Cette propoſition & la précédente font voir quelle eſt la courbe de l'arrête d'enfourchement d'un berceau, qui rachete une voute ſphéroïde ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, ou directement ou obliquement. Ce cas n'eſt pas rare dans l'Architecture; telles ſont les lunettes de la voute ſphérique ſurbaiſſée de la Chapelle du Saint Sacrement du Val de Grace, dont les naiſſances ſont au-deſſus de celles du cul-de-four, ou hémiſphéroïde applati.

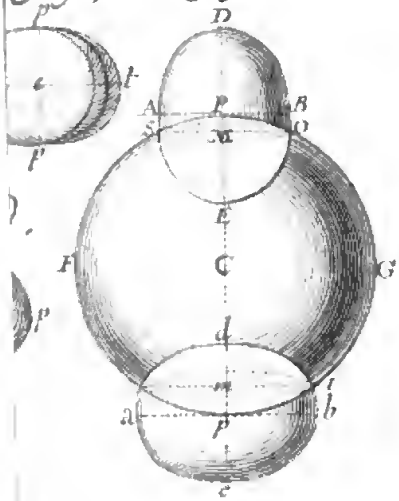
THEOREME XXXVIII.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un ſphéroïde & d'un cone, dont l'axe rencontre celui du ſphéroïde, perpendiculairement ou obliquement, eſt ordinairement courbe à double courbure, telle qu'eſt l'ellipſoïdimbre; mais dans certains cas elle peut être une ellipſe plane.

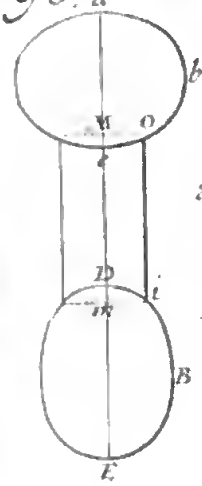
Fig. 102. La démonſtration en eſt aiſée; car 1°. ſi l'axe du cone SC paſſe hors du centre C du ſphéroïde, ou qu'il y paſſe, mais qu'il coupe obliquement ſon axe FG, comme celui du cone D *s* E, il eſt clair dans ces deux circonſtances, que le plan perpendiculaire à celui qui paſſe par les axes SC du cone, & FG du ſphéroïde qu'on ſuppoſe auſſi (comme nous l'avons toujours fait) paſſer par les points communs aux deux ſurfaces A & B, ou *a* & *b*, fera deux ellipſes, l'une dans le cone coupé obliquement, comme en a *b*, l'autre dans le ſphéroïde, leſquelles ne ſeront les mêmes que lorſque leurs deux axes ſeront égaux, hors de ce cas ces ſections étant inégales, il eſt clair que la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure, telle que celle que nous avons appellée ellipſoïdimbre, qui aura des excès ou des

94.

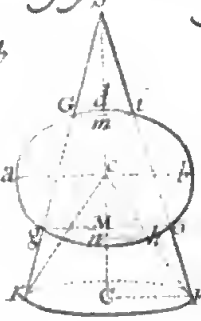
95.



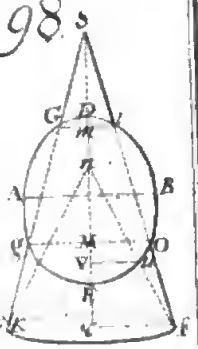
96.



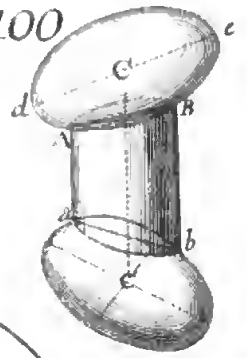
97.



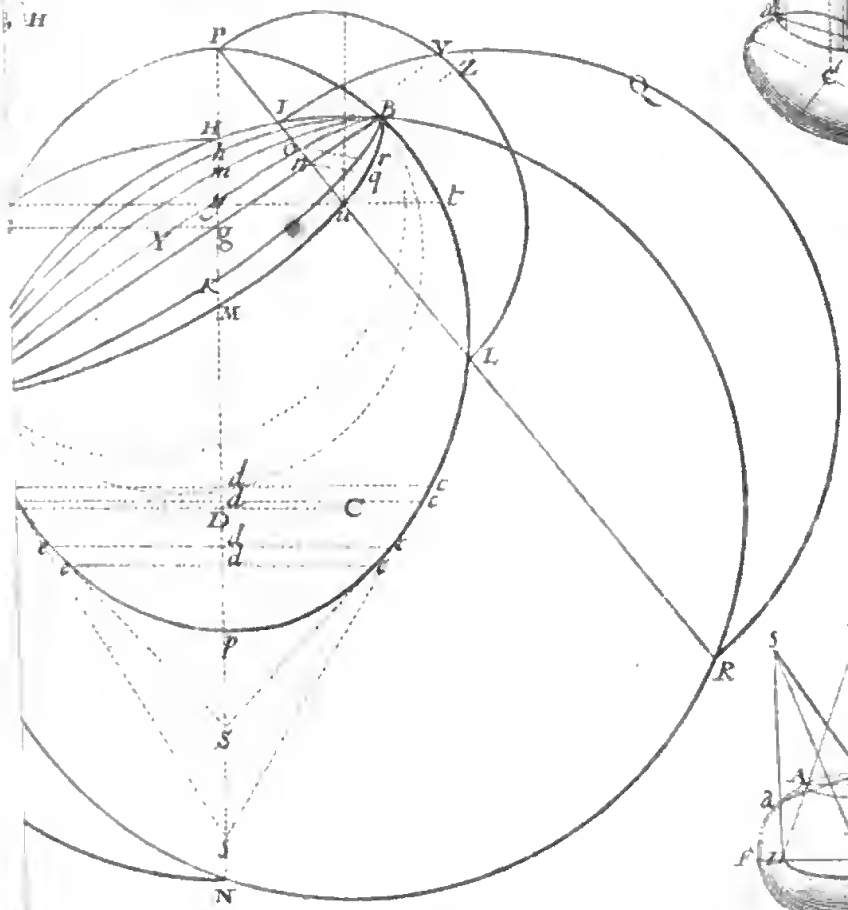
98.



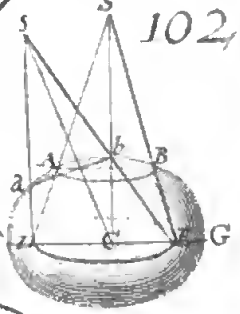
100



101.



102.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

défauts ſur l'ellipſe plane du cone, dans le rapport des profondeurs de l'axe courbe. 2°. Si l'axe du cone paſſe par le centre C du ſphéroïde, & perpendiculairement à ſon axe FG, il ſe fera deux ſections en AB, dont l'une ſera un cercle dans le cone, & l'autre une ellipſe dans le ſphéroïde ; & par conſéquent la ſection ſolide ſera une courbe à double courbure de même eſpece que les précédentes, avec cette différence que les excès ou les défauts de ſes ordonnées ſur la ſection plane du cone ſeront comparés à un cercle & non pas à une ellipſe. Pl. 8. Fig. 102.

Application à l'uſage.

Les lunettes évaſées dans les voutes en cul-de-four ſurhauſſées ou ſurbaiſſées, ou *ſur un plan ovale*, c'eſt-à-dire, un ſphéroïde oblong ou applati, ſont le ſujet de ce Theorême, qui fait voir, 1°. que l'arrête d'enfourchement eſt à double courbure, lorſque l'axe de la lunette, c'eſt-à-dire la direction de ſon milieu, tend au centre. 2°. Qu'elle l'eſt ordinairement ſi elle eſt biaiſe, & que cependant il peut arriver dans ce cas qu'elle ſoit ellipſe plane.

Nous n'ajoutons rien ici des courbes compoſées des ſections des ſphéroïdes, nous croyons en avoir dit aſſez ci-devant pour mettre le Lecteur en état d'en juger par la comparaiſon des précédentes des autres corps ronds, il eſt tems d'en venir aux Problêmes, qui donnent les moyens de tracer toutes ſortes de ſections.

Si quelqu'un eſt curieux d'entrer d'une maniere plus ſçavante & plus générale dans la Théorie des courbes à double courbure, il peut s'inſtruire parfaitement dans le beau Traité de M. CLAIRAUT, dont nous avons parlé. Il ne faut pour l'entendre qu'une médiocre connoiſſance du calcul Algébrique, tant il eſt clair & méthodique dans ſes démonſtrations.

TRAITÉ
DE
STEREOTOMIE.

LIVRE SECOND.

De la deſcription des lignes courbes formées par la ſection des corps.

LES corps peuvent être coupés par des ſurfaces planes ou par des ſurfaces courbes.

Les lignes courbes formées par les ſections de la premiere eſpece, peuvent être décrites ſur des ſurfaces planes & ſur des ſurfaces courbes; mais celles de la ſeconde eſpece ne peuvent être exactement décrites que ſur des ſurfaces courbes, ſi j'en excepte peu de cas. La raiſon eſt, que les lignes courbes formées par l'interſection des ſurfaces de deux corps, peuvent être conſidérées comme étant ſur la ſurface qui coupe, & ſur celle qui eſt coupée puiſque l'interſection eſt commune à tous les deux; par conſéquent ſi on coupe une ſphere, un cône, ou un cylindre par une ſurface plane, la courbe peut être conſidérée comme étant ſur le plan qui coupe, & ſur la ſurface de la ſphere du cone ou du cylindre

dre qui eſt coupé ; ainſi elle peut être décrite ſur deux ſurfaces de différente eſpece, l'une plane, l'autre courbe ; & ſi les ſurfaces qui ſe coupent ſont toutes deux courbes, il eſt à préſumer que la ſection ne convient point aux planes ; il en faut cependant excepter certains cas où la même interſection eſt commune à deux ſurfaces courbes & à une troiſieme qui eſt plane ; telles ſont les interſections des ſurfaces de deux ſpheres, quelquefois de deux cylindres, & de deux cones en certaines circonſtances de poſition & de grandeur, dont nous avons parlé au Livre précédent.

PREMIERE PARTIE

De la deſcription des ſections planes ſur des plans.

LA plupart des ſections planes que nous avons pour objet dans cet Ouvrage, ſont ces quatre ſortes de courbes qu'on appelle les *Sections coniques*, quoiqu'elles ne ſoient pas toutes particulieres au cone, puiſqu'il y en a deux qui conviennent auſſi à la ſphere & au cylindre.

Nous en avons cependant quelqu'autres à décrire, comme la ſection plane de l'anneau & la ſpirale : cette derniere n'eſt pas proprement une ſection de corps ordinaire, à moins qu'on ne la conſidere comme celle d'un coquillage ; mais à cauſe qu'elles ſont de peu d'uſage en comparaiſon des autres, nous jettons toute notre attention ſur les ſections coniques.

La maniere de les décrire n'eſt pas toujours la même, on eſt ordinairement aſſujetti dans la pratique à les faire paſſer par certains points ou lignes données en dedans ou en dehors, qui en changent totalement la deſcription ; c'eſt ce qu'on appelle les *données*, qu'on peut tellement varier, que la ſolution des Problemes néceſſaires pour réſoudre tous les cas poſſibles, fourniroit aſſez de matiere pour un gros volume ; nous nous bornons ici à ceux qui peuvent être d'uſage dans l'Architecture.

CHAPITRE I.

De la deſcription du cercle.

Pl. 6. Fig. 72. NOus avons peu de choſes à dire du cercle, parce que les élémens ordinaires de la Géométrie en traitent aſſez au long pour la pratique des arts, & que nous ſuppoſons dans tout cet Ouvrage, que le Lecteur eſt initié dans cette ſcience. Nous voulons ſeulement ſuppléer à ce qu'on n'y trouve qu'indirectement pour la ſolution d'un cas qui ſe préſente aſſez ſouvent en Architecture, tant pour l'exécution des traits des voutes, que de certains arrondiſſemens de mur, dont le rayon eſt ſi grand, qu'on ne trouve pas commodément une place pour le faire mouvoir ſur un centre; ſoit parce que le lieu du centre eſt embaraſſé, ou enfermé dans quelque bois ou bâtiment, ſoit parce que la longueur de ce rayon cauſe de la difficulté dans l'uſage du *ſimbleau*. Car ſi on ſe ſert de corde elle s'allonge & altere la régularité du contour; ſi on lui ſubſtitue une chaîne qui ſemble ne devoir pas s'allonger, elle a auſſi ſes inconvéniens, en ce que le frottement interrompt ſon mouvement, lorſqu'elle eſt poſée à plat ſur une aire horiſontale ou inclinée, & fait varier ſon extenſion, quelque précaution qu'on prenne, ce qui doit arriver néceſſairement, puiſqu'il eſt démontré en Méchanique que quelque petit que ſoit ce frottement ou ſon poids, ſi elle étoit pendue par ſes extrêmités, elle ne peut ſe mettre en ligne droite, il faut que cette puiſſance du milieu, frottement ou peſanteur s'anéantiſſe; & pour que la courbure reſte toujours égale, il faut que la puiſſance ou l'effort de la main qui tire ſoit toujours parfaitement égal, ce qui eſt moralement impoſſible. De ſorte qu'on ne peut s'aſſûrer de décrire régulierement un arc de cercle par ce moyen; celui de faire un ſimbleau avec des perches eſt le plus ſûr, mais il a ſes incommodités, lorſqu'il en faut ajouter pluſieurs bout-à-bout, il faut le ſoutenir bien droit pour le faire mouvoir ſans le plier, & ſuppoſer que le milieu n'eſt occupé par aucun mur ni matériaux. Il eſt donc fort agréable de pouvoir éviter toutes ces incommodités par une pratique de Geométrie que voici.

Digitized by Google

PROBLEME I.

Par trois points donnés tracer un arc de cercle par pluſieurs autres points trouvés, ou par un mouvement continu, ſans le ſecours du centre.

On ne peut à moins de trois points déterminer ni tracer un arc de cercle, puiſque par deux points donnés, on en peut faire paſſer une infinité de différentes grandeurs, mais ces points peuvent être donnés dans des circonſtances qui occaſionnent différentes manieres de le tracer: car 1°. ou on les donne tous trois à la circonférence, 2°. ou l'on n'y en donne que deux, & le troiſieme en idée pour le centre, en déterminant ſeulement la longueur du rayon, ſans en marquer la poſition à l'égard des points donnés.

Au premier cas les points peuvent être donnés à diſtances égales entr'eux, ce qui arrive ſouvent en Architecture, où l'on détermine ordinairement les points des naiſſances, & celui de la clef pour les voutes, ou celui du milieu pour les arrondiſſemens des murs; ou bien ces points ſont donnés à diſtances inégales. Ces différentes circonſtances peuvent donner occaſion à différentes manieres de décrire l'arc.

Pl. 9. Fig. 103.

Soit (*Fig.* 103) les points ADB donnés aux deux extrêmités & au milieu de l'arc qu'on doit tracer. Ayant tiré les cordes AB, AD, DB, on fera du point A pour centre & d'une ouverture de compas priſe à volonté, l'arc *f* K terminé en *f* & en K aux cordes AD & AB, puis de la même ouverture, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini FE, dont le point F eſt ſur la corde DB; enſuite par le point A on tirera autant de lignes droites qu'on voudra avoir de points de l'arc propoſé entre D & B, par exemple ici pour trois, les lignes AX, A*x*, A*y* qui couperont au haſard l'arc *f*K aux points *g*, *h*, *i*, enſuite on portera les parties de cet arc priſes entre *f* & K, ſur l'arc FE en dehors de F en E. Ainſi *fg* en FG, *fh* en FH, *fi* en FI, & par le point B & les points FGHI on tirera des lignes droites, dont les ſections, avec les précédentes, donneront autant de points de l'arc demandé; ſçavoir BI, coupant A*y*, donnera le point *y*; BH, coupant A*h*, donnera le point *x*, &

BG coupant A *g*, le point X; on en fera de même pour l'autre côté AD.

Fig. 104. Secondement, ſi le point donné D n'eſt pas au milieu, comme à la Figure 104, on peut trouver pluſieurs points correſpondans à ce point D conſidéré comme dans un plus grand ou plus petit arc. Du point a pour centre & pour rayon a D, ayant fait l'arc DE, du point *b* pour centre & de la même ouverture de compas, on fera l'arc *e d* égal à DE, qui donnera un quatrieme point *d*, puis on tirera la droite D *b* qui coupera cet arc en F: du point D pour centre & de la même ouverture de compas a D on fera l'arc *f* 3 = F *d* qui donnera le point 3; on tirera *d* a qui coupera l'arc *f* 3 en G; du point a pour centre & de la diſtance *d* 3 pour rayon, on fera l'arc *g* 4, = G 3 qui donnera le point 4, ainſi de ſuite, on trouvera autant de points qu'on voudra, par leſquels avec une regle pliante on tracera l'arc a D *b*, qui eſt celui qu'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Dans la premiere conſtruction où les angles DAB & ABD ſont égaux, les lignes AX, A *x* & A *y* font des angles avec la corde AB plus petits que DAB de la quantité d'une partie de l'arc *f k*, qui en eſt la meſure: par exemple AX, de la quantité *f g*, de laquelle on a augmenté l'angle ABD, en tirant par le point G au dehors, la ligne BX qui rencontre AX au point X; donc la ſomme des angles XAB, XBA eſt égale à celle des angles DAB, DBA, dont le ſupplément a deux droits, AXB eſt égal à l'angle qui eſt à la circonférence ADB: donc (par la 21 du 3e. Livre d'Euclide) le point X eſt à la circonférence du même arc de cercle, que les points donnés ADB, ainſi des autres *x* & *y*.

Dans le deuxieme cas il eſt viſible qu'on a fait l'angle *b d* a = a D *b*, de même que l'angle D *b d* = *b* D 3; a *d* 3 = *d* a 4; donc tous les points trouvés ſont dans le même arc que les donnés a D *b*, puiſque les angles faits dans chaque ſegment ſont toujours égaux à ceux que font les cordes des points correſpondans D & *d*, *d* & 3, 3 & 4, D & 5, &c. *ce qu'il falloit faire.*

COROLLAIRE.

De la propriété du cercle dont nous venons de faire uſage,

on tire une maniere *de décrire un arc de cercle organiquement par un mouvement continu ſans le ſecours du centre & ſans connoître la longueur du rayon*, mais ſeulement par le moyen de trois points donnés.

Car (*Fig.* 107) ſi l'on fait avec deux regles de bois GE, EI aſſemblées par le moyen d'une troiſieme FH, un angle GEI égal à l'angle ABD, dont le ſegment AEBD eſt capable, & qu'on faſſe couler cet inſtrument entre deux cloux ou chevilles A, D, le crayon qui ſera au ſommet E de l'angle que font ces deux regles, tracera l'arc demandé AEBD, lequel paſſera par les trois points donnés A, B, D. *Fig.* 107.

Il faut remarquer que chacune des regles EG, EI doit avoir en longueur au moins l'intervalle des deux points A & D les plus éloignés, afin que le ſommet E étant tranſporté en D, la branche EG touche & s'appuye encore au point A, qui en doit régler la direction.

AUTREMENT.

On peut encore tracer l'arc demandé par un mouvement continu avec une autre machine, mais plus compoſée que la précédente. Ce ſont deux roues AB, DE de diametres inégaux, aſſemblées ſur un eſſieu commun FC, ſur lequel la plus grande AB eſt fixe, & l'autre ED eſt mobile, enſorte qu'on peut l'approcher ou l'éloigner de la premiere autant qu'il eſt beſoin, & l'arrêter par quelque cheville à la diſtance où elle doit être; enſuite appuyant ſur l'eſſieu vers le milieu M on fait tourner cette eſpece de train boiteux, dont les roues décrivent deux arcs de cercles concentriques; il eſt clair que leurs rayons ſont d'autant plus longs que les diametres des roues ſont moins inégaux, & qu'elles ſont plus éloignées entr'elles; en ſorte que ſi elles étoient infiniment peu différentes, leurs traces ſeroient des lignes droites. *Fig.* 106.

Cette machine, qui eſt de l'invention de PERRAULT, eſt plus ingénieuſe qu'utile; car il eſt moralement impoſſible de la faire mouvoir avec l'uniformité qu'elle demande, puiſque l'expérience nous fait voir qu'il eſt très-difficile de conduire en ligne droite un train de deux roues égales, à plus forte raiſon en ligne courbe deux inégales; ſoit par le défaut de la direction de la main, ſoit par l'inégalité du frottement de l'eſſieu & du ter-

rein ſur lequel on la fait rouler, de ſorte qu'on ne pourroit s'aſſûrer de la régularité de l'arc qu'on veut tracer. Quoiqu'il en ſoit de l'exécution, ſi l'on veut connoître la longueur du rayon que la trace de la grande roue décrit, il n'y a qu'à faire cette analogie; comme la différence A *d* des deux rayons des roues AC, D *c* eſt au demi-diametre AC de la grande, ainſi la diſtance D *d* des deux roues eſt au rayon SC du cercle ou arc que la grande décrit, d'où par l'inverſe on tire l'analogie néceſſaire pour trouver la diſtance des deux roues, lorſque le rayon SC eſt donné, en faiſant CA : CS : : *d* A : *d* D, ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la Figure, à cauſe des triangles ſemblables SCA, D *d* A.

Par où l'on voit qu'avec deux petites roues de 6 à 7 pouces de diametre & un petit eſſieu, on pourroit tracer les ceintres des plus grandes voutes, ſi l'exécution répondoit à la juſteſſe du principe ſur lequel la machine eſt fondée, mais je n'en conſeille à perſonne l'uſage, par les raiſons que j'en ai rapporté.

Erreur du trait de Maître BLANCHARD.

Maître BLANCHARD dans ſon Traité de la Coupe des bois, (page 6) a voulu réſoudre le Problême dont il eſt ici queſtion, par un *trait* dont il eſt à propos de montrer l'erreur pour en déſabuſer les ouvriers qui n'ont pas aſſez de connoiſſance pour l'appercevoir.

Fig. 105. Suppoſant les trois points donnés ADB (*Fig.* 105) il décrit un parallelogramme AEFB, il tire les cordes AD, DB, qu'il diviſe en un certain nombre de parties à volonté, par exemple ici en quatre aux points *b c d*, ſur leſquels il éleve autant de perpendiculaires *b x*, *c y*, *d z*. Puis diviſant le côté AE en un même nombre de parties égales aux points *e*, *f*, *g*, il tire des lignes droites au point D, qui coupent les précédentes aux points *x y z*, qu'il prétend être la circonférence du même arc de cercle où ſont les trois points donnés ADB.

Il eſt très-aiſé de faire voir qu'il ſe trompe groſſierement par la ſeule inſpection de la Figure de ſa conſtruction, faite dans un quart de cercle comme en DG, puiſqu'elle donne au lieu du *Fig.* 105. quart de cercle DSG une courbe DYZG, qui eſt conſiderablement au-dedans; mais il convient de juſtifier la figure par le raiſonnement Géométrique. Il eſt démontré dans les Elémens

d'Euclide au Liv. 3. prop. 14, que les lignes équidiſtantes du centre dans le cercle ſont égales entr'elles ; par conſéquent les lignes LX, *i*Z équidiſtantes (par la conſtruction) du milieu K de la corde DG, c'eſt-à-dire du rayon CS, doivent être égales ; mais elles ne le ſont pas, donc elles ne ſont pas terminées à la circonférence du cercle. *Fig.* 105.

Pour voir cette inégalité d'un coup d'œil, il n'y a qu'à porter la longueur G*m* en DM, & tirer MG qui coupera LX environ au tiers de ſa longueur en *x*, quoique le point X ſoit déja au dedans du cercle DSG, par conſéquent il s'en faut d'environ la moitié de la longueur *iz* que le point *z* parvienne au cercle en *r*.

DE'MONSTRATION.

Pour le démontrer, ſoit (*Fig.* 105) la ligne KY prolongée en H, à laquelle on menera par les points *o* & *m* les paralleles O*p*, *mq*.

A cauſe des triangles ſemblables GHK & G O *p*, on aura GO : GH : : G*p* : GK ; mais GO = $\frac{1}{4}$ de GH, donc G*p* ſera auſſi les $\frac{1}{4}$ de GK ; par conſéquent *p* K eſt la huitieme partie de DG, & D*p* les $\frac{7}{8}$; or à cauſe du triangle iſoſcele rectangle O*p* G, la ligne *p* O ſera égale à *p* G.

Préſentement pour rendre la démonſtration ſenſible aux Ouvriers, nous ſuppoſerons chacune des huit parties ſous-diviſée en dix, afin de faire mieux connoître la différence des longueurs des lignes LX & *iz*.

A cauſe des triangles ſemblables DLX, D*p* O, on aura D*p* (50) : *p* O (30) : : DL (20) : LX (12) & à cauſe des triangles ſemblables D*q m*, D*iz*, on aura D*q* (70) : D*i* (60) : : *qm* = *q* G (10) : *iz* (8$\frac{4}{7}$) ; donc les lignes LX & *iz* ſont entr'elles comme 12 eſt à 8 $\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont conſidérablement inégales, par conſéquent que les points X & z ne peuvent être à la circonférence du même cercle ; on ne voit par cette démonſtration que le rapport de ces lignes entr'elles ; ſi quelqu'un eſt curieux de connoître plus préciſément que par le tracé de la figure, celui qu'elles ont à celles qui parviennent juſqu'au cercle en S ou en *r*, on le pourra par la maniere ſuivante.

Tous ceux qui ſont un peu initiés dans l'Algebre ſçavent que l'équation primitive du cercle (nommant *d* le diametre, *x* l'abſciſſe, & *y* l'ordonnée) eſt $dx - xx = yy$, ainſi on cher-

Fig. 105. chera le diametre en quarrant DK & KC, & tirant la racine quarrée de leur ſomme, qui ſera égale au rayon DC, & ſon double au diametre $= d$, enſuite pour avoir l'abſciſſe x, on ajoutera la longueur Ki au rayon, ou on en retranchera KL; par le moyen de ces deux grandeurs connues, on aura $dx - xx$, dont on tirera la racine quarrée, de laquelle on ôtera la longueur CK, le reſte ſera la longueur ir, qui parvient au cercle en r; & par ce calcul on trouvera que le point X eſt au-dedans du cercle d'environ une partie de trois, & z de quatre, je dis environ à cauſe des fractions qui reſtent.

Ce que nous démontrons ici dans le quart de cercle, ſe peut démontrer facilement de tous les arcs d'un moindre nombre de degrés; on trouvera ſeulement que la différence des longueurs des lignes LX & iz diminuera, mais elle ſubſiſtera toujours; ainſi la pratique de Maître Blanchard ſera toujours fauſſe pour faire un arc de cercle, elle pourroit ſeulement ſervir à faire un arc de ſection conique ouverte, à laquelle il n'a pas penſé, & dont il n'eſt pas queſtion.

Il nous reſte à donner la ſolution du *ſecond cas* de ce problême, où l'on ne ſuppoſe que deux points donnés à la circonférence de l'arc de cercle demandé, & au lieu du troiſieme point, la longueur du rayon indépendamment de ſa poſition qui donneroit le centre, duquel on ne veut, ou on ne peut faire aucun uſage.

Fig. 108. Soient (*Fig.* 108) les deux points donnés L & M ayant tiré la ligne LM de l'un à l'autre, on aura la corde de l'arc demandé, & parce que le rayon eſt donné de longueur, on aura les trois côtés d'un triangle iſoſcele LMC, dont on peut trouver l'angle C par la Trigonométrie, ou méchaniquement par un triangle ſemblable, fait par le moyen d'une échelle. La moitié de l'angle LCM ſera le ſupplément à deux droits de l'angle LNM, néceſſaire pour tracer l'arc demandé par le moyen de la deſcription organique, dont nous venons de parler au cas précédent, avec deux regles qui feront l'angle LNM, dont le ſegment LHNM eſt capable.

Fig. 109. Ou bien on cherchera (*Fig.* 109) le point X, milieu du ſegment AXB, par le moyen de la fleche MX; pour cet effet, ayant quarré le rayon donné AR, & la moitié AM de la corde AB, on retranchera le quarré de AM, & du reſtant on extraira la racine quarrée du quarré de AR pour avoir le côté MR, lequel étant

étant retranché du rayon AR, donnera MX pour la fleche que l'on cherche, & par conſéquent le point X milieu de l'arc demandé. Par le moyen de ce point X & des deux autres A, B on tracera l'arc par pluſieurs points, comme nous l'avons dit au premier cas.

On peut propoſer un *troiſieme cas* de ce problême, en donnant une meſure déterminée au contour de l'arc qu'on veut décrire, au lieu des deux points de ſes extrêmités, & enſuite la longueur du rayon; alors on trouvera l'angle LMN par un calcul aſſez ſimple. *Fig. 108.*

Premierement par le moyen de la longueur du rayon, il ſera aiſé de trouver la circonférence entiere en le doublant, & faiſant l'analogie ordinaire, comme 7 eſt à 22, ou 100 à 314, ainſi le diametre donné eſt à la circonférence totale meſurée en pieds, pouces & lignes. Enſuite par une ſeconde analogie, on trouvera le nombre de degrés que doit contenir l'arc d'une longueur donnée, en diſant comme le nombre des pieds, pouces & lignes, trouvé par la premiere analogie pour la circonférence entiere, eſt au nombre des pieds, pouces & lignes de l'arc donné en développement ou rectification; ainſi 360 degrés, valeur totale de la circonférence, eſt au nombre de degrés que vaut l'arc propoſé, dont la longueur du contour eſt donnée; alors on aura un angle dont le ſupplément à deux droits, ſera l'angle cherché LNM. Ainſi ſuppoſant l'angle trouvé de 60 degrés, on l'ôtera de 180 valeur de deux droits; il reſtera pour l'angle cherché 120 degrés, qu'on formera avec deux regles, ſi on veut décrire l'arc organiquement, comme nous l'avons dit au premier cas.

Démonſtration du deuxieme & troiſieme cas.

L'angle LNM vaut la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle L*d*M vaut de même la moitié de l'arc LNM, donc ils valent pris enſemble la moitié du cercle, c'eſt-à-dire deux angles droits; & par conſéquent la moitié de l'angle LCM, qui eſt égale à l'angle L*d*M, par la 20 du 3e. d'Euclide, ſera le ſupplément à deux droits de l'angle cherché LNM; *ce qu'il falloit démontrer.*

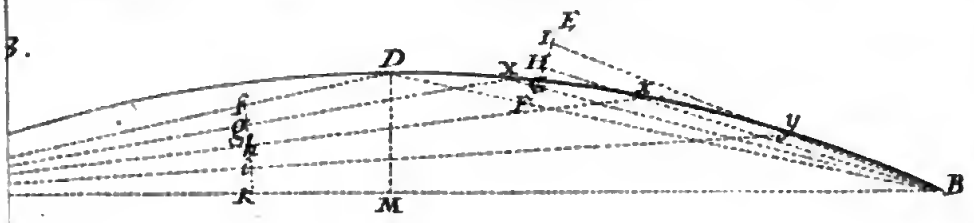
USAGE

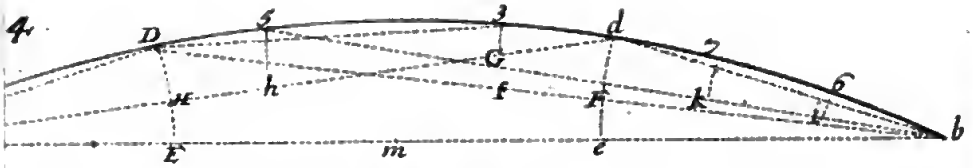
Ce problême eſt néceſſaire pour l'exécution de pluſieurs traits de la coupe des pierres, où il faut tracer des arcs de cercle dont les centres ſont extrêmement loin; par exemple pour trouver l'arc de développement de la baſe de la porte en tour ronde en talud, qui eſt celle d'une portion de cone dont le ſommet qui doit être à la rencontre des côtés du cone prolongés, c'eſt-à-dire les côtés de la Tour en talud, peut être à une diſtance conſidérablement éloignée de la baſe; ſuppoſant par exemple que la tour eut ſeulement 15 pieds de rayon, 30 de hauteur, & un dixieme de talud, le ſommet du cone qui ſeroit le centre du développemenr, ſeroit à 150 pieds loin de la circonférence; ce qui rend les préceptes du Pere DERAND & de ſon Sectateur M. de LA RUE impraticables, ſans le ſecours de ce problême.

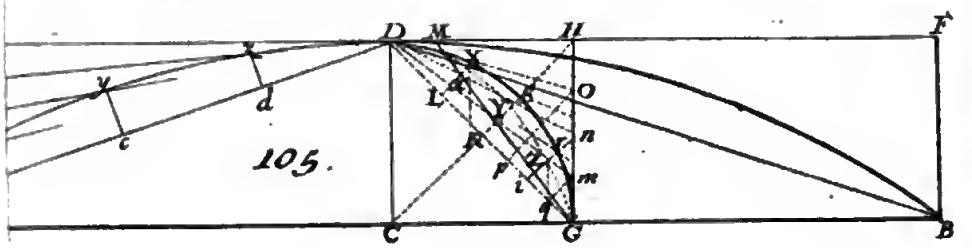
Il eſt encore néceſſaire pour trouver les arcs des panneaux de doële des premieres aſſiſes des voutes ſphériques, ſphéroïdes, & ſur le noyau dans le ſyſtème de pratique qui exécute ces voutes par le développement des cones tronqués, comme nous le dirons en ſon lieu.

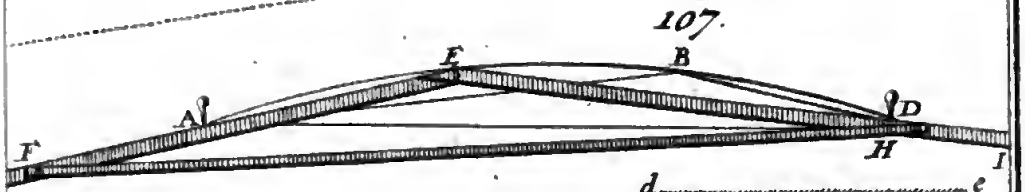
Fig. 109. Je me ſers ordinairement de la deuxieme pratique du ſecond cas pour faire les arrondiſſemens des contreſcarpes de nos fortifications, par le moyen d'un panneau A *de* BX fait d'une planche taillée, comme la partie hachée de la figure, que je mets ſur le revêtement, le faiſant courir de piquets en piquets; mais comme le parement eſt en talud, & que cet arc de cercle augmente de rayon à meſure que le mur s'éleve, je fais faire un panneau convexe ſur le derriere qui eſt à plomb, pour ſervir à jauger l'épaiſſeur qui regle le contour du parement en talud à chaque aſſiſe; & je trouve que cette méthode conduit facilement les ouvriers.

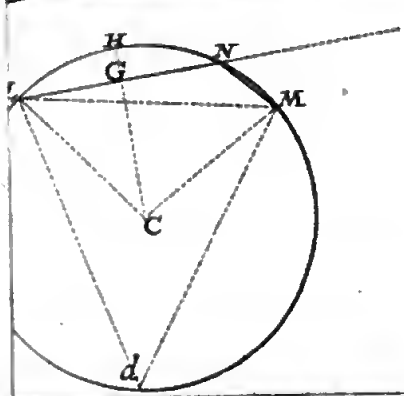
Si l'arc de cercle qu'on doit décrire étoit ſi grand qu'on ne pût ſe ſervir du compas pour faire les angles qu'on doit prendre égaux entr'eux, il faudroit ſe ſervir du *demi-cercle* ou Graphometre, & de piquets d'alignement, au lieu de lignes tracées à la regle ou au cordeau, dont on trouveroit l'interſection par la rencontre des deux rayons viſuels des points A & B pour centre de l'inſtrument. C'eſt ainſi que l'Architecte de la nou-

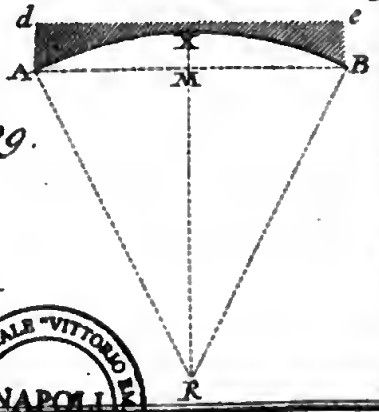












BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

velle Ville de *Carls-Rouhe*, qu'a fait bâtir le Margrave de Bade-Dourlack, auroit pû tracer les rues concentriques au Château, qui ont deux & trois cens toiſes de rayon, comme je puis l'eſtimer à vûe d'œil.

CHAPITRE II.

De l'ellipſe, premierement conſidérée comme étant faite.

PROBLEME II.

Trouver 1°. *le centre*; 2°. *les diametres conjugués*; 3°. *les axes*; 4°. *les foyers d'une ellipſe donnée.*

1°. Pour le centre. *Fig.* 110.

1°. SOit l'ellipſe donnée DEIG (*Fig.* 110) on tirera les lignes OO, *o o* paralleles entr'elles, & terminées à la circonférence de l'ellipſe. On les diviſera en deux également en *r* & R, par où on fera paſſer une ligne DI qui ſera un diametre : le point C, milieu de ce diametre, ſera *le centre* que l'on cherche.

2°. Pour un diametre.

2°. Si par le centre C on tire une ligne EG parallele à OO, cette ligne EG ſera *un diametre* conjugué au diametre DI, parce qu'il eſt parallele aux ordonnées *o r* OR & à la tangente T *t*, tirée par le point D du diametre DI.

3°. Pour les axes.

3°. Si du point C comme centre & d'une ouverture de compas priſe à volonté, on décrit un arc KH qui coupe la circonférence de l'ellipſe en K & en H, & que de ces points comme centres & d'une ouverture de compas priſe auſſi à volonté, on faſſe une ſection de deux arcs de même rayon en Z, la ligne AB tirée par les points C & Z, & terminée à la circonférence de l'ellipſe de part & d'autre, ſera *un des axes*, & la ligne LM qui lui ſera perpendiculaire, paſſant par le centre C, ſera *l'autre axe.*

4°. Pour les foyers

4°. Si l'on prend l'intervalle AC avec un compas, & qu'on s'en ſerve comme de rayon d'un cercle, qui auroit L ou M pour centre, faiſant des arcs qui coupent l'axe AB aux points F & *f*, ces points ſeront les *foyers de l'ellipſe.*

DEMONSTRATION.

Par la définition (Art. 20) les diametres ſont des lignes qui

coupent en deux également toutes les lignes paralleles entr'elles, par conſéquent auſſi la ſurface de l'ellipſe, puiſqu'on peut conſidérer ſa ſurface comme compoſée d'une infinité de lignes paralleles infiniment proches.

2°. Par la définition (avant l'Art. 24) le diametre parallele à ces lignes, & à la tangente *t* T eſt appellé *conjugué* au premier DI.

3°. Par la conſtruction, les points K & H ſont également éloignés du centre C, & l'on a fait AZ perpendiculaire ſur la corde qui ſeroit tirée de H en K, laquelle ſeroit une double ordonnée, qu'elle couperoit en deux également & à angle droit, ce qui ne convient qu'à un axe par la définition.

4°. Enfin les points F & *f* ſont les foyers de l'ellipſe, parce que la ſomme des lignes FL, L*f* eſt égale, par la conſtruction, à la ligne AB; & ſi les lignes FD, D*f* priſes enſemble lui ſont auſſi égales, le point D ſera à la circonférence de l'ellipſe. (Art. 29.)

USAGE.

On trouvera dans la quatrieme Partie de ce Traité des occaſions continuelles de faire uſage de ce Problême, parce que l'ellipſe eſt la courbe la plus ordinaire dans la coupe des pierres.

PROBLEME III.

Par un point donné mener une tangente à une ellipſe donnée.

Le point donné peut être à la circonférence ou au-dehors.

Fig. 111. 1°. S'il eſt à la circonférence, par exemple en D (*Fig.* 111) & que les foyers F*f* ſoient donnés, on menera à ce point D des lignes FD, *f*D qui feront un angle en D, qu'on diviſera en deux également par la ligne D*n*; ſi par ce point D on fait TD perpendiculaire à D*n*, cette ligne TD ou T*t* ſera la tangente que l'on cherche.

Ou bien on fera *f*a = au grand axe GA, on tirera a F qu'on diviſera en deux également en *t* d'où tirant une ligne au point donné D, la ligne *t*D ſera la tangenge demandée.

2°. Si on n'a pas les foyers, ayant trouvé le centre C (*Fig.* 111) on menera par le point donné D le diametre DB, & un autre à volonté comme GA, par l'une des extrêmités duquel A ou G, on menera AE parallele à DB, qui rencontrera l'el-

lipſe en E, par où l'on menera au point G la ligne EG, laquelle ſera une ordonnée au diametre DB, à laquelle ſi on tire une parallele par le point D, cette ligne *t* T ſera la tangente demandée. Pl. 10. Fig. 111.

3°. Si le point donné D eſt hors de l'ellipſe, comme en *d*, ayant mené par le centre C la ligne *d*C, on fera CK perpendiculaire à C*d*, & égale à CL, interſection de la ligne C*d*, & de la circonférence de l'ellipſe; enſuite ayant tiré *d* K, on lui fera la perpendiculaire KH, qui coupera *d*C prolongée en H, on portera la diſtance CH en C*i* ſur la ligne C*d*, enſuite on menera au diametre L*m* une ordonnée quelconque * par la conſtruction précédente, ce qui eſt aiſé; car il ne s'agit que de mener une parallele à *m*L par un point pris à volonté, comme *o*P, la diviſer également en deux au point *q*, & mener *q*C ou ſa parallele *o r*, à laquelle on menera une parallele *i*K par le point *i*, qui rencontrera la circonférence en K, la ligne menée de ce point *k* au point donné *d* hors de l'ellipſe, ſera la tangente que l'on cherche. * Voyez l'art. 36. l. 1.

Et ſi l'on prolonge K*i* en *k* ce point ſera encore à l'attouchement d'une autre ligne menée de *d* en *k*, de ſorte que du même point donné *d*, on peut mener deux tangentes à l'ellipſe AEKGA, une d'un côté, l'autre de l'autre.

DEMONSTRATION.

Pour le premier cas de ce Problême, il eſt démontré dans les ſections coniques que les angles FD*t*, & *f* DT ſont égaux entr'eux; ſi on ajoute de part & d'autre les angles FD*n*, & *f*D*n* égaux entr'eux par la conſtruction, les angles *n*D*t* & *n*DT ſeront auſſi égaux entr'eux, par conſéquent droits; donc *i*T ſera une tangente au point D. Fig. 111.

Secondement. (*Fig.* 111.) A cauſe des paralleles AE, CB, GC: CA:: GS: ES; mais AC, demi-diametre eſt égal à GC, GS = SE, laquelle eſt une ordonnée au diametre DB, puiſqu'il la diviſe en deux également; & (par la conſtruction) D*t* ou *t*T eſt parallele à SE; donc D*t* eſt une tangente de l'ellipſe au point D, *ce qu'il falloit faire.*

Troiſiemement. Par la conſtruction, on a fait CH troiſieme proportionelle à la diſtance du centre C au point *d*, rencontre de

la tangente K*d* & du demi-diametre CL prolongé en *d*, & à ce demi-diametre CL, on a fait auſſi C*i* = CH, donc *d*C : CL :: CL : C*i*, diſtance du centre C à la ſous-tangente *i d*; donc * *d*K & *dk* ſont des tangentes à l'ellipſe aux points K, ou *k* menées du point donné *d* hors de cette courbe ; *ce qu'il falloit faire.*

* Art. 46.

USAGE.

Ce Problême eſt néceſſaire pour éviter les jarrets dans la jonction des lignes droites avec des arcs elliptiques, dans pluſieurs circonſtances d'arrondiſſemens des parties droites contigues aux courbes, comme il arrive ſouvent dans l'Architecture, parce que l'angle fait par la rencontre d'une courbe & de la tangente eſt le plus petit qu'on puiſſe imaginer ; donc il differe infiniment peu de la ligne droite à la jonction de la courbe, par conſéquent la tranſition de la ligne droite à la courbe devient imperceptible à la vûe.

De l'ellipſe conſidérée comme à faire.

PROBLEME. IV.

Un diametre quelconque & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver ſon conjugué.

Fig. 113. SOit AB (*Fig.* 113) le diametre donné & ED ſon ordonnée, du point C, milieu de AB, ayant élevé une perpendiculaire CH, on décrira le quart de cercle HFB, on menera enſuite, par le point E de la rencontre de l'ordonnée avec le diametre AB, une ligne EG parallele & égale à CH, qui coupera le cercle en F, par où & par l'extrêmité D de l'ordonnée ED, ayant tiré la ligne FD, on lui menera par le point G la parallele GL, qui rencontrera ED prolongée en L. Je dis que EL ſera égale au demi-diametre conjugué que l'on cherche ; ainſi ayant mené par le point C la ligne IK parallele à EL, on portera du centre C de part & d'autre CK & CI égale à EL.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles GL, FD, on aura EG : EL :: EF :

ED, mais EG (Conſtr.) = CH & EL = CK, donc EF : CH :: ED : CK; c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre AB dans le cercle ſont en même raiſon que celles de la courbe qui paſſeroit par les points K & D, ce qui eſt une propriété de l'ellipſe; * donc CK, ou ſon double KI, eſt le diametre conjugué à AB; *ce qu'il falloit trouver.* * Art. 41.

PROBLEME. V.

Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes de l'ellipſe.

Soient (*Fig.* 112) les lignes AB, DE données pour diametres conjugués d'une ellipſe à décrire, qui ſe coupent également en C où eſt ſon centre. Du point A, extrêmité du plus grand, ayant abbaiſſé la perpendiculaire AP, on la prolongera vers G, portant la moitié CD du plus petit en AG. Puis ayant tiré GC, on la diviſera en deux également, en *m*, d'où l'on tirera par le point A la ligne *mg*, qu'on fera égale à *m* G; ſi du point *g* on mene par le centre C la droite indéfinie *g x*, on aura la poſition du grand axe, dont la longueur X *x* ſera déterminée en portant de part & d'autre du centre C la ſomme des lignes C*m*, *m* A en CX & C *x*; enſuite on élevera au point C une perpendiculaire à *g x*, ſur laquelle on portera de part & d'autre la longueur A*g* de C en Y, & de C en *y*; la ligne *y* Y ſera le petit axe; *ce qu'il falloit trouver.* Fig. 112.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre & pour rayon CX, on décrira un quart de cercle XH, & l'on menera par le point A la ligne K*o*, perpendiculaire à XC qui paſſera à l'interſection K de l'arc de cercle HX, & de la droite CG, on fera A*t* parallele à C*g* & *t u* à K*o*.

Par la ſuppoſition, le point A qui eſt à l'extrêmité d'un des diametres, eſt à la circonférence de l'ellipſe AEBD, il faut démontrer que les points X & Y ſont à la même circonférence, & à l'extrêmité des axes. Puiſque *mg* = *m* C (par la conſtruction) *m t* ſera égale à *m* A, & *t* C = A*g* = CY (par la conſtruction). Or à cauſe des triangles ſemblables CK*o*, C*t u*, K *o* : A *o* = *t u* :: CK = CX = CH : C*t* = CY; donc (Art. 41) le point Y eſt

à la circonférence de l'ellipſe, de même que le point X, comme il eſt aiſé de le prouver par la même raiſon.

Et parce que les lignes CX & CY ſont perpendiculaires entr'elles, ce ſont des demi-axes; donc X*x* & Y*y* ſont les axes demandés; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Pl. 10. *Fig.* 112. De-là on tire une maniere aiſée de décrire l'ellipſe par un mouvement continu, au moyen d'un inſtrument compoſé de trois pieces; ſçavoir, d'une petite branche droite C*m*, d'un triangle *m*AP, dont l'angle *m* eſt attaché par un pivot en *m* à cette branche, & d'une grande regle qu'on applique ſur le diametre DE, à laquelle la petite branche C*m* eſt attachée ſur le point C par un pivot ſur lequel elle peut tourner, ainſi que l'angle *m* du triangle à ſon autre extrêmité *m*: ſi l'on conduit avec la main l'angle P en droite ligne au long de la regle DE, le crayon poſé au ſommet de l'angle A décrira en même-tems la demie ellipſe XY*x*; on peut même ſans remuer la regle faire paſſer le triangle A*m*P, & la branche *m*C de l'autre côté de la regle DE; mais ſa largeur couvrira une partie qu'on ne pourra tracer, c'eſt pourquoi il faudra la changer de côté.

Il faut remarquer que la ligne GP n'eſt pas toujours la ſomme des demi-diametres CD, & de la perpendiculaire AP, mais qu'elle en eſt quelquefois la différence, lorſque la direction de la branche C*m* tombe entre les points A & P.

USAGE.

Cette propoſition eſt très-utile dans pluſieurs traits de la coupe des pierres où les axes conjugués ſont donnés, comme aux arcs-droits des *deſcentes*, en ce qu'elle fournit les moyens de tracer les ellipſes par le mouvement continu du trait du jardinier, dont nous parlerons au Problême VII.

PROBLEME VI.

Un axe & un point à la circonférence de l'ellipſe étant donnés, trouver l'autre axe.

Ce Problême n'eſt qu'une eſpece de Corollaire du Problême IV,

IV, parce que les ordonnées aux axes étant des perpendiculaires en donnant un point à la circonférence, c'eſt comme ſi l'on donnoit une ordonnée à l'axe grand ou petit.

Premierement, *le grand axe étant donné, ſi l'on cherche le petit.* Fig. 114.

Soit AB le grand axe (*Fig.* 14) & D le point donné à la circonférence de l'ellipſe, on abaiſſera de ce point ſur AB la perpendiculaire indéfinie OF, puis du point C, milieu de AB, pour centre, & CB pour rayon, on décrira un quart de ce cercle B *b* qui coupera OF en R; on portera ſur OF le rayon CB, qui donnera le point F, & la longueur OD en C *d*, parallelement à OF. Par les points R & *d*, on tirera R *y*, qui coupera l'axe donné AB en *y*.

Si de ce point *y* on tire au point F une ligne *y* F, elle coupera CD prolongé en X; je dis que CX eſt la moitié du petit axe que l'on cherche.

Secondement, *le petit axe étant donné, ſi l'on cherche le grand.*

Par le point D donné à la circonférence, on tirera ſur CX la perpendiculaire D *d*; puis du point C pour centre, & la moitié CX du petit axe donné pour rayon, on décrira le quart de cercle XE qui coupera D *d* au point V, & la perpendiculaire AB ſur le milieu C au point E, par les points E & V, on tirera E *z* qui coupera CX prolongée au point Z; ſi par les points Z & D on tire la droite ZB, elle coupera la perpendiculaire AB au point B: je dis que CB eſt la moitié du grand axe que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Pour le premier cas, à cauſe des triangles ſemblables O *y* R, *y* C *d*, & *y* OF, *y* CX, on aura *y* O : OR :: *y* C : C *d*, & *y* O : OF :: *y* C : CX, donc OR : OF = C *b* = CB :: OD = C *d* : CX; donc * le point X eſt à la circonférence de l'ellipſe, & à l'extrêmité de l'axe conjugué à AB. * Art. 41.

Pour le ſecond cas, à cauſe des triangles ſemblables ZCE, Z *d* V & ZCB, Z *d* D; on aura Z *d* : *d* V :: ZC : CE, & Z *d* : *d* D :: Z *c* : CB; donc *d* V : *d* D :: CE = CX : CB; donc (par l'Art. 41) le point B ſera à l'extrêmité du grand axe; *ce qu'il falloit trouver.*

USAGE.

Entre pluſieurs uſages de ce Problême, on fera voir au qua-

trieme Livre qu'il eſt néceſſaire pour le trait du quartier de vis ſuſpendu, ſuivant la maniere du P. Derand & de M. de LA RUE, & pour le trait de la trompe ſphérique dans un angle ſaillant.

Il pourroit auſſi ſervir pour la diminution des colonnes, ſi au lieu de la conchoïde de NICOMEDE, qu'on y employe ordinairement, on vouloit ſe ſervir d'un arc elliptique, le petit axe donné eſt le diametre de la baſe; le point à la circonférence eſt l'extrêmité du diametre ſous l'aſtragle du chapiteau, éloigné du petit axe des deux tiers ds la longueur de la colonne, ſi le renflement eſt au tiers.

PROBLEME VII.

Les axes d'une ellipſe étant donnés, la décrire par pluſieurs points, ou par un mouvement continu.

Fig. 110. Premierement, par pluſieurs points trouvés au compas. (*Fig.* 110.)

Ayant pris la moitié du grand axe pour rayon, on portera une des pointes du compas en L, d'où, comme centre, on décrira des arcs qui couperont cet axe en F & *f* pour avoir les foyers.

De ces points F & *f* pour centres, & d'un intervalle pris à volonté pour rayon, pourvû qu'il ſoit moins grand que *f* A, ou FB, on décrira des arcs de cercle en quatre endroits 1, 2, 3, 4, au-deſſus & au-deſſous de l'axe AB, comme en 1 *n*, 2 *n*, 3 *n*, 4 *n*, puis on portera la même longueur du rayon de A en P, & de l'ouverture PB (reſte de la longueur du grand axe) pour rayon, on décrira des mêmes centres F & *f* des arcs de cercle, qui couperont les précédens aux points 1, 2, 3, 4, qui ſeront à la circonférence de l'ellipſe. On recommencera pareille opération avec des ouvertures de compas plus ou moins grandes, pour avoir encore quatre autres points; & ainſi on trouvera tant de points & ſi près les uns des autres, qu'on jugera à propos pour tracer ce contour à la main de l'un à l'autre avec aſſez d'exactitude, ou mieux dans le grand, avec une regle pliante également mince, qu'on peut arrêter & courber par le moyen de quelques pointes de cloux plantés ſur les points trouvés en dedans & en dehors, ou tous en dehors en appuyant de la main gauche par dedans, pendant qu'on trace de la droite.

Secondement, par un mouvement continu, on peut le faire de pluſieurs façons.

1°. Par le moyen d'un cordeau, on fait ce que nous venons de faire avec le compas ; on plante deux cloux aux foyers F & *f*, trouvés comme nous venons de le dire ; puis ayant fait une boucle au bout du cordeau, & une autre à diſtance de celle-ci, parfaitement égale à la longueur du grand axe AB, on met chacune de ces boucles à un clou des foyers ; & comme le cordeau eſt lâche, on pouſſe ſon pli FD*f* pour le faire tendre, & y faire couler un crayon D, ou une pointe de quelque outil ; ainſi le même cordeau qui faiſoit le pli FD*f* fera au milieu le pli FL*f*, & le crayon qui étoit en D, ſera tranſporté en L, ce qui eſt ſi connu de tous les ouvriers, qu'il eſt inutile de l'expliquer. Cette conſtruction, qu'on appelle *le trait du jardinier*, quoique méchanique, donne l'ovale Géométrique, que j'appelle toujours *ellipſe*, pour la diſtinguer des autres ovales. *Fig. 110.*

Il eſt clair que pour avoir l'ellipſe entiere, il faut faire paſſer le cordeau en deſſous d'AB, comme au-deſſus.

DEMONSTRATION.

Nous avons dit à l'article 29 du premier Livre, qu'une des principales propriétés de l'ellipſe conſiſte dans l'égalité de la ſomme des deux lignes tirées des foyers au même point de la circonférence, avec la longueur du grand axe ; donc la courbe tracée eſt la vraie ellipſe, qui eſt une des ſections coniques, puiſque la conſtruction par pluſieurs points trouvés au compas, & le cordeau par le mouvement continu, fourniſſent toujours la même égalité, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Cette pratique eſt très-aiſée, mais peu exacte dans les grands ouvrages, parce que le cordeau s'allonge ſelon qu'il eſt plus ou moins long & tors, & que l'on pouſſe le crayon dans le pli avec une force plus ou moins grande. Une chaînette eſt moins ſujette à cet inconvénient, mais elle a les ſiens ; car outre qu'elle cauſe des ondulations, elle eſt encore un peu ſuſceptible de l'inégalité d'extenſion, cauſée par ſon poids dans un plan vertical, ou par ſon frottement ſur un plan horiſontal ; de

ſorte qu'elle ne peut ſe remettre en ligne droite, ſuivant les loix de la Méchanique, puiſque ce poids ou ce frottement ſont une troiſieme puiſſance qui fait effort contre celles des bouts, leſquelles ne peuvent en tirant l'une contre l'autre, faire dreſſer la chaîne, que lorſque la troiſieme eſt infiniment petite; c'eſt pourquoi nous allons propoſer une autre maniere organique qui n'a pas ces défauts.

Seconde Méthode de tracer l'ellipſe par pluſieurs points, ſans le ſecours des foyers, ſeulement avec deux ouvertures de compas, ou ſans compas, par le moyen d'un cercle & d'une meſure conſtante.

Fig. 116. Soient (*Fig.* 116) les axes donnés AB, HF : on portera la moitié du petit axe CH de C en E ſur le grand, & l'on diviſera leur différence EB en deux également en M.

Du point C pour centre, & de l'intervalle CM pour rayon, on déctira un cercle : il nous ſuffit ici pour exemple d'en mettre le quart N 2 M : ſur la circonférence de ce cercle, on prendra à volonté autant de points qu'on en voudra pour tracer l'ellipſe avec plus ou moins d'exactitude, comme ici les points 1, 2, 3, deſquels comme centres & toujours du même intervalle CM pour rayon, on décrira de petits arcs qui couperont l'axe AB prolongé aux points M, *g*, *h*, d'où l'on tirera à leurs centres 1, 2, 3, des lignes 1 M, 2*g*, 3*h*, ſur leſquelles on portera toujours la moitié de la différence des demi-axes ME, ou MB en 1 *x*, 2 *x*, 3 *x*, laquelle donnera tous les points *x*, *x*, *x* à la circonférence de l'ellipſe demandée.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre & des longueurs CA, & CH pour rayons, on décrira deux quarts de cercles AQ*b*, *r q* H ; puis par un des points trouvés, comme P, on tirera les lignes *r* Q, & PL perpendiculaires aux axes ; & enfin par le centre C, la ligne C*q*.

A cauſe des paralleles *r* C, P*q*, on aura C*q* : CQ :: *r* P : *r* Q ; mais C*q* = CH, & CQ = C*b* ; donc CH : C*b* :: *r* P : *r* Q ; c'eſt à-dire, que les ordonnées de l'ellipſe à l'axe AB, ſont proportionelles à celles du cercle AQ*b* au même axe qui en eſt le diametre ; donc (Art. 41 du premier Livre) le point P eſt à la circonférence de l'ellipſe ; *ce qu'il falloit démontrer.*

La même organiquement par un mouvement continu.

Ayant diviſé la différence A *e* des deux demi-axes CA, C *h* en deux également en *m*, ou leur ſomme *e* B en M, on aſſemblera deux regles égales chacune à la moitié MB, par le moyen d'une cheville ou d'un clou arrondi, comme C *d*, *d* G en *d*, ou deux regles d'inégale longueur, l'une DC égale à la différence A *m*, l'autre D *a* au demi-axe AC; puis ayant pris une troiſieme regle de longueur égale à quatre fois C *d*, ou deux fois *e* B, pour la premiere conſtruction, avec les regles C *d*, *d* G, ou ſeulement au grand axe pour la ſeconde, on attachera à ſon milieu C, la regle C *d*, ou CD, avec un pivot; en ſorte que le point C ſoit ſur l'alignement d'un de ſes côtés *e* G, puis on portera ſur la branche *d* G la longueur A *m*, pour y poſer un crayon en *x*, ou ſur la regle D *a* en D *g*, pour y poſer une pointe propre à faire couler le long de la regle AB, & le crayon en *a*. Dans cette diſpoſition il ne s'agit que de faire couler le point G, dans le premier cas, ou *g* dans le ſecond, au long de la regle AB, les crayons poſés en *x*, ou en *a* traceront l'ellipſe qu'on demande, comme il eſt clair par la démonſtration précédente, pour la conſtruction par pluſieurs points, puiſque celle-ci eſt parfaitement la même réduite en inſtrument. *Fig.* 118.

Autre maniere organique avec l'inſtrument appellé compas à ovale.

Lorſqu'il ne s'agit que de former un quart d'ellipſe, le compas à ovale eſt une ſimple équerre, ſur les côtés de laquelle on fait couler deux pivots attachés à certaine diſtance, à une regle au bout de laquelle eſt un crayon pour le tracer. D'où il ſuit que pour une ellipſe entiere, il faut aſſembler quatre équerres ſéparées par une couliſſe, pour laiſſer le paſſage de ces pivots; ſuppoſant qu'on ne veuille tracer qu'une demi-ellipſe, il faut un inſtrument compoſé de deux équerres avec une couliſſe entre deux, comme on voit à la *Fig.* 117. ABCE; & afin que la branche du milieu ſoit ferme, on y ajoute des liens, comme *m n*, MN, qui empêchent qu'elle ne puiſſe s'incliner vers A ni vers B. *Fig.* 117.

On prend enſuite une troiſieme regle RT, qu'on fait entrer dans trois anneaux de fer ou de cuivre quarrés H, G & K, dans

Pl. 10. Fig. 117. lesquels on l'enfile, & afin de pouvoir les fixer où l'on veut, on y ajoute une vis.

A deux de ces anneaux faits en façon de petite boëte, tient une queue en forme de pivot conique, qu'on fait entrer par les bouts de la rainure CE, & dans la rainure AB, si l'on en fait une, qui n'est nécessaire que pour mieux assûjettir le mouvement de la regle RT; c'est pourquoi on fait ces rainures plus larges au fond que par le haut, & les pivots étant coniques, quoiqu'ils puissent être cylindriques. A la boëte K, au lieu de pivot, on met un crayon ou une pointe, comme on le juge à propos pour mieux tracer.

L'instrument étant ainsi fait, il ne s'agit plus que de sçavoir déterminer la distance des pivots HG entr'eux, & à l'égard du crayon K, pour tracer l'ellipse suivant la longueur des axes donnés.

Ayant porté sur le grand axe AB la longueur CD de la moitié du petit, de A en F, la différence des deux demi-axes FC, sera cette distance qu'on cherche du pivot H au pivot G; & la longueur CD sera celle du pivot G au crayon K.

Les pivots & le crayon étant ainsi arrêtés par le moyen des vis, afin qu'ils ne puissent varier; il n'y a qu'à faire mouvoir la regle RT sur ses pivots, ensorte qu'il y en ait toujours un engagé dans la rainure des coulisses AB, EC, qui sont ici à angle droit, parce que les axes sont donnés; & à mesure que la regle tournera sur ces deux pivots, le crayon K tracera l'ellipse demandée.

J'ai dit que ces deux coulisses étoient à angle droit, parce que les deux axes sont donnés; car si au lieu des axes on avoit donné deux diametres conjugués, elles devroient faire entr'elles d'autres angles que ces diametres, un obtus d'un côté, & un aigu de l'autre, qui seront d'autant plus aigus & obtus, que les diametres conjugués approcheront de l'égalité; ainsi (*Fig.* 115.) ayant porté la distance CB de D en F, on fera la coulisse inclinée à l'égard du diametre donné AB, suivant la ligne CF, ou ce qui est la même chose, suivant les angles FCB & ACF, & l'on aura le crayon en D, & les deux pivots en P & F, de sorte que si les lignes CB & DP étoient parfaitement égales, cet instrument ne pourroit plus avoir lieu. *Fig.* 115.

Il faut remarquer que la distance DP qui est la différence

de la perpendiculaire FP, & du demi-diametre CB, peut tomber entre les points D & P, ſi le demi-diametre CB eſt plus petit que DP.

Secondement, qu'on peut s'épargner la peine de faire une couliſſe ſur AB, pourvû qu'on tienne le pivot G, (*Fig.* 117) ou P, (*Fig.* 115) toujours appliqué à la regle AB. *Fig.* 117.

Si l'on vouloit en même-tems tracer une ſeconde ellipſe parallele, ou à peu près, à la premiere, il n'y auroit qu'à ajouter un quatrieme anneau en X, pour y appliquer un ſecond crayon, comme on a fait en K; mais ces deux ellipſes ne ſeront pas ſemblables, parce que leurs diametres ne ſeront pas proportionnels, de ſorte qu'elles ne peuvent pas être la ſection d'un berceau ou cylindre creux de même épaiſſeur; la raiſon eſt que ſi des demi-axes CD, CB, on ôte des quantités égales D*d*, BL, les reſtes C*d*, CL ne ſont plus en même proportion, C*d* n'eſt plus à CL, comme CD à CB; car ſuppoſant CD = 2, CB = 4, D*d* = 1, C*d* ſera à CL, comme 1 à 3, ce qui eſt tout différent du rapport ſuppoſé CD : CB : : 2 : 4.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & de l'intervalle de la moitié du grand axe CB pour rayon, on décrira le quart de cercle SB, & par le point K, on tirera ſur CB la perpendiculaire O*r*, qui coupera le cercle au point O, & du centre C la ligne CO, qui ſera parallele à HK, parce que OK eſt parallele à CH, & que HK = CS = CO; donc COKH eſt un parallelogramme. Que HK ſoit égal à CS, cela eſt évident par la conſtruction, puiſque GK = AF, & GH = CF, & CS ou BC = CA; or à cauſe des paralleles, on aura CO : GK : : O*r* : K*r*; mais CO = CS, & GK = CD; donc CD : CS : : *r*K : *r*O : donc (Art. 41) la courbe DKB eſt une ellipſe.

Il faut remarquer, 1°. Que les deux triangles rectangles GHC, GK*r*, qui ſont ſemblables, varient continuellement par le changement de poſition de la regle RT, en ſorte que les côtés CH, CG, G*r*, *r*K augmentent ou diminuent, & cependant ils ne ſont jamais que la ſomme des quarrés de leurs hypotenuſes qui ſont conſtantes, HG, KG.

2°. Que l'intervalle CH, qui eſt la diſtance du centre C à un

pivot, eſt toujours égal à l'excès KO de l'ordonnée du cercle, ſur celle de l'ellipſe.

D'où l'on peut tirer une maniere aiſée de trouver autant de points que l'on voudra d'une ellipſe à peu près parallele à une autre donnée, comme *d x* L, en imitant ce qui a été fait avec l'inſtrument. Il n'y a qu'à porter l'intervalle OK en CH, ou *o k* en C*h*, pour avoir les inclinaiſons de pluſieurs lignes HK, *h k*, ſur leſquelles on portera la diſtance donnée D*d* en KX, & *k x*, pour mener par les points donnés & trouvés *d*, X, *x*, L l'ellipſe demandée, à peu près équidiſtante à DK*k*B donnée.

Fig. 111. Si l'on veut qu'elle ſoit exactement équidiſtante, il faut connoître les foyers F*f*, (*Fig.* 111) mener de chacun une ligne au point donné D, ou tout autre pris à volonté, & diviſer l'angle FD*f* en deux également par une ligne D*n*, ſur laquelle on portera du point D la largeur du bandeau, archivolte, ou tout autre ouvrage qu'on veut faire exactement de même largeur par tout.

Pour rendre cette opération plus facile, il n'y a qu'à prendre au contour de l'ellipſe donnée, ou toute autre courbe, pluſieurs *Fig.* 117. points à volonté pour centre 1, 2, 3, &c. deſquels avec l'intervalle donné D*d* pour la largeur, on fera autant d'arcs de cercles, auſquels on menera à la main une courbe tangente *a t d*, qui ſera celle qu'on cherche.

Mais il faut obſerver qu'une telle courbe, & toute autre qui n'eſt pas une concentrique ſemblable à la courbe donnée, n'eſt pas convenable aux ceintres qui doivent prendre leur naiſſance ſur un piédroit, parce qu'elle y feroit un jarret en *a* avec le piédroit *a p*, lequel ſera d'autant plus ſenſible & choquant à la vûe, que l'intervalle D*d* ſera grand; car il eſt viſible que les perpendiculaires à la courbe 1 *a*, & A*a* ſe couperont en quelque point comme en *a*; de ſorte que tout l'arrondiſſement de la naiſſance A 1, ſe réduit à la courbe intérieure en un ſeul point *a*, où ces deux perpendiculaires ſe croiſent; par conſéquent puiſque une partie ſemblable s'y trouve de moins, il s'y fera un angle avec le diametre AB, plus aigu que l'angle mixte *a* A 1, qui eſt droit à ſon origine A, ou infiniment peu différent du droit, & égal à celui d'un piédroit perpendiculaire ſur AB; donc l'angle mixte de la courbe *d a*, avec le piédroit *a p* perpendiculaire ſur AB, fera un angle différent qui ſera d'autant plus

plus aigu, que l'arc A 1 ſera grand, par conſéquent un jarret; ce qui eſt inſupportable en Architecture.

COROLLAIRE.

De ce que nous venons de dire, il ſuit encore que la méthode de ceux qui prennent la meſure de la largeur à l'intervalle des deux courbes ſur les diametres de l'ellipſe donnée, comme l'enſeigne le P. DECHALES, Liv. 5. Prop. 21, eſt encore très-fautive; car il eſt viſible que ſi cette diſtance eſt, par exemple, D*y* ſur D*n*, ou D*u* ſur DC, le point *u* s'approche plus de la circonférence que le point *y*, par conſéquent l'ellipſe ne ſera plus équidiſtante à l'extérieure AD*m*G donnée; de ſorte qu'en cet endroit, le bandeau ou archivolte qu'on ſe propoſe de faire de même largeur, ſe trouvera plus étroit. Or la ligne D*n* qui diviſe l'angle FD*f* en deux également, ne tombe jamais ſur les rayons, que lorſque le point D eſt à l'extrêmité du petit diametre ou axe; car (par la troiſieme Prop. du ſixiéme Livre d'Euclide,) la ligne qui diviſe un angle d'un triangle *f*DF en deux également, coupe la baſe de ce triangle proportionellement aux côtés; mais les rayons ou demi-diametres coupent tous la baſe *f*F en deux également en C, donc ils ne diviſent pas l'angle FD*f* en deux également; nous démontrerons encore d'un autre maniere la fauſſeté de cette pratique au Chap. VIII. du quatrieme Livre.

Fig. 111.

Alia interior ellipſis non tantùm concentrica, ſed etiam æquali intervallo diſtans ab interiori, quæ diſtantia ſumatur ſecundùm radios à centro procedentes.

REMARQUE.

Quoique le *compas à ovale* ſoit un aſſez bon inſtrument, on peut s'en épargner la façon, & opérer très-juſte dans les grands ouvrages en cherchant pluſieurs points de la circonférence de l'ellipſe qu'on ſe propoſe de faire, ſur leſquels on appuye une regle pliante fort mince, & d'une épaiſſeur bien égale, qu'on arrête de chan, ou avec les mains, ou avec des pointes de clouds, comme nous l'avons dit ci-devant, au long de laquelle on peut tracer un contour auſſi ferme & auſſi net qu'avec aucun inſtrument; voici d'autres Problêmes pour l'une & l'autre méthode.

PROBLEME VIII.

Les diametres conjugués étant donnés, tracer l'ellipſe par pluſieurs points, ou par un mouvement continu, ſans connoître les axes ni les foyers.

Fig. 115. Soient (*Fig.* 115) les diametres conjugués AB, ED; par le point D, extrêmité du plus grand, on tirera ſur AB la perpendiculaire indéfinie FP, ſur laquelle on portera la longueur AC, de D en F, d'où l'on tirera au centre C la ligne FC; enſuite du point I, pris à volonté ſur CD, on menera une parallele IG à la ligne FP, & une autre IH au diametre AB. Si du point G, où IG coupe FC, pour centre, & pour rayon DF ou AC, on fait un arc de cercle qui coupe IH en H & *h*; je dis que les points H & *h* ſont à la circonférence de l'ellipſe.

DEMONSTRATION.

Soit pris CL ſur AB égale à HI, & menée LH qui ſera parallele à CD.

A cauſe des paralleles IG, PF, on aura CD : DF : : CI : IG, mais DF = GH = AG, par la conſtruction, & CI = LH; & à cauſe du triangle rectangle HIG, $\overline{IG}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HI}^2 = CA - \overline{CL}^2$ = au rectangle BL × LA (par la cinquieme du deuxieme Livre d'Euclide) donc ſi au lieu de CI on met ſon égale LH, & au lieu de DF ſon égale CA, on aura $\overline{CD}^2 : \overline{LH}^2 : : \overline{CA}^2 :$ BL × LA : donc le point H eſt à la circonférence de l'ellipſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

D'où il ſuit qu'on peut décrire une ellipſe par un mouvement continu autour de deux axes conjugués ſans autre inſtrument qu'une regle & une fauſſe équerre, ou deux autres regles qui faſſent un angle égal à FCB, trouvé comme nous venons de l'enſeigner, & une troiſieme percée, ſuivant les diſtances P, D, F, pour mettre une cheville en P & en F, aſſez ſaillantes pour pouvoir y appuyer les regles FC, & CB; on

Digitized by Google

mettra un crayon au troiſieme trou en D, ou une pointe propre à tracer l'ellipſe; ſi l'on fait couler le point F où eſt la cheville le long de la regle FC, & la cheville P le long de la regle CB, le crayon D tracera le quart de l'ellipſe D *h* B; & ſi l'on en fait de même de l'autre côté de la ligne FC, tranſportant la regle CB en CA, de même que la regle FP, on tracera l'autre quart d'ellipſe AHD, qui fera avec le précédent la demie-ellipſe ADB, *ce qu'il fallott faire* par un mouvement continu. Pour ne pas changer la regle CB, il faut la faire longue, en ſorte qu'elle excéde les points A & B de chaque côté, de la longueur de DP.

USAGE.

Ce problême peut ſervir à tracer des arcs rampans, & les projections des faces elliptiques en talud, dont on n'a ordinairement que les diametres conjugués, pour s'épargner la peine d'en chercher les axes; mais on peut le faire par pluſieurs points d'une maniere encore plus ſimple.

SECONDE MANIERE.

Soient les diametres conjugués AB, DE: (*Fig.* 121) ayant mené par le point D la ligne DT, parallele à AB, & par le point C la perpendiculaire CK, qui rencontrera DT au point K, on prolongera cette ligne vers F. Du point C pour centre, & pour rayon CK, on décrira le quart de cercle HK, & du même centre & pour rayon le demi-diametre CB, on décrira un autre quart de cercle FB, que l'on diviſera en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, 1, 2, 3, F. Il convient pour la commodité & la promptitude de l'opération qu'elles ſoient égales, parce qu'il faut diviſer l'autre quart de cercle HK, en un même nombre de parties, & ſi elles étoient inégales, il faudroit qu'elles fuſſent proportionelles à leurs correſpondantes. Par chacune de ces diviſions 1, 2, 3, dans l'un & l'autre quart de cercle, on menera des paralleles au diametre CB, comme a a, *b b*, *c c*, dans le quart de cercle HK: & 1 L, 2 M, 3 N, dans le quart de cercle BF; enſuite par les mêmes points 1, 2, 3, du même quart de cercle FB, on menera d'autres lignes 3 *g*, 2 *h*, 1 *i* paralleles à FC, par conſéquent perpendiculaires à AB, *Fig.* 121.

leſquelles couperont ce diametre aux points *g*, *h*, *i*; on menera par ces points des lignes *g c*, *h b*, *i a*, paralleles à CD, leſquelles couperont les précédentes a a, *b b*, aux points a, *b*, *c* qui ſeront à la circonférence de l'ellipſe.

Ces points étant trouvés, il ſera bien aiſé de trouver ceux de l'autre côté du diametre ED; car il n'y aura qu'à porter les longueurs *o* a, *p b*, *q c*, en *o* a, *p b*, *q c*, ſur les mêmes lignes a a, *b b*, *c c*, de l'autre côté du diametre CD: on aura ainſi pluſieurs points à la circonférence de l'ellipſe, par leſquels menant une ligne courbe à la main, ou avec une regle pliante, on aura la demie-ellipſe, & l'ellipſe toute entiere ſi l'on veut; puiſque la moitié CDB eſt égale à l'autre, qui paſſeroit par ACE, mais diſpoſée en ſens contraire.

DÉMONSTRATION.

A cauſe des paralleles au diametre AB, & des diviſions égales en nombre & proportionelles dans les quarts de cercle HK, & FB, les rayons CK & CF ſont diviſés proportionellement, de même que les lignes CK & CD le ſont auſſi entr'elles; donc CD : C *q* : : CF : CN; & CD : C *p* : : CF : CM; & CD : C *o* : : CF : CL, mais C *q* = *g c* C *p* = *h b*, & C *o* = *i a*: & par la même raiſon *g* 3 = CN, *h* 2 = CM, & *i* 1 = CL, donc *g c* : *h b* : : *g* 3 : *h* 2, c'eſt-à-dire, que les ordonnées au diametre du cercle, & celles au diametre de l'ellipſe ſont en même raiſon entr'elles; *ce qu'il falloit démontrer.* Art. 41.

PROBLEME. IX.

Allonger ou racourcir les ellipſes en telle raiſon qu'on voudra, en ſorte qu'elles ſoient toujours les ſections d'un même cylindre.

Soit (*Fig.* 119) le demi-cercle BFE, la baſe d'un cylindre quelconque; ayant abaiſſé ſur ſon diametre BE, autant de perpendiculaires que l'on voudra *o r*, *o r*, *c* F, on joindra l'axe AB, qu'on ſuppoſe donné ou pris à volonté, au diametre BE, ſous quelque angle que l'on voudra comme ABE, & l'on achevera de former le triangle, en tirant une ligne par les extrêmités A, E; enſuite par tous les points *o*, *o* & *c*, on menera des paralleles à la ligne AE, juſqu'à la rencontre de l'axe ABaux Fig. 119.

points *h*, *h*, C, par leſquels on élevera ſur AB autant de perpendiculaires indéfinies *hi*, *hi*, CD qu'on fera égales aux ordonnées *or*, *or*, CF, en ſorte qu'elles ſoient terminées aux points *i i* D, par leſquels on fera paſſer une courbe à la main, ou avec une regle pliante, & l'on aura la circonférence de l'ellipſe demandée ; nous n'en mettons ici que la moitié pour rendre la figure plus ſimple, l'autre moitié étant parfaitement égale. Pl. 10. Fig. 119.

DÉMONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe le demi-cercle EFB relevé en E*d*B, & la demie-ellipſe ADB perpendiculaires au plan du triangle ABE, toutes les perpendiculaires aux diametres EB, AB le ſeront à ce plan ; donc les diſtances des ſommets correſpondans F, D, *r* & *i*, qui ſont les mêmes que *d*D, R*i*, ſeront égales aux diſtances *h o*, C*c* du plan ABE ; puiſque les lignes *or* ou *o*R & *hi*, leur ſont perpendiculaires, & que ces mêmes *or* & *hi* ſont égales entr'elles ; donc elles formeront autant de parallelogrammes, comme *c*CD*d* ; donc ſi la figure E*d*BDAE eſt une moitié de cylindre, la ligne C*c* ſera ſon axe, & D*d* qui lui eſt parallele, ſera ſon côté, c'eſt-à-dire à la ſurface : il en ſera de même de toute autre jonction des ſommets *i* & *r* ou R, comme *hi*, R*o*, *i*R qui ſera parallele & égale à *h o*, laquelle eſt parallele à C*c* ; donc *i*R ſera parallele à l'axe C*c*, & par conſéquent à la ſurface du cylindre ; *ce qu'il falloit démontrer.*

Que la ligne ADB ſoit une ellipſe, nous l'avons fait voir au Problême précédent ; puiſqu'à cauſe des paralleles AE, *h o*, C*c*, les lignes EB, & AB ſont diviſées proportionellement, & que les ordonnées à ces diametres ſont égales entr'elles, & par conſéquent proportionelles à celles du cercle, par la conſtruction ; donc la courbe ADB eſt une ellipſe géométrique.

Il eſt à propos que je rende raiſon pourquoi j'ajoute ici l'épithete *géométrique* au nom propre de l'ellipſe formée par ce Problême ; c'eſt que DAVILER, fameux Architecte, qui a fort bien écrit ſur ſon Art, étoit aſſez peu verſé en Géométrie pour ne pas connoître l'exactitude de cette opération, s'imaginant apparemment qu'elle produiſoit une courbe d'une nouvelle eſpece ; ce qui lui a donné occaſion de lâcher une abſurdité, dont j'ai montré le faux au commencement, & en pluſieurs endroits de cet Ouvrage, *la ſévérité des regles de Géométrie*, (dit-il, pag.

274.) *eſt inférieure à la pratique, comme la méthode des cherches ralongées vaut mieux que les figures géométriques, d'autant qu'en cet Art la pratique eſt préférable à la théorie.* Quelle miſere d'entendre ainſi raiſonner un Auteur, un Maître de l'Art, & ce qui eſt encore plus ſingulier, en appeller au Tribunal d'un *ouvrier*, qui n'eſt qu'un eſpece de ſinge d'un Géometre, dans les traits de la coupe des Pierres dont il parle! *Le meilleur* (dit-il) *eſt de prendre quelque habile ouvrier pour ſe conduire, parce qu'il ſoulage & inſtruit.* Quelle inſtruction peut donner un homme qui n'agit que par mémoire, & par une imitation ſervile de ce qu'il a vû faire à un Maître qui ſouvent étoit auſſi borné que lui, incapable de rendre raiſon de ce qu'il enſeignoit à ſon Diſciple, par conſéquent ſuſceptible d'adopter le faux, comme le vrai? N'eſt-ce pas choiſir un aveugle pour ſe conduire? Car enfin remontons à ces Maîtres; de qui ont-ils pû ſe tranſmettre ces préceptes, que d'un Géometre? Un tel raiſonnement ne vaudroit pas la peine d'être relevé, s'il n'étoit trop commun parmi les Architectes, & oſerois-je le dire parmi les Ingénieurs, où il n'eſt auſſi que trop ordinaire d'entendre exalter le mérite de la ſeule pratique. Il me ſemble ouir ces Chirurgiens qui ſe mêlent de Médecine, décrier les Médecins tant qu'ils peuvent; fiers d'avoir fait quelques cures, par le moyen de quelques remedes qu'ils ont tiré de cette ſcience & appliqué au hazard, ils avancent hardiment que la pratique vaut mieux que toute la théorie de la Faculté: mais revenons à notre ſujet, cette digreſſion m'entraîne au-delà des bornes d'une ſimple remarque.

COROLLAIRE I.

Il eſt évident que ſi au lieu du diametre AB on en avoit pris ou donné un plus petit comme aB, la conſtruction auroit été parfaitement la même; cette ligne auroit été diviſée auſſi proportionnellement à la ligne EB, aux points *l*, *m*, *n*, & a; & en élevant ſur ces points autant de perpendiculaires à aB, égales aux correſpondantes *or*: on aura autant de points à la circonférence d'une ellipſe, qui ſera beaucoup plus courte que la précédente, & qui ſera cependant toute à la ſurface du même cylindre, par la même raiſon.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit : 1°. Que ſi l'angle B *c* C eſt aigu ou obtus, le Cylindre en queſtion ſera ſcalene ; de ſorte qu'il pourra arriver que ſi l'on prenoit un diametre égal à BE qui fit avec C *c* un angle égal à B *c* C, la ſection ſera encore un cercle, comme par exemple E *x*. *Fig.* 119.

2°. Que ſi au lieu du demi-cercle EFB, pris pour baſe d'un cylindre ſcalene, on avoit le demi-cercle AGB, & que l'on prit le diametre EB pour l'axe d'une ellipſe racoucie, on trouveroit par la même conſtruction *cf* égale à la moitié du grand axe de cette ellipſe, en portant CG en *cf*, & *h* L en *o* K ; & ainſi de ſuite pour toutes les ordonnées.

COROLLAIRE III.

Non-ſeulement on peut transformer ainſi une ellipſe en une autre plus ou moins allongée, ou une ellipſe en un cercle, qui ſoit la baſe d'un même cylindre, mais auſſi l'on peut encore transformer une portion moindre que la demie ellipſe, ou que le demi-cercle en une autre plus allongée & plus accourcie, en telle raiſon que l'on voudra, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en avoir les diametres, par le ſeul allongement des abſciſſes, & la répétition des ordonnées correſpondantes.

Soit (*Fig.* 120) un Secteur de cercle BC *e*, ou ſimplement un arc D *e* qu'il faut convertir en portion d'ellipſe *d* E qui ſoit ſection d'un même cylindre, dont D *e* eſt portion de la baſe. Ayant mené par les extrêmités D & *e* deux lignes droites D a, *e* a qui faſſent entr'elles un angle droit ou quelconque en a ; on diviſera la ligne a D en autant de parties égales qu'on voudra, comme ici en trois, & l'on menera par les points 2 & 3 des paralleles 2 *p*, 3 *p* à la ligne a *e* ; enſuite ayant fait à part l'angle *d* AE, égal à l'angle D a *e*, on diviſera A *d* en même nombre de parties égales ou proportionelles ; ſi les diviſions de la premiere ligne a D étoient inégales, & par les points 2 & 3 de diviſion de la ligne donnée A *d*, on menera des lignes 2 P, 3 P, paralleles & égales aux précédentes, correſpondantes aux mêmes diviſions 2 *p*, 3 *p* ; la ligne courbe qui ſera menée par les points EP *p d*, ſera la portion *d'ellipſe que l'on cherche*. *Fig.* 120.

Pour ſentir la raiſon de ce Corollaire, il faut achever le cercle, en trouvant le centre C de l'arc donné D *e*, & mener r

Fig. 119. & 120. CB parallele à a D, qui coupera les lignes $p2$, $p3$ prolongées aux points f & g.

Préſentement, puiſque à la Figure 119 nous avons opéré ſur les diametres AB, EB; on peut conſidérer le triangle ABE, comme une ſection par l'axe du cylindre, dont le rayon CB de la Figure 120 peut repréſenter une partie de la ſection de ce plan avec la baſe B y e B, & la ligne AD, celle d'un plan parallele à la ſection par l'axe, lequel retranche des lignes paralleles fp, gp, des parties égales $f2$, $g3$, non-ſeulement dans le cercle de la baſe, mais encore dans l'ellipſe de la ſection; par conſéquent, puiſque les ordonnées de l'ellipſe doivent être égales à celles du cercle de la baſe du cylindre, ſi l'on retranche des correſpondantes des parties égales, les reſtes doivent encore être égaux; mais les abſciſſes, par la conſtruction, ſont proportionelles, donc l'arc E d de la ſection oblique du cylindre correſpond parfaitement à l'arc eD de ſa baſe, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême eſt ſans contredit le plus utile de tous ceux dont on peut faire uſage pour la coupe des pierres; car comme la plûpart des voutes ſont des cylindres droits ou ſcalenes, & coupés obliquement par des différentes rencontres de plans ou de cylindres égaux, ou de baſes elliptiques égales, on a continuellement beſoin d'allonger ou de racourcir les courbes des ceintres, ce que les ouvriers appellent la *cerche ralongée.*

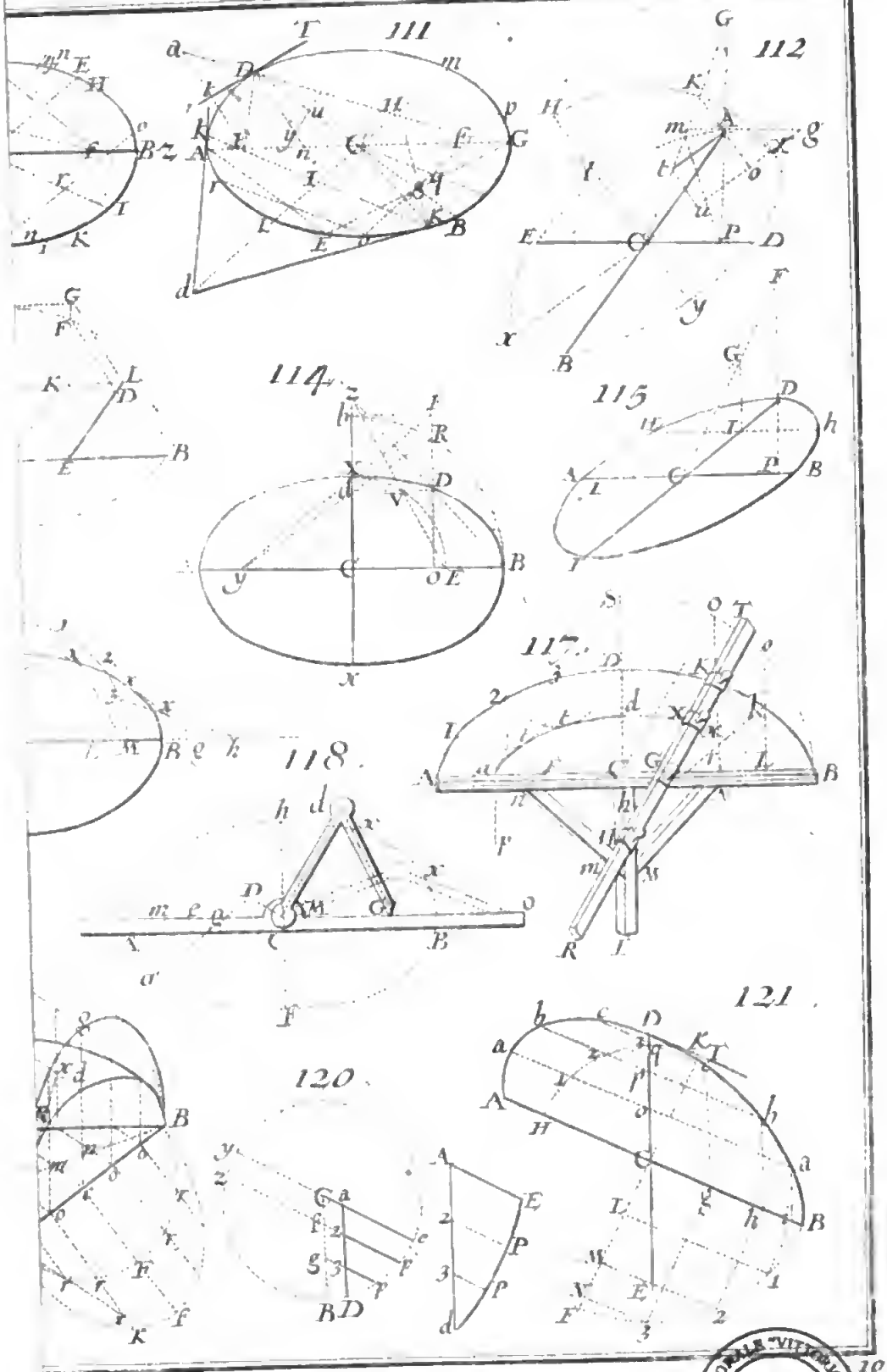
Quant à l'uſage du ſecond Corollaire, il eſt auſſi fréquent en pluſieurs rencontres, par exemple pour trouver les joints de tête de la porte en tour ronde, &c. comme on le verra au quatriéme Livre.

De la parabole.

PROBLEME X.

L'axe d'une parabole & un point à ſa circonférence étant donnés, la tracer par pluſieurs points & par un mouvement continu.

Pl. 11. Fig. 122. SOit (*Fig.* 122) SO 4 l'axe donné, & D le point de la parabole à ſon contour. Ayant tiré de ce point une perpendiculaire DO ſur l'axe SO, on tirera la ligne SD, ſur laquelle au point



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI
Digitized by Google

point D, on fera la perpendiculaire D4, qui coupera l'axe SO prolongé au point 4; la longueur O4 ſera le parametre de la parabole, qu'on diviſera en quatre parties égales, dont on en portera une de part & d'autre du ſommet S en F, pour avoir le foyer F, & en G ſur l'axe 4 S prolongé pour avoir la directrice H *h*, laquelle eſt une perpendiculaire à l'axe prolongé d'un quart du parametre au-delà du ſommet S, nous en dirons l'uſage ci-après. Pl. 11. Fig. 122.

On tirera enſuite autant de perpendiculaires que l'on voudra à l'axe SO, pour avoir la même quantité de points au contour de la courbe comme *i* K, dont les points *i* & *i* ſont pris à volonté; ou bien on cherchera le parametre, en prenant au contour de la parabole un point K à volonté, par lequel & par le ſommet S, on menera KS *a* indéfinie, puis portant en S *b* la longueur *i* K, on tirera par le point *b* une perpendiculaire à l'axe prolongé, laquelle coupera K *a* au point *a*, la ligne *b a* ſera le parametre qu'on cherche, dont le quart porté de S en G, donnera la ſection de l'axe & de la directrice. Enſuite ouvrant le compas de l'intervalle G *i*, à chaque point *i* en particulier, on poſera une des pointes en F, d'où comme centre, on décrira un arc qui coupera en K chaque perpendiculaire en *i* K, pour laquelle on a pris l'intervalle *i* G correſpondant; faiſant de même pour toutes les lignes, on ſe ſervira du même centre F, & par tous les points SKKD on tracera à la main ou avec une regle pliante une courbe qui ſera la parabole que l'on cherche; on en fera de même pour l'autre côté SC *d*.

DEMONSTRATION.

La ligne O4, par la définition du parametre, à la premiere conſtruction, ou *a b* à la ſeconde, ayant été faite troiſieme proportionelle à l'axe SO, & à l'ordonnée OD ou *i* K, eſt le parametre de la parabole; dont le quart eſt la diſtance du ſommet S au foyer F & au point G par où paſſe la directrice.

Or la diſtance de cette ligne eſt toujours égale à celle du foyer à l'extrêmité de l'ordonnée, comme il eſt démontré dans les ſections coniques, donc la courbe SKD eſt une parabole.

Seconde maniere par un mouvement continu.

On prendra un cordeau égal à la diſtance OG, dont on attachera un bout ſur la branche EL, d'une équerre HEL, me-

PL. 11. Fig. 111. ſurant ſa longueur depuis le point E de ſon angle, & l'autre bout ſera arrêté à un clou au foyer F; enſuite ayant poſé la branche EL ſur l'axe SO, & l'autre branche EH ſur la directrice HA, on y appliquera une regle HR, puis appuyant avec un crayon ou une pointe ſur le cordeau pour le tenir appliqué contre la branche EL, on reculera l'équerre le long de la regle HR, & à meſure qu'on l'écartera de l'axe SO, toujours parallelement à elle-même, le crayon coulant dans le pli du cordeau au point C, tracera la parabole d'un côté de l'axe; on tranſportera enſuite l'équerre pour tracer l'autre moitié du côté oppoſé.

Il eſt évident que cette opération eſt préciſément la même que la précédente, mais exécutée d'une maniere méchanique; puiſque l'on aura par tout CE = CF, comme l'on a eu Gi = FK, ce qui eſt la propriété de la parabole.

USAGE.

La deſcription de la parabole n'eſt pas d'un fréquent uſage dans la coupe des pierres; elle ſert cependant pour tracer les arcs de face des trompes quarrées par devant dans un angle droit: l'axe qui eſt la ligne du milieu de niveau à l'impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la trompe avec l'aplomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la parabole.

Elle peut auſſi ſervir à tracer un arc rampant, dont les piédroits ſont en ſurplomb, dans une circonſtance dont nous parlerons dans la ſuite. Elle ſert encore à tracer les jambages des cheminées les plus propres à réflechir la chaleur du feu, comme l'a démontré M. GAUGER dans la Méchanique du feu, où il en fait voir l'avantage ſur ceux qui *ſont paralleles* entr'eux.

Comme cette courbe reſſemble ſi fort à la *chaînette*, que quelques Mathématiciens s'y ſont mépris, comme le grand GALLILEI, & après lui BLONDEL, dans ſes Problêmes de l'Architecture, PARENT, & le P. CASTEL dans ſa Mathématique univerſelle; on pourroit s'en ſervir à tracer les ceintres des voutes dont on fait les vouſſoirs égaux. Je crois auſſi avoir lû quelque part, qu'un fameux Architecte ſe ſervoit de la parabole dans les ceintres des lunettes dans un berceau.

Enfin on pourroit faire uſage de ce Problême pour le renflement & la courbure du profil de diminution des colonnes, au lieu

des deux manieres uſitées : l'axe donné eſt le diametre de la baſe, l'abciſſe eſt la différence des deux demi-diametres à la baſe, & ſous le chapiteau, c'eſt-à-dire, la diminution d'un côté ; le ſommet eſt l'extrêmité de ce diametre, & le point à la circonférence eſt celui de diminution du diametre ſupérieur, c'eſt-à-dire, ſon extrêmité ſous l'aſtragale.

De l'hyperbole.

PROBLEME XI.

Le centre, le ſommet & un point au contour de l'hyperbole étant donnés, la décrire par pluſieurs points & par un mouvement continu.

SOit le centre C, le ſommet S & le point D à la circonférence, la ligne CO menée du centre par le ſommet S en O ſera l'axe prolongé, auquel la perpendiculaire OD ſera une ordonnée. Des points S & D pour centres, & pour rayon une ouverture de compas priſe à volonté, on fera des ſections d'arcs en *p* & *q*, pour mener par ces points une ligne *p q*, laquelle étant prolongée, s'il le faut, coupera l'axe CO en V, d'où comme centre & de l'intervalle VS, ou VD, on décrira le demi-cercle SDG qui rencontrera SO prolongée en G : enſuite ayant porté la longueur OG ſur la ligne DO prolongée en OH, on lui menera par le point S la parallele indéfinie IST ; on prolongera SC en R, faiſant CR = CS : on tirera RH qui coupera IT en I ; on portera la longueur SI en SK, pour avoir la ligne KR, qu'on diviſera en deux également au point M, où ſera le centre d'un demi-cercle RTK, dont elle ſera le diametre, & dont l'arc coupera la ligne ST en T ; puis ayant diviſé ST en deux également au point N, on portera la diſtance CN en CF ; le point F ſera un des foyers de l'hyperbole, & ſi on porte la diſtance SF en R*f*, on aura l'autre foyer. *Fig.* 123

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut trouver pluſieurs points de l'hyperbole avec le compas, d'une ouverture *f* L priſe à volonté, pourvû qu'elle ſoit plus grande que *f* S pour rayon, & du point *f* pour centre, on fera un arc *l* L ; enſuite on portera le même intervalle *f l* de R en *o* ; par exemple, ſur l'axe prolongé, & l'on prendra la différence *o* S de cet intervalle & du premier axe RS, & de cette différence *o* S pour rayon, & du

Pl. 11. Fig. 122. foyer F pour centre, on fera un autre arc xy, qui coupera fL au point x, lequel ſera à la circonférence de l'hyperbole : on trouvera de même autant de points que l'on voudra de cette courbe.

Seconde maniere par un mouvement continu.

Ayant pris une regle fE d'une longueur convenable, qui excede la plus grande diſtance fD du foyer oppoſé f, au point donné D; on lui fera un trou au bout f pour y paſſer un clou, ſur lequel elle ſera mobile; on portera ſur cette regle la longueur RS du premier axe de f en Q; enſuite on prendra un cordeau de longueur égale à QD, dont on attachera un bout à l'autre foyer F, puis poſant la regle fE ſur Fo, on étendra le cordeau qui eſt lâche dans cette ſituation, en le tirant par un pli de F en S le long de la regle, & en l'écartant par le bout E; l'autre reſtant fixe en f, on appuyera ſur le pli du cordeau avec un crayon ou une pointe d'outil contre la regle, en le faiſant couler vers D, & l'on tracera ainſi l'hyperbole, comme nous l'avons dit de l'ellipſe & de la parabole.

DÉMONSTRATION.

On a cherché une troiſieme proportionelle OG à l'abſciſſe OS, & à l'ordonnée OD, pour trouver par ſon moyen le parametre SI, car HO = OG : SI :: RO : RS; mais auſſi le parametre eſt troiſieme proportionelle au premier axe RS, & au ſecond bY, donc en cherchant une moyenne proportionelle ST entre SR & SI = SO, on aura bCY qui lui eſt égale. Or il eſt démontré dans les ſections coniques, que la diſtance du centre C au point N, milieu de ST, eſt égale à celle de ce centre au foyer, parce que SN eſt moyenne proportionelle entre RF & SF, ou ce qui eſt la même choſe, entre fS & SF, comme il eſt évident par la conſtruction; donc les points f & F ſont les foyers. Il eſt auſſi démontré que la différence des lignes fD, FD, tirées des foyers à un point de l'hyperbole, eſt égale au premier axe RS; donc l'hyperbole eſt décrite par les points S & D; *ce qu'il falloit faire.*

Il eſt clair que la ſeconde opération par un mouvement continu, eſt préciſément la même que la premiere par pluſieurs points, puiſque l'on y a pris la différence FD du premier axe RS, pour en faire la diſtance du foyer au crayon D; ce n'eſt

donc que la même choſe faite méchaniquement avec un cordeau, au lieu d'un compas.

COROLLAIRE.

Si les deux axes ſont donnés, les foyers ſe trouvent très-facilement en élevant du point S une perpendiculaire $Sd = CD$, & tirant Cd qui ſera la diſtance du centre C au foyer F, que l'on tranſporte en F par un arc dF ſur le premier axe prolongé. *Fig.* 124.

Il faut remarquer que dans l'Architecture où les cones ſont preſque toujours donnés & le point où la poſition du plan de leur ſection dans le triangle par l'axe du cone, les deux axes ſont auſſi toujours donnés; car (*Fig.* 124) ſoit ADB le triangle par l'axe, & le plan coupant HSC prolongé; ſi l'on prolonge auſſi le côté BD juſqu'à la rencontre du plan en X, la diſtance SX eſt la longueur du premier axe, lequel étant diviſé en deux également en C, la ligne CD ſera la moitié du ſecond axe; & ſi par le centre C on tire deux lignes droites CP & CT, paralleles aux côtés DA, DB, on aura auſſi les Aſymptotes, dont on peut faire uſage pour décrire l'hyperbole par pluſieurs points. Cependant comme il peut arriver que le triangle par l'axe du cone ne ſoit pas donné, parce que l'on peut conſidérer les ſections coniques hors du cone, nous allons faire voir comment l'on peut trouver les aſymptotes d'une hyperbole, dont on ne connoît que le centre, le ſommet & une ordonnée, de même que dans la propoſition précédente, ou ſeulement un diametre & une ordonnée.

PROBLEME XII.

Etant donnés le centre, le ſommet & une ordonnée à l'hyperbole, ou ſeulement un premier diametre & une ordonnée, en trouver les aſymptotes & la décrire par pluſieurs points.

Soit (*Fig.* 125) le centre C, le ſommet S & l'ordonnée DO, on aura l'intervalle CS pour la moitié d'un diametre, dont le double SP ſera le diametre entier, auquel (étant prolongé) la ligne DO eſt une ordonnée qui lui ſera perpendiculaire, ſi ce diametre eſt un axe. *Fig.* 125.

Par le point S on menera AB parallele indéfinie à DO, & par le point donné D au contour de l'hyperbole, on tirera la ligne DP qui coupera AB en A; on fera SG égal à AS, & par

Fig. 115. le point G ayant mené GR parallele à DO ou AB, on tirera la droite DSR qui coupera GR au point R, la ligne GR ſera le parametre que l'on diviſera en deux également en M; on portera la longueur GM de S en h, & ſur hC, comme diametre, ayant décrit un demi-cercle, on menera SN perpendiculaire à Ch, laquelle étant moyenne proportionelle entre le demi-diametre CS, & le demi-parametre $GM = Sh$, ſera égale à la moitié du diametre conjugué au premier SP: on portera donc la longueur SN en SB, qui eſt parallele à DO (par la conſtruction) la ligne menée du centre C par le point B, ſera une aſymptote: la même diſtance portée de l'autre côté vers A donnera auſſi le point par où doit paſſer l'autre aſymptote CE; *ce qu'il falloit premierement trouver.*

Les aſymptotes étant données, il eſt très-facile de trouver autant de points que l'on voudra au contour de l'hyperbole; car ayant fait Od égal à l'ordonnée OD prolongée de part & d'autre vers r & r', on tirera à volonté les lignes qr, Qr par les points D & d, enſuite portant les longueurs Dr, dr de q en I, & de Q en i, on auta les points i & i qui ſont à l'hyperbole; on tirera autant de ces lignes Qr qu'on voudra trouver de points i, & par ces points & les points D, S, d, on tracera une courbe à la main ou avec une regle pliante, laquelle donnera le contour de *l'hyperbole qu'on cherche.*

On voit, comme au Problême précédent, que ſi on a la moitié du diametre conjugué, toute l'opération eſt abrégée, puiſqu'il ne s'agit que de la porter de S en B pour avoir le point B de l'aſymptote qu'on doit mener par le centre C donné.

La démonſtration de ce Problême dépend de quelques propriétés des ſections coniques que nous ne pouvons rappeller ici; on les trouvera dans tous les Traités des ſections coniques.

La principale eſt, que les lignes qui traverſent les hyperboles d'une aſymptote à l'autre, ſont coupées également par leurs diametres; & parce que les ordonnées DO & dO ſont égales, comme dans toutes les ſections coniques, les reſtes Dr & dr, ſont auſſi égaux; ce qui fait la baſe de l'opération.

USAGE.

On rencontre aſſez ſouvent des hyperboles, lorſqu'il s'agit de faire des voutes ou d'autres corps coniques. La deſcription

de cette courbe eſt néceſſaire, 1°. pour faire l'épure de la porte en tour ronde & en talud ſuivant notre méthode; 2°. pour le trait de la trompe conique à trois pans; 3°. pour la trompe en tour ronde érigée ſur une ligne droite; 4°. pour les joints de la corne de vache; 5°. pour les naiſſances des arrieres-vouſſures bombées; 6°. pour la nouvelle arriere-vouſſure de Marſeille; 7°. pour les lunettes ébraſées dans une voute ſphérique; 8°. pour les arcs rampans dont les piédroits ſeroient en ſurplomb dans certains cas; 9°. pour les joints montans des arrondiſſemens coniques des angles en talud; 10°. pour la ſolution du Problême qui donne la maniere de tirer les joints de tête des ceintres elliptiques ou hyperboliques par des points donnés hors de ces courbes; 11°. enfin le Problême précédent peut ſervir ſi l'on veut au trait de la courbe de diminution & de renflement des colonnes, au lieu de la conchoïde de Nicomede. L'hyperbole ſelon moi vaudroit mieux pour la grace du contour, parce que ſi on les diminuoit à la maniere des anciens dès le bas, le fuſt de la colonne auroit plus de grace étant portion d'hyperboloïde que de cone tronqué; & par la nature de l'hyperbole la partie inférieure de la colonne auroit le plus grand arrondiſſement qui diminueroit & ſe redreſſeroit en montant ſous le chapiteau; ce qui auroit une grande analogie avec celui que la nature fait aux arbres, & par conſéquent une plus grande beauté, qui eſt une plus parfaite imitation de la nature.

On auroit donc pour le ſommet le côté de la baſe, pour point à la circonférence de l'hyperbole & pour ordonnée celui de la diminution ſous l'aſtragale du chapiteau, & pour le centre la diſtance du module ou demi-diametre de la colonne à la baſe portée ſur la prolongation de ce diametre hors de la colonne, ce qui tombe dans le cas du Problême précédent.

De tout ce que l'on vient de dire & de pluſieurs autres endroits où nous avons parlé des ſections coniques, on peut conclure que ceux qui diſent comme LA RUE dans ſon Traité de la coupe des pierres, que les ſections coniques ne ſont pas néceſſaires dans la pratique, n'en connoiſſent pas les uſages.

SCHOLIE.

Par une conſtruction ſemblable à celle de ce Problême, on peut décrire au-dehors ou au-dedans d'une ſection conique quel-

Fig. 127. conque une courbe ſemblable, dont il ſuffit d'avoir un ſeul point donné.

Soit pour exemple (*Fig.* 127) une ellipſe donnée PTB, dans laquelle on en veut décrire une aſymptotique par un point donné *e*; on tirera à volonté par ce point *e* une ligne 1, 2, qui coupera l'ellipſe donnée aux points 1, 2, on portera l'intervalle *e* 1, de 2, en *f*, le point *f* ſera un ſecond point de l'ellipſe demandée, lequel ſervira à en trouver un troiſieme, en menant par *f* une ligne auſſi à volonté *g* 4; on portera l'intervalle 3*f*, de 4 en *g*, où ſera un troiſieme point, lequel ſervira à en trouver un quatrieme *h*, en tirant 5 *g* 6, & portant *g* 5 en 6 *h*, ainſi de ſuite.

Ce que nous diſons ici pour l'ellipſe, convient auſſi à la parabole & à l'hyperbole; c'eſt pourquoi M. de LA HIRE a appellé les Figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à une ſection conique avec cette propriété, *aſymptotiques*, en ce que l'une peut être conſidérée à l'égard de l'autre, comme une aſymptote courbe, j'explique ce nom que j'adopterai quelques-fois pour éviter les périphraſes, parce que j'ai connu un grand Mathématicien qui ne le trouvoit pas à ſon gré.

PROBLEME XIII.

Par cinq points donnés qui ne ſoient pas en ligne droite, tracer une ſection conique quelconque par un mouvement continu, ſans en connoître les axes, les diametres, les centres, ni les foyers.

Fig. 126. Soient (*Fig.* 126) les points donnés AB*c*DE, par leſquels on veut faire paſſer une ſection conique qui ſe trouvera ſuivant leur ſituation une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole; dans l'exemple propoſé, ils conviennent à une ellipſe. Ayant tiré par deux de ces points, comme A, B, une ligne FG, prolongée au-delà des points A & B, on tirera les lignes A*c*, AB, AE, & B*c*, BD, BE: enſuite on prendra avec deux regles, ou avec l'inſtrument qu'on appelle ſauterelle, les angles DAF, DBG, dont on appliquera le côté AD en A*c*, la branche AF ſe rangera ſur A*x*, de même la branche BD de l'autre angle étant portée en BE, l'autre branche BG ſe rangera en B*c*; on en fera de même des angles BE*h*, BDI, & l'on aura l'interſection des côtés E*h* avec A*x* au point *x*, & *i*, avec BY, au point

point Y. On tirera la ligne droite xY; enſuite ayant fait avec les mêmes ſauterelles ou quatre regles les angles BAD, ABD mobiles ſur les points A & B, comme ſur des pivots, on fera croiſer les deux branches de la ſauterelle tout le long de la ligne droite xY, comme par exemple en k, les deux autres branches Ag, Bf ſe croiſeront en un point comme L, qui ſera à la circonférence de la ſection conique; on continuera de même en promenant la croiſée de k tout le long de xY; mais lorſque les branches Bf, Ag ſeront au-deſſous de B & A du côté de la ligne xY, il faudra en prolonger l'alignement par une regle appliquée au long de Ag ou de Bf.

La démonſtration de cette conſtruction eſt un peu trop longue pour lui donner place ici : il ſuffira de dire qu'il eſt démontré dans les Traités des ſections coniques, qu'on peut en faire paſſer pluſieurs différentes par quatre points donnés, mais non pas par cinq; or ſuppoſant (comme il eſt vrai) que ce mouvement organique ne peut produire qu'une courbe du ſecond ordre, ſi les points ſe trouvent diſpoſés pour une ellipſe, il n'y en aura qu'une qui ſatisfaſſe à la propoſition. On peut voir ſur cela le ſçavant Livre de M. *Mac-laurin*, intitulé *Geometria Organica*.

PROBLEME XIV.

Deux touchantes avec les points d'attouchement à une ſection conique, & la direction d'un ſeul diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe, ſans connoître le centre de la ſection, ni la grandeur d'aucun diametre.

Soient les deux touchantes données AD, DB (*Fig.* 129) qui touchent la ſection conique cherchée aux points A & B; ſoit auſſi la ligne AP, portion d'un diametre dont on n'a pas la longueur mais ſeulement la poſition, c'eſt-à-dire l'angle DAP, qu'il fait avec la touchante AD; ayant tiré la droite AB d'un point d'attouchement à l'autre, on la diviſera en deux également en F, par où l'on tirera la ligne droite DFC indéfinie, qui ſera portion d'un diametre ſur lequel on cherche un point de la courbe. *Fig.* 129

On ſçait que ſi la ſection eſt une parabole, cette ligne DC ſera parallele à AP, autre poſition de diametre donnée : ſi elle doit être une ellipſe, les lignes AP & DC ſeront convergentes

Pl. 11. Fig. 129. vers C; & ſi elle doit être une hyperbole, elles ſeront divergentes, & concourront hors de la courbe.

Par le point F on tirera FG parallele à AP qui coupera AD au point G, & l'on diviſera GD en deux également en I; par le point G on menera GH perpendiculaire à AD, puis du point I pour centre & de l'intervalle IA pour rayon, on fera un arc H*h* qui coupera GH au point H : enſuite on menera A*d* parallele à DC, on fera AK égale ſi l'on veut à GH, ou l'on en prendra une partie aliquote, comme la moitié, le tiers, ou le quart, ou on la fera plus grande, & l'on fera A*d* égal à AD, ou à la même partie aliquote que AK l'eſt de GH, & l'on tirera par le point D la ligne *d* E, juſqu'à la rencontre de AB prolongée s'il le faut en E, par où l'on tirera EK qui coupera DC au point *x*, lequel ſera un de ceux de la courbe.

Pour avoir enſuite un autre point de cette courbe, on menera par le point *x* une ligne *ab* parallele à AB, & l'on fera la même opération ſur les lignes A*a*, & *ax*, & B*b* & *bx* qui ſeront deux tangentes données, qu'on a fait ci-devant ſur les deux AD, DB, & l'on aura deux autres tangentes, dont une ſera toujours une partie de AD; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait cinq points de la courbe pour la tracer par un mouvement continu, par le Problême XIII, ou que les points trouvés ſoient multipliés & approchés autant qu'on le ſouhaite, pour la tracer exactement à la main ou à la regle pliante.

DE'MONSTRATION.

Il eſt démontré dans les ſections coniques, qu'un diametre, lequel étant prolongé, paſſe par la rencontre de deux tangentes, coupe en deux parties égales la ligne qui paſſe par les deux points d'attouchement; & par conſéquent toutes celles qui lui ſont paralleles; & par l'inverſe, que ſi l'on diviſe une ligne qui paſſe par les points d'attouchement de deux autres en deux également, & que de leur rencontre & par le milieu de cette ligne on en mene une autre prolongée, elle paſſera par le centre de la ſection conique ſi elle en a un; or par la conſtruction nous avons coupé AB en deux parties égales en F; donc la ligne DFC eſt un diametre.

Voyez la Hiſt. l. 2. p. 19.

Nous avons auſſi dit, Article 46, que la partie de ce diametre coupée par la ligne AB, qui joint les points d'attouchement,

celle qui eſt coupée par la courbe de la ſection, c'eſt-à-dire, le demi-diametre de celles qui ont des centres, & l'intervalle du centre au concours des deux tangentes, ſont contiuuellement proportionelles; donc ſuppoſant ce centre en C, qui ſera dans cette propoſition (ſi l'on veut) hors de la Figure 129, il ſera toujours vrai que CF : C*x* : : C *x* : CD, & que AP & DC doivent coucourir au centre de la ſection, ſi elle en a un; mais parce que l'on a fait HG moyenne proportionelle entre AG & GD, ſi l'on porte GH en AI, la ligne I*x* ſera parallele à AP, comme FG l'eſt à AP (par la conſtruction). Préſentement, à cauſe des trois lignes CF, C*x*, CD qui ſont en proportion continue, ou des trois AG, AI, AD, on aura CF : C*x* : : F*x* : *x*D, ou : : AG : AI, c'eſt-à-dire : : AK : A*d* (par la conſtruction;) donc à cauſe des paralleles A*d* & FD, on a F*x* : *x*D : : AK : K*d* : : CF : F*x* : : C*x* : CD; donc le point *x* eſt à la ſection, puiſqu'il coupe FD de maniere que C*x* eſt une moyenne proportionelle entre CF & CD; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 129.

Nous avons dit que ſi CD eſt parallele à AP, la ſection ſera une parabole; alors le point G tombera en D, & AI deviendra la même que AD, d'où il ſuit qu'il ſuffit de diviſer FD en deux également en z pour avoir ce point à la parabole; ce qui ſe trouveroit auſſi par la premiere conſtruction, parce que AK & K*d* ſeroient égales, & par conſéquent F*x* & *x*D qui leur ſont paralleles dans le triangle ADE.

Si les lignes DC & AP concourent au-dehors, la conſtruction ſera toujours la même, mais renverſée; telle eſt l'hyperbole à l'égard de l'ellipſe.

USAGE.

Cette propoſition peut ſervir dans l'arrondiſſement des angles des figures irrégulieres, par exemple, pour une cage d'eſcalier dans un angle aigu ou obtus, dont on prend la naiſſance à des points donnés par la convenance du lieu : elle peut auſſi ſervir pour les arcs rampans où l'on a trois tangentes & trois points d'attouchement donnés; mais pour ceux-ci, nous donnerons le Problême ſuivant.

PROBLEME XV.

Trois tangentes à une ſection conique & leur point d'attouchement étant donnés, trouver celle des ſections qui doit les toucher, & les lignes néceſſaires pour la décrire.

Premierement, on peut facilement connoître la nature de la ſection conique demandée par les obſervations ſuivantes.

Fig. 131. 1°. Si deux de ces tangentes ſont paralleles, comme AS, BO la ſection ne peut être qu'un cercle ou une ellipſe, parce qu'il n'y a que ces deux qui rentrent en elles-mêmes : elle ſera un * *Fig.* 130. cercle ſi les tangentes $p\,c$, $c\,T$ * ſont égales de même que $T\,i$ & $i\,r$, & une ellipſe, ſi elles ſont inégales, comme $p\,E$, EF * * *Fig.* 131. & RS, ST, &c.

2°. Si deux de ces tangentes n'étant pas paralleles, concourent en X (*Fig.* 127) du côté oppoſé au troiſieme point d'attouchement T donné, comme PA, RB, la ſection demandée ſera encore une ellipſe par la même raiſon, ou un cercle.

3°. Si les deux tangentes extrêmes AS, BO étant prolongées, concourent du côté du troiſieme point d'attouchement T donné, & que la tangente moyenne ſoit parallele à la ligne *Fig.* 128. RP (*Fig.* 128) qui paſſe par les points d'attouchement P & R des extrêmes, comme SO parallele à RP; il ſera encore facile de connoître quelle eſt la courbe qui ſatisfait à la queſtion.

Ayant diviſé RP en deux également en m, on tirera $m\,X$ qu'on diviſera en deux également en T.

1°. Si la tangente moyenne SO paſſe par ce point T, la courbe demandée ſera une parabole.

2°. Si cette ligne paſſe au-deſſous comme en $E\,l$, elle ſera une ellipſe.

3°. Si elle paſſe au-deſſus du côté de X, comme en $h\,y$, elle ſera une hyperbole.

* *Fig.* 132. 4°. * Si la tangente moyenne SO n'eſt pas parallele à RP, qui paſſe par les deux points d'attouchement des extrêmes, on connoîtra encore facilement quelle eſt la ſection qui ſatisfait à la propoſition; car ayant prolongé RP & SO, juſqu'à ce qu'elles concourent en Y, il ne s'agit que d'examiner le rapport des parties des lignes SY & PX, ſi SY : SO :: XO : OP, la courbe ſera une parabole; ſi le rapport de SY à YO, eſt moindre que

celui de XO à OP, elle ſera une ellipſe ; s'il eſt plus grand, elle ſera une hyperbole.

Premiere ſolution pour la parabole. Ayant diviſé RP en deux également en M, & tiré MX qui coupera SO en T, on lui menera par les points P & R, les paralleles PQ, RV juſqu'à la rencontre de SO prolongée, qui les coupera aux points V & Q ; on diviſera enſuite les lignes TX, PQ, RV en un même nombre de parties égales, par exemple ici en trois, à commencer le compre des diviſions vers la ligne SO ; les lignes menées par les points correſpondans 1 & 1, 2 & 2, ſe couperont en des points *y* & *z*, Y & Z qui ſeront à la circonférence de la parabole ; ainſi menant une ligne à la main, ou avec une regle pliante par les points R *z y* TYZP, on aura le contour de la ſection qui rouche les trois lignes données. *Fig.* 133.

Seconde ſolution pour l'ellipſe & l'hyperbole. Par les points d'attouchement donnés RTP, ayant riré les lignes RT, PT (*Fig.* 134) on les diviſera en deux également en N & *n*, par où & par les points S & O, on menera les lignes NS, *n* O, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point C, où ſera le centre de la ſection, par le moyen duquel on a déja un diametre en portant CT en C *t* ſur la même ligne prolongée ; ainſi la queſtion ſera réduite à celle-ci : *un diametre & une ordonnée à ce diametre étant données, trouver ſon parametre, & autant de points que l'on voudra de la ſection.* *Fig.* 134.

Par les points P & *t* ayant mené VP *t*, qui coupera SO prolongée en V ; on portera VT en TD ſur le diametre T *t* prolongé (*Fig.* 134.) & ſur la prolongation, on menera D 3 parallele à SO, qui ſera terminée au point 3 par la droite PT 3 ; par ce point, on menera 3 Q parallele & égale à DT, & l'on diviſera les longueurs 3 Q & TV en même nombre de parties égales, par leſquelles & par le point T on menera les lignes 1 T *y*, 2 T *z*, & du point *t* par les diviſions de TV, les droites *t y*, *t z*, qui couperont les précédenres aux points *y* & *z*, & qui ſeront à la circonférence de l'ellipſe (*Fig.* 134) ou de l'hyperbole (*Fig.* 135) ſi par les points *y* & *z*, on mene des paralleles *y f*, *z f* à SO, qui couperont le diamerre T *t*, (*Fig.* 134, ou ſa prolongation (*Fig.* 135 en *e* & *g*, & qu'on faſſe *e f* = *e y*, *g* F = *g* P, (*Fig.* 134) ou *g* R = *g* E (*Fig.* 135) on aura les points *t*, *f* & *f* correſpondans à ceux de l'autre côté de la courbe, & on pourra la tracer à la main ou avec une regle pliante ; *ce qu'il falloit faire.* *Fig.* 134. & 135.

DÉMONSTRATION.

Fig. 134. *Premierement*, pour l'invention du centre de la ſection. Puiſque les lignes RT & TP qui joignent les points d'attouchement ſont diviſées en deux également en N & *n*, & que les lignes NS & *n* O paſſent par la rencontre * des tangentes; elles ſont dans la direction des diametres, par conſéquent chacune d'elles paſſera par le centre qui ſera au point C qui leur eſt commun, & le point T étant à la circonférence, la ligne menée par CT ſera encore un diametre égal à 2 CT = T *t*, par la conſtruction; & parce que SO tangente paſſe par T, toute ligne comme *g* P qui lui ſera parallele, ſera une ordonnée à ce diametre, par le moyen de laquelle on a trouvé ſon parametre, qui doit être une troiſieme proportionelle au premier T *t*, & au ſecond inconnu qu'on ſuppoſe ici pour la facilité de la démonſtration égal EI (*Fig.* 134).

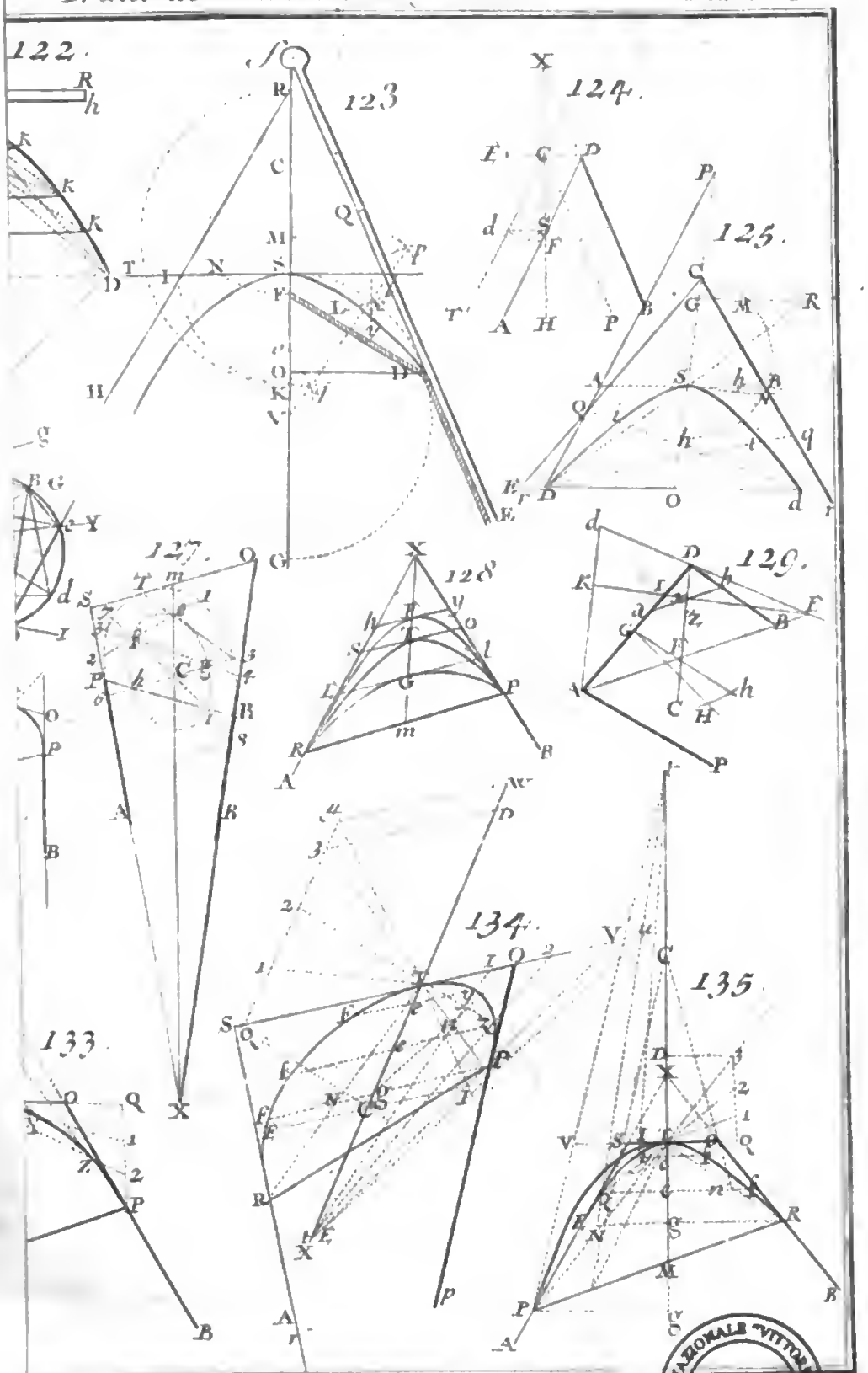
Art. 50. *Voyez la Hire l.* 2. *p.* 19. *L'Hôpital* Art. 20.

Ayant mené *t* I juſqu'en SO prolongée en *u*, & ayant fait comme dans la conſtruction TW = T *u*, W 4 parallele à SO, & tiré T 4, la ligne W 4 ſera le parametre du diametre *t* T; car ſi l'on appelle *t* T, 2 *a*; CI, *b*; T *u*, *d*; 4 W, *x*; à cauſe des triangles ſemblables T *t u*, C *t* I, on aura 2 *a* : *d* :: *a* : *b*, & à cauſe de TW = T *u*, & des triangles ſemblables T 4 W, TIC, on aura *a* : *d* :: *b* : *x*, donc en multipliant ces deux analogies, on aura 2 *a a* : *dd* :: *ab* : *bx*, & 2 *aabx* = *ddab*, & retranchant de part & d'autre *ab*: on aura 2 *ax* = *dd*, c'eſt-à-dire que le rectangle de 2 *a* = T *t* par *x* = 4 W, ſera égal au quarré de *dd* = 2 CI = EI, donc 4 W eſt le parametre qui eſt égal pour toutes les ordonnées *g* P, *ez*, *ey* au diametre T *t*, auquel il eſt troiſieme proportionelle; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de connoître quelle eſt la ſection qui convient aux trois tangentes données; car ſi les lignes qui paſſent par les rencontres des tangentes & les milieux des lignes qui joignent les points d'attouchement, concourent en-dedans, comme à la Fig. 134, la ſection eſt une ellipſe : ſi elle concourt en-dehors, *Fig.* 135 c'eſt une hyperbole, & ſi elles ne concourent point, qu'elles ſoient paralleles, c'eſt une parabole, *Fig.* 133.

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

CHAPITRE III.

De la deſcription de quelques courbes uſuelles dans l'Architecture, leſquelles ne ſont pas des ſections coniques.

PROBLEME XVI.

Tracer une ovale du quatrieme ordre formée par la ſection plane d'un corps cylindrique, annullaire, horiſontal ou rampant, c'eſt-à-dire, helicoïde.

SOit (planche 13. *Fig.* 149) la moitié d'un corps cylindrique annulaire DIGF *g i*, dont les côtés *i* DI extérieur, & *g* FG intérieur, ſont des cercles concentriques au centre C, & dont l'axe courbe eſt dans le même plan que ces deux cercles. Soit un autre plan perpendiculaire à celui-ci qui coupe le corps annullaire ſuivant la ligne AB; il faut décrire la courbe formée à la ſurface de ce corps par la ſection du plan. Pl. 13. Fig. 149.

Sur *i g*, diametre du corps cylindrique, ayant fait le demi-cercle *i h g*, qui repréſente la moitié de ſa baſe; on diviſera ce diametre *i g* en autant de parties que l'on voudra avoir de points de la courbe pour ſa moitié, juſqu'à une ligne CD, qui ſera priſe pour rayon du cercle extérieur, & perpendiculairement ſur i I; par les points de diviſion 1, 2, 3, 4, on fera du même point C pour centre autant d'arcs concentriques, prenant ſucceſſivement pour rayons de ces arcs C 1, C 2, C 3, C 4, & terminant ces arcs à la ligne AB par où paſſe le plan coupant aux points K, L, M, par leſquels on élevera autant de perpendiculaires indéfinies ſur AB, & pour en déterminer la hauteur, on élevera de même ſur le diametre *i g* autant de perpendiculaires par les points 1, 2, 3, 4, leſquelles couperont le demi-cercle *i h g* aux points *s*, *t*, *h*, *u*, *x*; enſuite portant les longueurs 1 *s* en K *k*, 2 *t* en L *l*, 3 *u* en M *m*, & 4 *x* en EÆ; on aura les points *k l m* Æ, par leſquels on fera paſſer une courbe tracée à la main, ou avec une regle pliante. On portera les ordonnées correſpondantes de l'autre côté de CD en N *n*, O *o*, P *p*, & on aura tout un côté de cette ovale depuis ſon axe AB, auquel l'autre ſera égal, ſi l'on a beſoin de le tracer: ce que

Pl. 13. Fig. 149. nous n'avons pas fait dans cette Figure pour ne la rendre pas trop confuſe.

A l'égard du milieu où eſt le plus grand abaiſſement de l'inflexion, il ſera trouvé par l'arc tangent à la ligne AB qui eſt ici 4 E, & ſa hauteur 4 *x* portée en EÆ.

COROLLAIRE I.

Si le plan coupant approche plus près du point F que la ligne AB, l'inflexion au milieu ſera plus grande; de ſorte que ſi le plan coupant paſſe par F au point d'attouchement du cercle *g* FG, qui eſt le côté intérieur de l'anneau, la courbe ſe diviſe en deux, & le point Æ tombe ſur le point F, parce que le point *g* correſpondant de la baſe *i h g* eſt dans le même plan que le point F, par conſéquent l'ordonnée EÆ, ſe réduit à rien. Si au contraire le plan coupant AB, toujours perpendiculaire à CD, paſſe par le point T milieu de FD l'inflexion de la courbe ceſſera vers ſon milieu où elle ſera très-peu courbe & preſque droite; & au contraire à meſure que le plan AB s'approchera de D, toujours perpendiculairement à CD, la courbe deviendra de plus en plus courbe vers ſon milieu, & reſſemblera fort à une ellipſe, ce que l'on peut facilement concevoir par la tranſpoſition des ordonnées 1 *f*, 2 *t*, *c h*, qui vont en s'élevant, & qui ſe rapprochent à meſure que le plan coupant s'approche de D, & parce que l'ordonnée 4 *x* qui s'abaiſſe à l'égard de *c h* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant paſſe en T, ou en-deçà vers D, de même que l'ordonnée 3 *u* n'a plus lieu, lorſque le plan coupant AB eſt plus près de D que le point 3 de la baſe *i h g*, n'eſt éloignée du point *i*, & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

Il eſt évident que ſi le corps annullaire eſt fort épais à l'égard du vuide de ſon milieu *g* FG, la ſection ſera plus ſenſiblement pliée dans la partie intérieure, c'eſt-à-dire quand la ſection ſe fait au-dedans de T, & plus arrondie en-dehors.

A l'égard de la ſeconde partie de ce Problême qui concerne la courbe faite par la ſection d'un corps annullaire, dont l'axe n'eſt pas dans un même plan, mais élevé en hélice tournante autour d'un axe, comme le lierre autour d'un arbre; nous avons dit

dit qu'elle étoit la même que la précédente, avec cette ſeule différence que ſes ordonnées K*k*, L*l*, M*m* ſous la Figure 149, ne ſont pas un angle droit avec leur axe a*b*, mais un angle aigu a K*k*, a L*l*, &c. leſquelles cependant ſeront toujours paralleles entr'elles, & inclinées à leur axe ſuivant le même angle. Pl. XIII. Fig. 149.

Ainſi pour tracer la courbe du corps cylindrique hélicoïde coupé par un plan parallele à l'axe de l'hélice; on commencera par tracer la ſection d'un corps annullaire horiſontal, de même demi-diametre de révolution CD, & de même diametre de baſe *i g*: enſuite ayant fait une ligne *a b* qui repréſente la ſection du plan vertical AB, avec l'horiſontal *a b* on élevera au point *a*, une ligne *a* a perpendiculaire à *a b*, & d'une longueur *a* a, qui ſera déterminée par l'élévation de l'hélice ſur l'horiſon au point où le plan vertical coupe le côté extérieur montant du corps cylindrique hélicoïde; & de ce point a de hauteur donnée, on tirera la ligne a*b* inclinée, qui ſera l'axe de la ſection qu'on cherche; il ne s'agit donc plus que de diviſer cet axe en même raiſon que l'axe AB du corps annullaire eſt diviſé, pour cela il n'y a qu'à en tranſporter les diviſions des abſciſſes ſur l'horiſontale *a b*, ou (ſi on les met ſur le même axe ED, enſorte que AB ſoit parallele à *a b*) on ne fera qu'abaiſſer des paralleles à ED, par les diviſions KLME, &c. leſquelles couperont l'axe incliné a *b*, en des points KLME, &c. ſur leſquels on portera les ordonnées de la baſe *i h g*, aux points correſpondans aux nombres 1, 2, 3, 4, comme l'on a fait ci-devant, & comme la Figure 149 le fait voir très-ſenſiblement.

La ſeconde différence qu'il y a de cette courbe à celle du corps annullaire, eſt qu'elle n'eſt pas uniforme à chaque moitié le long de ſon axe a*b*, à cauſe de l'obliquité de ſes ordonnées; elle eſt plus arrondie vers *a* du côté de l'angle aigu, que vers *b* du côté de l'angle obtus, la raiſon en eſt claire; car quoique toutes ces ordonnées ſoient paralleles, les diſtances de leurs ſommets ne ſont pas égales; en effet ſi l'on tire des lignes droides des points a & *b*, aux points *k* & P, quoique les côtés a K & p *b* ſoient égaux, de même que K*k* & P*p*; il eſt évident, par la Géométrie élémentaire, que dans les triangles *p b* P, a *k* K, qui ont deux côtés égaux qui comprennent des angles différents, la baſe oppoſée à l'angle obtus ſera plus grande que celle de l'angle aigu.

DE'MONSTRATION.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par l'axe du corps annullaire cylindrique, & ſur ce plan pluſieurs cylindres d'inégale grandeur, mais concentriques au centre C, & dont l'axe commun ſoit perpendiculaire au même plan *i* DIC, les ſections de leurs ſurfaces coupées par ce plan feront autant de cercles concentriques; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan AÆB perpendiculaire au premier, & coupant le corps annullaire & les cylindres, il ſera dans chaque cylindre un parallelogramme dont les côtés ſeront perpendiculaires au plan *i* DIC, comme K *k*, L *l*, M *m*, &c. & chacun de ces côtés aura une partie commune à l'ordonnée du cercle qui ſeroit fait par la ſection C *i*, CK, ou CD, d'un troiſieme plan coupant le corps cylindrique perpendiculairement à celui qui paſſe par ſon axe courbe, par le centre C, & l'origine de chaque ordonnée K, L, M, E, &c. comme C *y*, lequel feroit pour ſection un demi-cercle égal à *i h g*, que nous prenons pour baſe de ce corps; donc tous les points *k l m* Æ, &c. ſont au contour de la courbe, *ce qu'il falloit faire.*

Nous avons dit au Livre I. de quel uſage étoit cette courbe dans les voutes ſur le noyau & la vis St. Giles (*Fig.* 152) on en verra l'application au trait de ces voutes, au Livre IV; voilà à peu près toutes les ſections des corps, dont nous devons connoître les courbes.

Des courbes formées par les ſections du coin-conoïde.

Ce ſeroit ici le lieu de donner la maniere de tracer les courbes qui ſe forment dans le coin-conoïde lorſqu'il eſt coupé par des plans en différentes poſitions à l'égard de ſon axe; mais comme il y en a de circulaires & d'elliptiques dont nous avons ſuffiſamment parlé ci-devant, & qu'afin de donner une plus parfaite connoiſſance de celles qui ſont particulieres à ce corps, nous en avons mêlé la théorie avec la pratique, dans l'addition que nous avons faite au premier Livre de cette nouvelle Edition, on pourra y avoir recours pour les décrire par pluſieurs points trouvés de deux manieres, ou par le calcul, ou ſimplement avec la regle & le compas.

De la ſpirale.

QUoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces corps réguliers qui ſont le principal objet de notre Stéréotomie, elle eſt cependant une ſection de ceux que la nature produit, & que l'Architecture imite en pluſieurs rencontres, tels ſont certains coquillages, & quelques cornes d'animaux : par cette raiſon nous avons cru devoir lui donner place dans la deſcription des courbes uſuelles pour la conſtruction & la décoration des édifices.

Il n'y a pas de courbe dans la Géométrie qui puiſſe être ſujette à plus de variété que la ſprirale ; M. VARIGNON dans un Mémoire inſéré dans ceux de l'Académie des Sciences en a fait voir différentes générations, qui peuvent être pouſſées à l'infini ; nous qui n'en voulons qu'à la pratique, nous nous contenterons d'en donner les premiers principes.

PROBLEME XVII.

Tracer la ſpirale la plus ſimple & la plus uniforme, qu'on appelle la ſpirale d'Archimede.

Du centre C (*Fig.* 136) & de l'intervalle CA pour rayon pris à volonté pour celui d'une révolution entiere de la ſpirale ; ayant décrit un cercle A, 3, 6, 9, A, on en diviſera la circonférence en autant de parties qu'on voudra avoir de points au contour de la ſpirale ; on la diviſe commodément en 12 comme dans cette Figure, parce qu'en portant ſix fois le rayon à la circonférence du cercle, on n'a plus qu'à diviſer en deux chaque ſixieme, & tirer les diametres A 6, 9, 3, &c. on peut multiplier cette diviſion autant que l'on voudra, pour avoir la courbe plus exactement. Enſuite on diviſera le rayon CA en autant de parties qu'on a diviſé la circonférence, pour trouver par leur moyen ſur chaque différente poſition du rayon AC, la longueur du rayon de la courbe, laquelle partant du point A, s'approche continuellement de ſon centre C ; ou ce qui eſt encore mieux, ſi l'on veut la conſidérer autrement, partant du centre C, s'en

Pl. 12. *Fig.* 136.

écarte continuellement, en tournant autour de ce centre à l'infini, ſi l'on veut.

Du centre C, & pour rayon l'intervalle C 1, partie de CA, on décrira l'arc 1 *a*, lequel coupant le rayon C *a* 1, de la premiere diviſion de la circonférence A 1, donnera le point *a* au contour de la ſpirale; enſuite du même centre, & d'un intervalle plus petit d'une diviſion C 2; on décrira entre les rayons C *a* 1, C *b* 2, l'arc 2 *b* qui donnera le point *b* ſur le rayon C *b* 2. On continuera de même pour trouver les autres points *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, &c. en diminuant toujours le rayon d'une douzieme partie, juſqu'à ce qu'on ait parcouru toute la valeur du cercle A 3 6 9 A, & alors on aura une révolution entiere de la ſpirale, qui revient au rayon AC, d'où elle étoit partie.

Le cercle qui enferme la premiere révolution s'appelle *cercle circonſcrit*, & celui qui répond à pluſieurs, ou qui eſt au-dehors ou au-dedans du point A, s'appelle *cercle de révolution*, & les arcs, 1 *a*, 2 *b*, 3 *c*, *arcs de révolution*.

COROLLAIRE I.

Il ſuit par cette génération que les parties du rayon AC, ſont eſſentiellement proportionelles aux arcs de révolution, ou ce qui eſt la même choſe, à ceux du cercle circonſcrit; de ſorte que ſi le rayon AC en parcourt la vingt-quatrieme ou trente-ſixieme partie, ce rayon diminuera ou augmentera pour chaque arc de révolution d'une vingt-quatrieme ou trente-ſixieme partie, &c.

COROLLAIRE II.

Il ſuit encore que lorſqu'on veut avoir plus d'une révolution, par exemple une & demi, ou deux & un quart; il faut diviſer le rayon AC, que nous ſuppoſons toujours pris à volonté, en un nombre de parties convenables à ce deſſein, par exemple pour une & demi, dans la ſuppoſition de la diviſion de celle du cercle en douze, on diviſera le rayon en dix-huit parties, & pour deux & un quart en vingt-ſept, & alors on aura plus d'un point de la ſpirale ſur chaque rayon du cercle de révolution; on tracera enfin d'un point à un autre, une ligne courbe, à la main, ou avec une regle pliante, & l'on aura la ſpirale

qu'on demande ſi on la veut réguliere ; mais parce qu'on veut quelquefois en allonger ou raccourcir le contour ſuivant les différents effets qu'on ſe propoſe ; nous dirons comment on peut le varier. Pl. 12. Fig. 140.

COROLLAIRE III.

Si après avoir tracé une ſpirale comme en A*cfi*C du côté droit, on retrace la même tournée du côté gauche, comme la ponctuée A*kfl*C, qui croiſe la précédente en *f*, partant de la même origine A, & aboutiſſant au même centre C ; il ſe formera un entrelas, dont le milieu a la figure d'un cœur C*ifl*C, qui peut ſervir aux ornemens des grilles de fer contourné, & autres ouvrages de pareille nature, qui ont été fort à la mode dans les roſes des vitraux de l'Architecture Gothique.

PROBLEME XVIII.

Allonger ou racourcir le contour de la ſpirale, en telle raiſon que l'on voudra.

L'on peut réſoudre ce Problême d'une infinité de manieres ; car on peut faire les rayons des arcs de révolution dans le rapport des ordonnées de telles abſciſſes de courbe que l'on voudra choiſir, & les arcs de révolution dans le rapport de leurs ordonnées ; ce qui rend ce Problême très-général. On peut auſſi ſans varier les arcs de révolution, les faire tous d'un nombe égal de degrés, & varier ſeulement les rayons de ces arcs en telle raiſon que l'on voudra, comme dans celle des tangentes ou des ſecantes, ou des puiſſances, comme des racines, des quarrés, des cubes, &c. Les Architectes ſe ſervent dans leur volute Ionique du rapport des tangentes : j'en vais donner un exemple, où l'on peut augmenter l'inégalité des diviſions en élevant le rayon à diviſer AC, (*Fig.* 137) au-deſſus du point P, où eſt l'angle droit du ſinus total RP, par exemple en C (*Fig.* 138).

Soit donc le rayon donné AC pour le plus grand de la ſpirale (*Fig.* 137) dont on veut que le contour ſe reſſerre plus que la ſpirale réguliere, à meſure qu'elle approche du centre C, & à laquelle on veut faire faire deux révolutions. Ayant tranſporté ce rayon en aC, (*Fig.* 138) & ayant pris à volonté le point R, en ſorte qu'ayant mené à ce point une ligne CR, elle faſſe avec Fig. 137 & 138.

Fig. 137. & 138. a C, un angle obtus a CR, on tirera aR, & du point R pour centre & pour rayon RC, on fera l'arc CD qui coupera DR au point D; on diviſera cet arc en vingt-quatre parties pour deux révolutions, & par chaque diviſion, & par le centre R, on tirera autant de lignes juſqu'à la rencontre de a C, qui donneront vingt-quatre diviſions inégales diminuant vers le point C; on portera ces diviſions ſur le rayon AC (*Fig.* 137) où l'on les marquera par des chiffres, pour éviter la confuſion, & on opérera ſur ce rayon de la même maniere qu'au Problême précédent; ce qui donnera une ſpirale, telle qu'on la voit à la Figure 137.

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de faire une ſpirale dans une autre pour lui ſervir de compagne, qui forme avec elle une côte élevée, ou une creuſée en canal, comme aux volutes des chapiteaux des colonnes de certains Ordres d'Architecture, en ſorte qu'elles ſe reſſerrent plus ou moins au gré de l'Architecte, quoique partant ſi l'on veut d'un même point D, elles viennent aboutir au même centre C par différents chemins; ainſi la ſpirale D*i* KL *m n* C ſe rapproche plus de ſa compagne A 3 6 9 12 C que la ſpirale DEFGHC, quoique l'une & l'autre partent du même point D, & arrivent au même centre C.

Fig. 137. & 139. Soit (*Fig.* 139) la ligne A 12, égale à la diſtance donnée de la premiere révolution à la ſeconde, & dans cet intervalle un point D à volonté pris pour la naiſſance de la ſpirale intérieure, que l'on placera auſſi ſur le rayon AC de la Fig. 137; on fera 12 S perpendiculaire & égale à 12 A, puis on tirera SD & SA: ſur S 12, on portera tous les intervalles de la premiere ſpirale pris ſur les rayons tirés du centre C: C 2, C 4, C 6, &c. par exemple 1 5 3 de S en 3 à la Fig. 139, 18, 6 de S en 6, ainſi du reſte; & par les points 3, 6, 9, &c. ayant mené des paralleles à A 12 qui couperont SD aux points *e f g h*, on aura les longueurs *e* 3, *f* 6, *g* 9, *h* 12 qui donneront ſur les mêmes rayons du cercle de révolution A 6 12 18 A les points E, F, G, H, des diminutions des rayons pour la ſpirale intérieure ou compagne de la premiere A 3, 6, 9, 12, &c. D'où il ſuit qu'en élevant ou abaiſſant le point D, on change le contour de la ſpirale: préſentement ſi au lieu de la droite SD on avoit fait un arc de cercle S*c* D, ou S*b* D,

on auroit eu une compagne de la ſpirale, qui auroit commencé & fini au même point que la précédente, mais qui n'auroit pas ſuivi la diſtance proportionnelle triangulaire.

On peut non-ſeulement changer les longueurs des rayons, mais encore le rapport des arcs de révolution, ce qui peut fournir le moyen de faire une infinité de ſpirales, toujours différentes; car on peut faire ce rapport égal à celui des ordonnées d'une courbe quelconque Géométrique ou Méchanique, comme l'a imaginé M. VARIGNON, qui nous a ouvert le chemin à des variations infinies de ſpirales, où il s'en trouve d'un contour très-agréable: je vais donner un exemple de celles qu'il appelle *paraboliques verticocentrales*, c'eſt-à-dire, qui ont leur ſommet au centre de la ſpirale, choiſiſſant la plus ſimple, qui eſt celle qu'on tire du cercle; il ſera aiſé d'en faire l'application à l'ellipſe, aux autres ſections coniques, ou à telle courbe qu'on voudra.

Spirale circulaire, ou elliptique, ou parabolique, &c.

Soit, (*Fig.* 140) la ligne AX priſe pour l'axe d'une ſpirale, dont la courbe génératrice eſt un quart de cercle CLR: ſoit AC, le plus grand rayon de la ſpirale, & le point C pour ſon centre, la ligne AC ſera priſe pour l'axe de la courbe qu'on choiſit pour *génératrice*, laquelle eſt ici un cercle dont elle ſera le rayon, & le point A le centre: l'axe de la ſpirale AX, ſon centre C, & la courbe génératrice C 6 R étant donnés, on ſe déterminera au nombre de révolutions qu'on veut qu'elle faſſe, & l'on prendra une ligne conſtante ST, qui ſoit contenue dans la plus grande ordonnée RA de la courbe génératrice RLC, autant de fois que l'on veut de révolutions completes ou incompletes: nous la ſuppoſerons dans cet exemple contenue deux fois & demi dans RA, pour avoir deux tours & demi de la ſpirale; enſuite il faudra toujours faire cette analogie. *Fig.* 140.

Comme la ligne conſtante ST,
Eſt à l'ordonnée variable de la courbe génératrice,
Ainſi le cercle de révolution 12, 9, 6, 3,
Sera à l'arc de révolution au premier tour, ou au cercle de révolution, plus à un arc de ſeconde révolution donné.
A l'arc de révolution cherché; ſi la courbe génératrice eſt une

Pl. 12. Fig. 136. ellipſe, une parabole, ou une hyperbole, &c. la ſpirale s'appellera *elliptique, parabolique, ou hyperbolique, &c.*

Pour s'épargner le calcul de cette analogie, on diviſera la ligne donnée ST en autant de parties égales qu'on voudra, pour ſervir d'échelle propre à connoître le rapport de cette conſtante avec les ordonnées du cercle tirées par des points de l'axe AC, qui ſeront pris pour les termes des rayons des arcs de révolution, comme C 1^a, C 2^a, C 3^a, C 4^a, &c. leſquels termes ſeront auſſi ceux des abſciſſes de cet axe AX; ſuppoſant dans cet exemple la ligne ST diviſée en 12, & le cercle de révolution 12, 9, 6, 3, auſſi en 12, ou ſi l'on veut en 360 degrés, dont 30 répondront à une diviſion de ST; on diviſera l'ordonnée AR en 30 parties égales pour deux révolutions & demi, & par ces diviſions *b c d e* F, &c. on menera des perpendiculaires à l'ordonnée AR, ou ce qui eſt la même choſe des paralleles à l'axe AC, qui couperont la courbe génératrice ALC aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe AC, qu'elles couperont aux points 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a; enſuite par chacun de ces points, & du point C pour centre, on décrira des arcs de révolution proportionnés à la partie de la conſtante ST, par exemple pour la premiere, l'arc 1^a, 1^r de 30 degrés; 2^a, 2^r, de 60 degrés; 3^a, 3^r, de 90 degrés; 4^a, 4^r, de 120 degrés, & ainſi de ſuite; ce qui ſe fait facilement en diviſant le cercle en 12, & augmentant d'une douzieme de ſa circonférence à la rencontre du rayon auquel elle doit ſe terminer; comme on le voit dans la Figure aux points 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, 5^r, &c; par tous ces points trouvés, on tracera une courbe à la main, ou avec une regle pliante, & l'on aura une ſpirale, telle qu'on ſe la propoſe pour le nombre des révolutions: nous donnerons même le moyen de fixer les intervalles des révolutions, comme on le jugera à propos.

Nous ferons remarquer auparavant qu'on peut trouver les rayons des arcs de révolution d'une autre maniere; on tranſportera les diviſions de la ligne ST ſur CO^r, perpendiculaire à CA, par exemple en 6, 7, 8, 9, 10, d'où tirant des paralleles à CA, qui couperont la courbe génératrice aux points *f g h i k l*, on aura des longueurs 6*f*, 7*g*, 8*h*, 9*i*, 10*k*, &c. qui ſeront celles des abſciſſes, qu'on doit prendre pour rayons des arcs de la ſeconde révolution BDSV, prenant celle-ci pour exemple

exemple en partie seulement ; ainsi *c u* sera égal à CV, 90 *s*, à CS ; & CD à 60 *d*, &c &, sans prendre la peine de faire des arcs de révolution, il ne s'agit que de porter ces parties sur les rayons qui leur conviennent, c'est-à-dire, les correspondans au nombre des divisions de la constante plus ou moins, une ou plusieurs révolutions, comme L 3^r, donnera le point B sur CA, *l* 3 sur C 11^r, *k* 10 sur C 10^r, *i* 9 sur C 9^r, *h* 8 sur C 8^r, &c. Pl. 12. Fig. 140.

COROLLAIRE I.

D'où l'on tire le moyen de *fixer la premiere révolution de la spirale, à telle distance que l'on veut du centre C, sur l'axe AC* : car si l'on veut, par exemple, qu'elle commence en B, on menera par ce point B la ligne BL perpendiculaire à l'axe AC, jusqu'à ce qu'elle rencontre la courbe génératrice en L, par où menant LS parallele à l'axe AC, qui coupera l'ordonnée RA au point S, la distance SR sera la longueur de la ligne constante qui est ici égale à ST, laquelle a toujours un certain rapport avec la circonférence du cercle de révolution 12, 3, 6, 9 ; mais ce point B étant une fois déterminé, on n'est plus le maitre de changer les autres révolutions ; elles se trouvent réglées par le rapport des parties de la constante SR trouvée avec les arcs de révolution.

COROLLAIRE II.

L'inverse du Corollaire précédent est claire à la seule inspection de la Figure ; car si l'on veut connoître à quel point de l'axe AC se terminera la premiere révolution, il n'y a qu'à tirer par le point S, extrêmité de la constante ST, posée de R en S, une ligne SL parallele à l'axe, jusqu'à ce qu'elle coupe la courbe génératrice en L ; & par ce point L, mener la perpendiculaire LB au même axe, laquelle donnera le point B que l'on cherche : si la ligne ST est contenue plusieurs fois dans AC, on trouvera de même tous les points de révolution sur l'axe.

COROLLAIRE III.

Il suit naturellement de cette construction : 1°. Que si au lieu du cercle on avoit pris un quart d'ellipse pour courbe génératrice, & qu'on eut mis à la place de RA, la moitié de son

Pl. 11. grand ou de ſon petit axe, on auroit allongé ou reſſerré la ſpi-
Fig. 140. rale : 2°. Que plus la ligne ST ſera contenue de fois dans AR, plus la ſpirale ſera arrondie, & au contraire; par où l'on voit que cette conſtruction, indépendamment du changement qui provient de la courbe génétratrice qu'on peut choiſir, donne une grande facilité de ſe contenter ſur ſon contour plus ou moins redoublé : au lieu de poſer le ſommet de la courbe génératrice au centre de la ſpirale, on peut la mettre dans une ſituation différente, mais alors la ſpirale qui en réſultera, ne ſera plus du nombre de celles qu'on appelle *vertico-centrales* dont nous parlons : je vais donner un exemple d'un autre eſpece que M. VARIGNON appelle *co-centrales*.

Fig. 141. Soit (*Fig.* 141) la courbe HYP, une hyperbole équilatere, dont AC & C 24 ſont les aſymptotes, leſquelles font un angle droit en C, où je poſe le centre de la ſpirale, & par conſéquent celui du cercle de révolution DEFG, que je fais d'une ouverture de compas priſe à volonté, & dont je diviſe la circonférence en tel nombre de parties que je veux avoir de points de la ſpirale à chaque révolution : par exemple en douze. Enſuite ayant pris auſſi à volonté une ligne conſtante, par exemple CG, je la diviſe auſſi en douze parties égales, c'eſt-à-dire en un même nombre que la circonférence du cercle de révolution, & par chacune de ces parties, je mene des paralleles à une des aſymptotes AC, que je prends pour l'axe AX de la ſpirale; & parce que cette premiere parallele rencontre l'hyperbole hors de cet axe en H, je commence auſſi ma ſpirale au point 1 *r*, éloigné de l'axe AX d'une douzieme partie de la révolution A 1 *r* du point 2, où la ſeconde diviſion de la conſtante CG, donne le point 2; je fais un arc 2, 2 *r* de deux douziemes de la révolution, qui me donne le point 2 *r*, & ainſi de ſuite, comme aux ſpirales paraboliques verticocentrales; mais enfin parce que l'hyperbole HYP, ne parvient jamais à ſon aſymptote CG, cette ſpirale ne fera que tourner autour du centre C, dont elle approchera toujours à chaque révolution, ſans pouvoir jamais y arriver.

Je ne m'arrêterai pas aux différences des poſitions des courbes génératrices, qui croiſent l'axe de la ſpirale; je dirai ſeulement qu'alors il ſe forme deux ſpirales, une d'un côté, l'autre de l'autre de cet axe, leſquelles ſont égales & tournées en ſens contraire, comme nous l'avons dit de la ſpirale d'Archimede,

(*Fig.* 136) ſi les deux parties de la courbe génératrice ſont égales; mais ſi elles ſont inégales, il eſt clair que la figure de cœur qui en réſulte deviendra irréguliere, un côté étant plus ou moins enflé que l'autre; ce qui n'eſt d'aucun uſage pour les ornemens d'Architecture. C'eſt pourquoi je paſſe ſur les variétés infinies qui en peuvent réſulter, les exemples que je viens de donner étant ſuffiſans pour exercer les Architectes & les Artiſtes qui ont des ornemens à tracer dans des agréables variations de contour de ſpirales.

J'avertirai ſeulement; 1°. Que ſi la courbe génératrice ſe ferme du côté de l'axe de la ſpirale, comme ſi l'on prenoit un demi-cercle ou une demie-ellipſe au lieu de leur quart, la ſpirale ne continueroit pas à tourner du même ſens, depuis la plus grande ordonnée; mais elle ſe rebrouſſeroit & reviendroit en quelque façon ſur ſes pas, ayant ſa concavité tournée du même côté.

2°. Que ſi l'on prend pour courbe génératrice une hyperbole équilatere co-centrique, c'eſt-à-dire, dont le centre ſoit le même que celui de la ſpirale, celle qui en ſera engendrée, n'aura ni commencement ni fin; c'eſt-à-dire, qu'elle commencera à une diſtance infinie de ſon centre, & n'arrivera jamais à ce centre, & cependant que lui donnant un commencement, elle coupera ſon axe après la premiere révolution; ce qui eſt une ſuite des propriétés des aſymptotes, qui approchent à l'infini de l'hyperbole ſans pouvoir y arriver, comme nous venons de le dire.

3°. Que ſi l'on prend pour courbe génératrice une courbe logarithmique, au lieu de l'hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée aura un commencement & n'aura point de fin; ou ſi elle a une fin, elle n'aura point de commencement, ſelon que l'on mettra ſon aſymptote ſur l'axe, ou perpendiculairement à l'axe de la ſpirale.

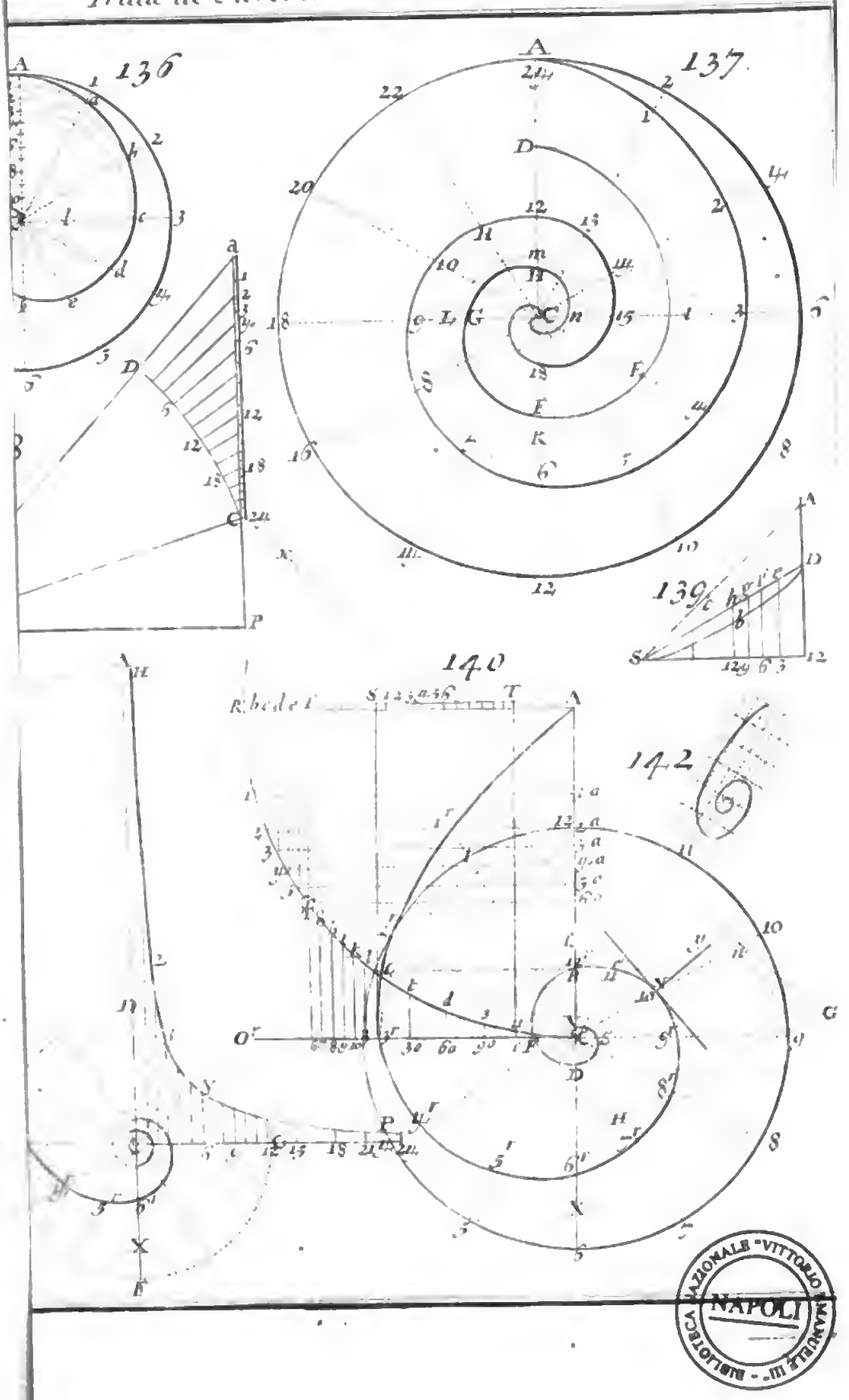
On peut faire la même choſe par le moyen de l'hyperbole, en mettant le centre de la ſpirale, non au centre de l'hyperbole, mais ſur une de ſes aſymptotes à quelque diſtance de ce centre; ce qui fournit un moyen très-commode pour tracer une infinité de volutes qu'on peut faire venir d'un point éloigné du centre & de l'axe, & les faire finir au milieu par un *œil* circulaire, comme font les Architectes à la volute Ionique, parce que l'on peut ſauver plus délicatement le jarret qui ſe fait à la

jonction de la ſpirale & de cet *œil*, ſi elle eſt de la nature de celles qui tournent autour de leur centre ſans y arriver; par la même raiſon, on fait auſſi plus parfaitement la jonction de la branche droite du limon avec *la volute ou limaçon* qui le termine au bas des eſcaliers les plus à la mode.

On peut encore changer toutes ſortes de ſpirales en les élargiſſant ou en les reſſerrant de telle maniere que l'on voudra, par le moyen de la réduction des quarreaux changés en parallelogrammes & même en trapezes; ſi on vouloit la reſſerrer d'un côté plus que de l'autre, ſuppoſant par exemple que ſuivant un deſſein que je me propoſe, je trouve la ſpirale ALBVC (*Fig.* 140) trop ouverte ſur ſon diametre 2^r C 8, je n'ai qu'à faire des parallelogrammes reſſerrés ſuivant cette condition, comme on voit à la
Fig. 142. Fig. 142, & tracer ſur l'original des quarrés en même nombre, ce que l'on n'a pas fait ici pour éviter la confuſion, parce que tous les Deſſinateurs ſçavent réduire au quarreau du petit au grand, & qu'il n'y a ici d'autre différence que celle de la figure des quarreaux qui ſont quarrés dans l'original & oblongs dans la réduction; ce qui fait une figure diſſemblable, mais cependant encore proportionnelle en un ſens.

USAGE.

La ſpirale eſt une courbe dont on fait uſage en Architecture en pluſieurs ſortes d'ouvrages; premierement elle eſt très-fréquente dans les ornemens de ferrurerie & de ſculpture; on l'employe pour les volutes des chapiteaux Ioniques & Compoſites en petit, & en grand dans les amortiſſemens de différentes pieces d'Architecture, particulierement pour les conſoles & les terminaiſons des contreforts ou piliers butans qu'on éleve pour arcbouter les voutes des nefs & des dômes des Egliſes, comme on en voit en quatre différens endroits au-dehors du Val-de-Grace à Paris, & dans toutes les Egliſes modernes, tant en Italie qu'ailleurs. Les Architectes qui ont du goût pour tracer l'ornement, leur donnent des contours tâtonnés en renflant ou en reſſerrant chaque partie, ſelon qu'ils trouvent que l'œil eſt plus ou moins ſatisfait: s'ils avoient connoiſſance des ſecours de la Géométrie, je ne doute point qu'ils ne réuſſiſſent beaucoup mieux dans la grace du contour, lequel étant intrinſéquement régulier, ſe préſente par toutes ſes parties avec une



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

uniformité qui ne contente pas moins l'eſprit que les yeux ; ce que l'on ne peut ſe flatter de faire par le ſeul tâtonnement.

Enfin la ſpirale eſt une courbe néceſſaire pour former la baſe des enroulemens qui s'élevent en limace, comme ſont ceux que l'on fait aux extrêmités des limons des eſcaliers, que les ouvriers appellent *limaçons* : la *circulaire*, telle que nous venons de la donner à la Figure, convient mieux à l'évaſement des premieres marches, & à la jonction du limon droit que la ſpirale d'Archimede, ou la volute des Architectes, comme j'en ai fait l'expérience chez moi où je l'ai employée, & celle qui eſt hyperbolique co-centrale encore mieux ; nous donnerons ci-après la maniere d'en tracer les joints.

Des arcs rampans.

EN termes d'Architecture les lignes qui ne ſont ni verticales ni horiſontales, mais inclinées à l'horiſon, ſont appellées *rampantes*, & les arcs dont les naiſſances ne ſont pas de niveau entr'elles, l'une étant plus baſſe que l'autre, ſont appellés *arcs rampans*, tels ſont les *arcs-droits* des deſcentes biaiſes, dont les naiſſances du ceintre de face ſont de niveau, & les arcades pratiquées au-deſſous des rampes des terraſſes ou des eſcaliers.

Pour expliquer géométriquement & plus généralement la ſignification de ce terme à l'égard des lignes courbes, on peut dire que toutes celles dont les ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à un diametre vertical, lorſqu'elles ſont paralleles à la ligne qui paſſe par les naiſſances de l'arc, ſont des courbes rampantes & *des arcs rampans*.

Il eſt bon de faire remarquer ici que les appareilleurs appellent particulierement *courbe rampante*, celle du limon de la *vis-à-jour* ; mais nous ne croyons pas devoir ici nous priver d'une expreſſion générale pour nous conformer à un langage ſi peu reſpectable.

PROBLEME.

Changer en arc rampant un arc de cercle, ou d'une courbe quelconque.

Soit donné (*Fig.* 143) l'arc de cercle AHB qu'on ſuppoſe. *Fig.* 143.

Pl. 13. *Fig.* 143. ici un demi-cercle, quoiqu'il puiſſe être un ſegment plus ou moins grand; ſur le milieu C de la corde AB, on élevera une perpendiculaire indéfinie C*h*, à laquelle on menera deux paralleles par les extrêmités A & B; enſuite on prendra ſur C*h* un point *c* à volonté pour le ſommet d'un angle C*cb* qu'on fera égal au complement de l'inclinaiſon qu'on veut donner à la rampe avec une ligne de niveau *b*N, & l'on tirera la ligne *ab* qui ſera terminée par les paralleles indéfinies A*a*, B*b*, dont les interſections en *a* & *b* donneront les points des naiſances haute & baſſe de l'arc rampant qu'on ſe propoſe de faire.

Enſuite ayant tiré à volonté pluſieurs paralleles OO, *ii*, DF à la corde AB, qui couperont CH aux points *r*, G, *e*; on portera les abſciſſes C*r*, CG, C*e* & CH, en *c*R, *cg*, *c*E, & *ch*: & par les points R*g*E, on menera des paralleles à *ab*, ſur leſquelles on portera de part & d'autres les longueurs *r*O, G*i*, *e*D du demi-cercle qui donneront les points *o*, I, *f*, *h*, *d*, &c. par leſquels on tracera à la main, ou avec une regle pliante le contour de l'arc rampant *ahb*, qu'on demande.

Fig. 144. On peut faire la même choſe d'une autre maniere, en menant à volonté (*Fig.* 144) autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C*h*, prolongées indéfiniment, & portant ſur chacune de ces paralleles, comme *o*R, & *o*D, les longueurs O*r* & O*d* compriſes dans le ſegment de cercle donné, en OR & OD, au-deſſus de la ligne inclinée *ab*, & l'on aura autant de points que l'on voudra *a*R*h*D*b* de l'arc rampant demandé, qui eſt, comme l'on voit, une portion d'ellipſe.

Second exemple pour toute autre courbe que le cercle.

Fig. 145. Soit (*Fig.* 145) une ſpirale DBHL*c* que l'on veut faire ramper en tout ou en partie; ayant pris pour axe la verticale AB, qui paſſe par le centre de la ſpirale, à laquelle les Architectes ont donné le nom de *cathete*; on lui menera à volonté autant de perpendiculaires qu'on voudra avoir de points de la ſpirale rampante, comme DA, EH, FN, GI, &c. que l'on prolongera juſqu'à ce qu'elles rencontrent une autre ligne *ab*, parallele à AB & diſtante à volonté, qu'elles couperont aux points *a hlkb*: enſuite on fera l'angle *hki* égal au complement de l'inclinaiſon que l'on veut donner à la rampe, pour déterminer la poſition d'une des ordonnées *ki*, à laquelle on menera des

Digitized by Google

paralleles indéfinies par les points trouvés *a h l k*, comme *a d*, *h e*, *l n*, *c o*, *k g*, ſur leſquelles on portera les longueurs des ordonnées à l'axe AB, comme AD en *a d*, HE en *h e*, LF en *l f*, &c. ſuivant leur ordre, & l'on aura les points *d e f g b i n h m l c*, par leſquels on tracera à la main une ſpirale, qui eſt celle qu'on demande. *Fig.* 145.

Troiſieme exemple, pour les Figures mêlées de différentes courbes, par exemple (*fig.* 146) un contour de baluſtre droit qu'on veut rendre rampant pour porter un appui de rampe d'eſcalier. *Fig.* 146.

Ayant mené des perpendiculaires à l'axe AB, c'eſt-à-dire, à la ligne du milieu du baluſtre droit, juſqu'à la rencontre d'une parallele CD, poſée à diſtance priſe à volonté, on menera par tous les points de rencontre autant de lignes inclinées à CD, ſuivant la pente de la rampe donnée, ou déterminée par la ſituation des lieux, qui couperont une troiſiéme parallele *a b* priſe pour l'axe du baluſtre rampant à diſtance priſe à volonté, en des points correſpondans aux diviſions du baluſtre droit, qui ſeront les milieux des diſtances des côtés du baluſtre rampant, comme on vient de le dire pour la ſpirale dans l'exemple précédent; ce que la Fig. 146 expoſe ſenſiblement à la vûe.

USAGE.

Ce Problême & particulierement les deux derniers exemples, ſont la baſe de la pratique de tous les ornemens de bois, de pierre, ou de fer que l'on met aux appuis des rampes des eſcaliers; car ayant commencé par tracer régulierement les baluſtres, guillochis & enroulemens de rinceaux & autres deſſeins, tels qu'on les veut dans une ſituation horiſontale, on en ralonge les parties inférieures, & on racourcit les ſupérieures dans une ſi juſte proportion, que l'œil n'eſt point choqué de ce changement; & bien loin de cauſer de la difformité dans les contours des ornemens, il ſemble au contraire qu'il y ſurvient une variété agréable à la vûe.

Il peut auſſi ſervir pour les ceintres des arcades & voutes rampantes, lorſqu'on n'a aucune ſujettion de hauteur ou de direction de piédroit, parce qu'alors il n'y a qu'à changer l'arc circulaire en rampant; mais à cauſe des différences qui peuvent y ſurvenir, nous devons y pourvoir par un Problême général.

Des courbes qui conviennent à ces ſortes de voutes & d'arcades qu'on appelle Arcs-rampans.

NOus avons parlé au Problême précédent de la tranſmutation des courbes dont les ordonnées ſont horiſontales en courbes inclinées à l'horiſon; il s'agit à préſent de trouver le moyen de faire paſſer une courbe par certains points donnés, qui ſont ceux des impoſtes & des clefs des arcs rampans, avec cette circonſtance qu'elle ſoit touchée par les lignes droites qui paſſent par ces points, leſquelles doivent auſſi être données de poſition ou de direction.

Les lignes qui doivent toucher les arcs rampans, ſont premierement les deux *piédroits* ou *jambages* qui portent l'arcade; leſquels peuvent avoir trois ſituations différentes, 1°. ou verticale, lorſqu'ils ſont *à plomb*, en termes de l'Art; 2°. ou inclinés en *ſurplomb*; 3°. ou inclinés en *talud*.

Secondement, une ligne réelle ou imaginaire qui termine la hauteur de l'arc rampant, laquelle peut auſſi être horiſontale, ou inclinée à l'horiſon.

La ſituation la plus ordinaire des piédroits eſt la verticale; cependant quelquefois, pour plus de ſolidité, on leur donne du talud, & quelquefois auſſi, pour mieux buter & appuyer une voute ou un mur, on les fait en ſurplomb; ce cas eſt plus rare dans la pratique que le précédent, car on ne fait plus guere d'arcs-boutans comme dans l'Architecture Gothique; les Modernes tâchent de cacher la néceſſité de ces eſpeces de contreforts par des moyens plus agréables à la vûe, comme ſont des groupes de colonnes, ou des conſoles renverſées.

La ſituation la plus naturelle à la termination de la hauteur d'un arc rampant, ſemble être une ligne horiſontale; en effet il peut toujours être terminé par une telle ligne, qui devroit être appellée la ligne de *ſommité*; cependant on appelle ainſi toute ligne donnée qui traverſe les piédroits prolongés, & qui doit toucher la courbe de l'arc rampant.

Outre ces trois lignes eſſentielles aux arcs rampans, qu'elles doivent toucher, on en conſidere une quatrieme, qui joint leurs points d'attouchement aux piédroits qu'elle coupe, leſquels ne

ſont

ſont pas de niveau, par la nature de cette eſpece d'arc ; on l'appelle *la ligne de rampe.*

Les différences de poſition de ces quatre lignes ; ſçavoir, des deux piédroits, de la ligne de ſommité & de la ligne de rampe, ſont toute la difficulté & la variété des cas où il faut chercher les courbes convenables.

Il eſt évident à tous ceux qui ſçavent un peu de Géométrie, qu'on peut trouver une infinité de courbes qui peuvent toûcher les trois premieres lignes droites dans tous les cas, ou du moins dans pluſieurs de ceux qu'on peut propoſer ; mais on ſe borne en Architecture à celles des ſections coniques qui ſont les plus connues, pour éviter les difficultés que les autres entraînent avec elles, ou dans leur conſtruction, ou dans la maniere de leur mener des tangentes en certaines circonſtances marquées.

Pour moi je trouve qu'à cette difficulté près les ſpirales de M. VARIGNON, donnent un contour de ceintre autant & plus agréable à la vûe que celui des ſections coniques qu'on peut employer pour un arc rampant : je pourrois parler auſſi de la ſpirale d'ARCHIMEDE ; mais on ne peut pas la varier autant que celles-là. Or cette difficulté n'eſt pas petite, ſi l'on vouloit opérer géométriquement ; on peut même dire qu'elle eſt inſurmontable, car ARCHIMEDE a démontré que la ſous-tangente de la ſpirale étoit égale à la circonférence du cercle de révolution ; d'où il ſuit que ſi l'on pouvoit lui tirer une tangente, on auroit trouvé la quadrature du cercle. Cependant ſuppoſant la rectification de la circonférence du cercle, qu'on connoît ſuffiſamment pour ne pas trouver d'erreur dans la pratique ; on peut mener des tangentes à cette ſpirale, comme nous le dirons ci-après.

On demandera s'il eſt de néceſſité indiſpenſable que la courbe du ceintre de l'arc rampant touche les deux piédroits, & pourquoi ?

A cela je réponds, ce que j'ai déja dit ailleurs, que puiſque l'arc doit être une continuation du piédroit, il doit ſe faire une tranſition inſenſible de la ligne droite du piédroit à la courbe de l'arc rampant ; or l'alliance de la ligne courbe avec la droite, ne peut ſe faire qu'au point de l'attouchement, où l'angle qu'elles font enſemble eſt infiniment grand, par conſéquent imperceptible à la vûe, puiſqu'il differe infiniment peu de la

ligne droite, l'œil ne peut être trompé que par cet artifice; toute autre jonction ailleurs qu'au point d'attouchement devient difforme & choque la vûe : l'Architecte de la Chapelle de Verſailles n'a pas ſenti ce défaut, lorſqu'il a fait des arcs rampans ſous les arcboutans au-deſſus des bas-côtés; car leur jonction au grand mur eſt un bon pli bien marqué; c'eſt un arc coupé & appliqué contre ce mur ſans art & ſans naiſſance naturelle, ſur un piédroit, ou ſur un doſſeret.

Le plus grand ſujet de variation des arcs rampans vient de la ligne de ſommité, qu'il eſt au choix de l'Architecte d'approcher ou d'éloigner des impoſtes de l'arc, & de lui donner telle direction & inclinaiſon qu'il juge à propos, ſuivant le deſſein qu'il ſe propoſe, & l'égard qu'il a à la ſituation des lieux, comme lorſque l'arc rampant doit ſoutenir un pallier, ou ſe terminer ſous un plinte de niveau, la ligne de ſommité devient horiſontale. Quelquefois il convient de donner à cette ligne une direction parallele à celle de la ligne de rampe, comme lorſque l'arc rampant ſoutient une ſeconde rampe égale & parallele à la premiere, quelquefois plus ou moins inclinée; ſi cette ſeconde rampe, ou un plinte ou corniche au-deſſus eſt inclinée plus ou moins; dans ces deux dernier cas, le point d'attouchement de la ligne appellée de ſommité, n'eſt pas au ſommet de la courbe; je veux dire à l'endroit le plus élevé, comme les Figures 148 & 150 le font voir: puiſque ce point eſt variable, il s'agit de le trouver, lorſqu'on a déterminé la diſtance & l'inclinaiſon de la ligne de ſommité.

PROBLEME XX.

La direction des piédroits, la ligne de rampe, & celle de ſommité d'un arc rampant étant donnés, décrire la ſection conique qui doit lui ſervir de ceintre.

Ou en termes Géométriques.

Trois lignes inclinées entr'elles qui doivent toucher une ſection conique, dont les points d'attouchement des deux extrêmes ſont donnés, trouver celui de la moyenne, & les lignes néceſſaires pour décrire cette courbe.

Soient les piédroits AR, BP (*Fig.* 147, 148, 150, 151) la

ligne de rampe RP, la ligne de ſommité SO: Premierement, ſi les piédroits AR, BP ſont paralleles entr'eux, auſſi-bien que les lignes de rampe RP, & de ſommité SO; * il eſt clair que le point d'attouchement de cette derniere eſt donné au milieu de SO au point T, parce qu'en ce cas la ſection qui ſatisfait au Problême eſt une ellipſe, comme nous l'avons dit ci-devant, & que la ligne T *t* qui paſſera par le milieu de RP, ſera un diametre conjugué à la ligne de rampe où ſera le centre C, parce que BP & SO étant des tangentes, les lignes qui leur ſont paralleles, & qui paſſent par le centre C, ſont des diamertes conjugués; cela ne ſouffre point de difficulté.

* *Fig.* 147.

Dans tous les autres cas où les lignes de rampe & de ſommité ne ſont pas paralleles; quoique les piédroits ſoient paralleles entr'eux, ou ne le ſoient pas; on trouvera le point T, où la courbe doit toucher la ligne de ſommité, comme il ſuit. *Fig.* 148. 150, 134, & 151.

Ayant prolongé les lignes RP & SO données juſqu'à ce qu'elles concourent en Y; par le point S on menera une parallele DE à OR, ſi les piédroits ne ſont pas paralleles, comme aux Figures 150 & 151, laquelle ne ſera qu'un piédroit prolongé, s'ils ſont paralleles, comme à la Figure 148, elle coupera RY en D; enſuite ayant porté DS en SE, ou Figure 148, PS en SE, on tirera ER qui coupera SO au point T, où ſera celui d'attouchement que l'on cherche.

Ce point étant trouvé: 1°. Il ſera facile de décrire la ſection conique qui doit toucher les trois lignes AO, OS, SB aux points R, T, P, par le Problême XIV.

2°. On pourra auſſi la décrire par le Problême XIII, parce qu'on a cinq points donnés; ſi elle eſt une ellipſe ou une hyperbole, dont le centre ſoit dans l'étendue du plan où on veut la décrire; car menant des paralleles à SO par les points donnés à la circonférence P & R qui couperont le diametre T *t* en V, & *u*: ſi on fait V *p* = PV, *ur* = *u*R, *q*C = C*u*, & qu'on meme par *q* une parallele à SO, ſur laquelle on prenne *qn*, *q*N = *u*R, *ur*, & C*t* = CT, on aura déja huit points de l'ellipſe. *Fig.* 150.

3°. Suppoſant que le centre ſe trouve loin hors de l'étendue de la ſurface, ſur laquelle on veut la décrire; on pourra en trouver autant de points que l'on voudra par le Problême XV, car on a deux tangentes, & la poſition d'un, & même de deux diametres S*m* & OM, qui paſſent par les points S & *m*, O & M, ſuppoſant PT & TR diviſés en deux également en *m* & M.

Fig. 150. 4°. On peut par ce moyen trouver les diametres conjugués ; car puiſque T *t* eſt donné, en faiſant C *t* = CT, que ſon conjugué doit paſſer par le point C trouvé, comme au Problême XV, & parallelement à SO, il ne s'agit plus que de trouver ſa longueur de part & d'autre du point C ; ce que l'on peut faire par le Problême IV, puiſqu'on a une & même deux ordonnées au diamètre *t* T ; ſçavoir R *u* & P *u*, ou par un autre méthode que voici.

Ayant mené par le centre C une ligne FG parallele à SO ; on menera auſſi RK parallele à T *t* ; enſuite on cherchera une moyenne proportionelle entre CK & CG, laquelle donnera C *z* pour moitié du diametre conjugé à T *t* par l'Art. 46 qui dit que les lignes menées du centre à la tangente, & coupées par une ordonnée, ſont diviſées en raiſon continuellement proportionnelles CK : C *z* : : C *z* : CG.

DEMONSTRATION.

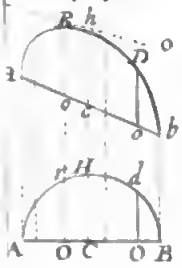
Nous avons dit dans nos préliminaires ſur les ſections coniques, Art. 48, que les tangentes à une ſection conique qui ſe rencontrent, & qui ſont terminées par d'autres lignes tirées par deux points d'attouchement, ſe coupent en raiſon harmonique ; ce que nous avons dit être démontré dans les Traités de ces ſections : or la tangente OY eſt coupée par la ligne RP prolongée, qui paſſe par deux points d'attouchement R & P, & par les tangentes RO & PS, qui paſſent par ces mêmes points R & P ; donc on a trois points d'une diviſion harmonique ; ſçavoir, O, S, & Y, il reſte à prouver que le quatrieme T eſt bien trouvé.

A cauſe des triangles ſemblables YOR, YSD, on aura YO : OS : : YS : SD = SE, & à cauſe des triangles ſemblables ORT, SET, on aura OR : SE : : OT : ST ; donc, par raiſon d'égalité, YO : OS : : OT, ST ; *ce qu'il falloit démontrer.*

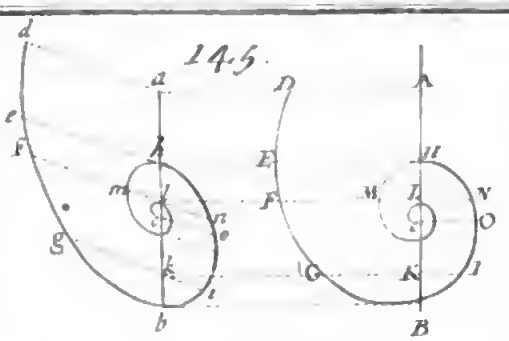
REMARQUE.

Cette propoſition renferme quinze Problêmes que François BLONDEL a donnés pour trouver les courbes des ſections coniques qui peuvent toucher toutes ſortes de piédroits & de lignes de ſommité en quelque poſition qu'ils puiſſent être pour former un arc rampant ; ainſi elle abrege beaucoup cette matiere.

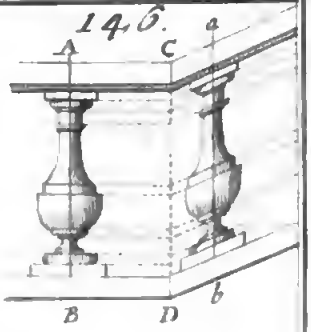
144.



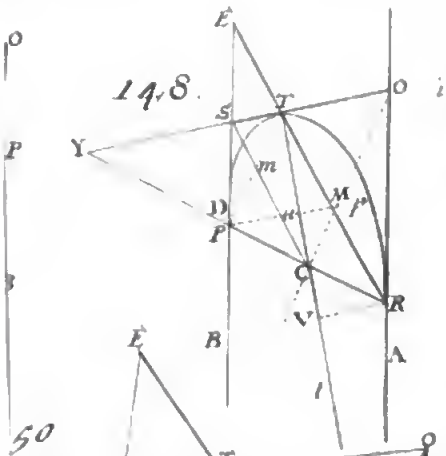
145.



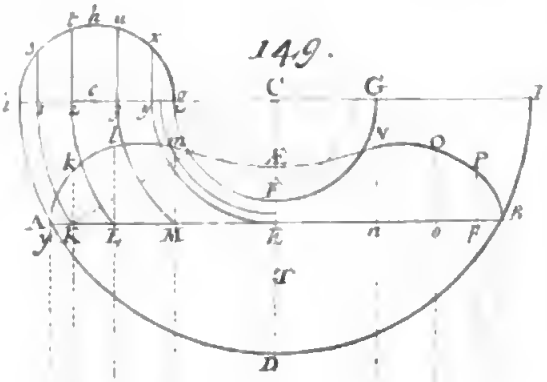
146.



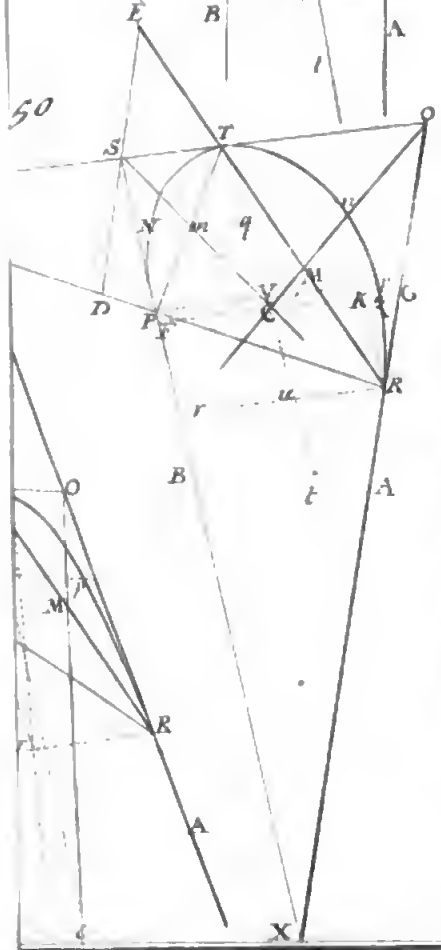
148.

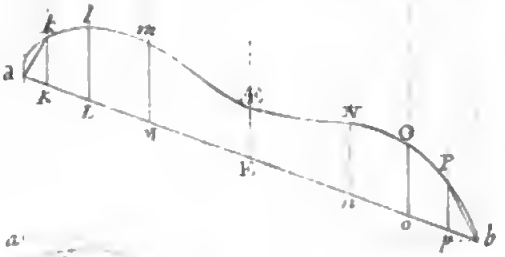


149.

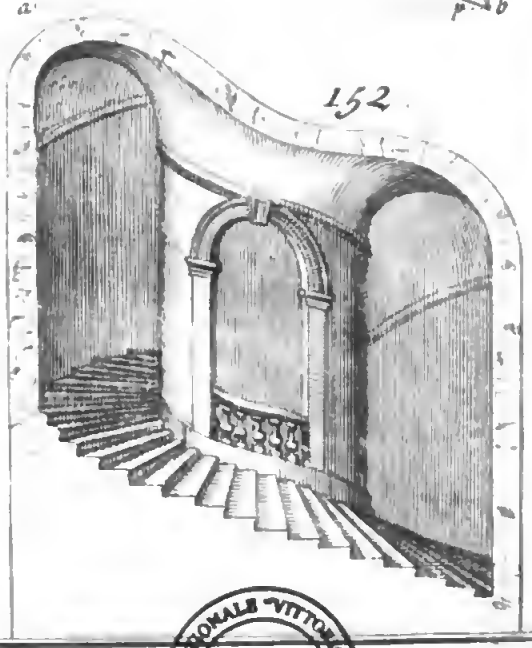


150





152.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

CHAPITRE IV.

De l'imitation des courbes régulieres par des compoſitions d'arcs de cercles.

LOrſqu'on aime la régularité, on ne ſe ſert point de ces courbes qui n'ont que de la reſſemblance avec les régulieres, dont elles ne ſont que des copies imparfaites, formées par la compoſition de pluſieurs arcs de cercles de différents rayons; l'original eſt ſans contredit préférable à la copie. Cependant l'ignorance des propriétés des courbes, même les plus communes, comme ſont les ſections coniques & les ſpirales, jointe à une plus grande facilité apparente de tracer des arcs de cercle, & peut être encore celle d'en tirer les joints de tête pour les traits des voutes, ont fait chercher pluſieurs moyens de les imiter par un aſſemblage de portions de cercle; & comme l'ellipſe eſt une des plus uſuelles, les Deſſinateurs & les Architectes ſe ſont efforcés pendant long-tems, mais inutilement, de l'imiter parfaitement ſans jarrets par 3 ou 5 portions de cercle, les axes étant donnés. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à jetter les yeux ſur les Planches du Livre du P. DERAND, particulierement ſur celle du Chapitre XIX, où la poſition des centres de ſes arcs rampans produit des jarrets trop conſidérables à leur contour pour qu'on puiſſe les imputer au Graveur.

On reconnoît les mêmes défauts dans une partie des deux Planches du Livre de BOSSE, ſur la *maniere de deſſiner l'Architecture*, quoiqu'il eut recueilli ce qui s'étoit fait de mieux juſqu'à ſon tems. La découverte d'une méthode plus exacte étoit réſervée à des Géometres, tels que M. PITOT & CAMUS, tous deux de l'Académie des Sciences. Nous inférons ci-après le ſeul Problême du premier qu'il fit exécuter à l'arche du pont de l'Iſle Adam ſur l'Oiſe, en 1720, dont le ceintre eſt une anſe de panier ſurbaiſſée, compoſée de trois arcs de 60 degrés chacun. Comme M. CAMUS depuis peu a beaucoup étendu cette théorie de l'imitation des ellipſes par trois & cinq arcs de cercle raſſemblés ſuivant les différentes circonſtances données, nous

renverrons le Lecteur aux Elémens de Géométrie qu'il a fait, en 1750, pour les Ingénieurs Militaires dont il eſt l'Examinateur, que le Roi a fait imprimer, & dont il gratifie chacun des 300 Officiers de ce Corps, ainſi que du Cours de Mathématique, que cet Académicien continue pour leur uſage.

Le *trait* de faire des demi-ovales ou anſes de panier de cinq arcs de cercle paſſoit, lorſque l'on fit le pont de-Compiegne, pour une rareté qu'un Architecte me vantoit ; à quoi je répondis qu'il auroit été meilleur & plus beau, ſi au lieu de cinq centres il n'avoit eu que deux foyers. En effet quelque méthodique que ſoit cette compoſition, il eſt peu de circonſtances où ſon contour ſatisfaſſe le coup d'œil auſſi pleinement que l'uniforme ſimplicité de celui de l'ellipſe naturelle des ſections coniques ; cependant puiſqu'il faut ſe prêter à une plus grande facilité d'exécution pour les appareilleurs ordinaires qui ne connoiſſent que le cercle, je vais dévoiler en deux mots le ſecret d'en faire un bon uſage pour les ceintres.

Regle générale.

Tout l'art d'imiter les courbes par différents arcs de cercles, conſiſte à poſer les deux centres des arcs qui ſe joignent ſur une même ligne droite, qui paſſe au point de leur jonction, afin que la perpendiculaire qu'on lui tireroit à ce point fût tangente commune de l'un & de l'autre arc au même point ; la raiſon eſt, 1°. que l'angle de l'arc avec la tangente étant infiniment petit de part & d'autre du point d'attouchement, le rayon eſt preſque auſſi exactement perpendiculaire ſur cet arc, qu'il l'eſt ſur la tangente, à une différence près, qui eſt infiniment petite. 2°. Que l'angle compoſé de ces deux preſque droits, ſera infiniment grand, par conſéquent ſes côtés ſeront dirigés en une ligne ſi peu différente de la ligne droite, que l'œil ne peut en appercevoir le pli ; tels ſeroient tous ceux d'un polygone, d'une infinité de côtés infiniment petits inſcrits dans le cercle.

Cependant l'œil Géometrique, qui eſt un Juge ſévere, apperçoit fort bien le changement ſubit de la convéxité & de la concavité, particulierement ſi les rayons des deux arcs qui ſe joignent, ſont conſidérablement différents en longueur, comme il eſt ſouvent néceſſaire qu'ils le ſoient pour former une de-

mi-ellipſe de trois arcs; alors les gens les moins connoiſſeurs ſentent bien cette irrégularité, ſans en ſçavoir la raiſon; c'eſt pourquoi je ne conſeille à perſonne d'avoir recours à cet artifice de l'ignorance. Quoique je donne ici les meilleures regles pour en cacher les défauts, je ne le fais que pour contenter ceux qui aiment à s'épargner de la peine, au préjudice d'une plus grande perfection d'ouvrage, ou lorſque la choſe n'eſt pas aſſez de conſéquence pour mériter plus de ſoin, ou pour en faciliter l'exécution aux ouvriers qui ne ſont pas capables d'une opération plus parfaite.

PROBLEME XXI.

Deux arcs étant donnés, imiter une ellipſe par un aſſemblage de quatre arcs de cercles.

Ou ce qui eſt le même, imiter une demi-ellipſe par trois arcs de 60 degrés chacun.

Soit le grand axe AB (*Fig.* 153) & la moitié du petit axe CD: on portera premierement la longueur CD de cette moitié ſur le grand axe en B*y*, pour avoir la différence des deux demi-axes C*y*, qu'on diviſera en deux également en F, puis on portera CF en C*z*, ſur *zy*, comme diametre; on fera le demi cercle *z* E*y*, qui coupera CD en E, on portera la longueur *z* E en *z* S, & la diſtance CS d'un côté à l'autre, CS en C*s*: les points *s* & S ſeront les centres des petits arcs des extrêmités de l'ovale, & les lignes AS & *s* B leurs rayons; enfin des points *s* & S, comme centres, & de l'intervalle *s* S, on fera le triangle équilatéral ST*s*, dont le ſommet T ſera le troiſieme centre que l'on cherche; & les côtés de ce triangle prolongés, détermineront la jonction des grands & petits arcs en *i* & I, ſur leſquels on prendra T*s* + *s* B pour rayon du grand arc; ainſi les trois arcs ſeront de ſoixante degrés chacun, & auront des rayons communs; *ce qu'il falloit faire.* Pl. 14. Fig. 153.

DEMONSTRATION.

Soit AC = *a*, CD = *b* & l'inconnue C*s* = *x*, d'où il ſuit que S*s* = ST = 2*x*, & CT = $\sqrt{3xx}$; ainſi DT = $b + \sqrt{3xx}$; mais DT = SI ou SA + ST; $a = x + 2x$ donne cette

équation $\sqrt{3xx + a - b} + x$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}\overline{a-b} + \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}}$, par la conſtruction : $CY = a - b$ & $CZ = \frac{1}{2}\overline{a-b}$, ainſi $CE = = \sqrt{\overline{a-b} \times \frac{1}{2}\overline{a-b}}$, & $ZE = \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; mais $CS(x) = CZ\,\frac{1}{2}\overline{a-b} + ZS$ ou ZE $\sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; donc $x = \frac{1}{2}\overline{a-b} + \sqrt{\frac{1}{2}\overline{a-b}^2 + \frac{1}{4}\overline{a-b}^2}$; *ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME XXII.

Imiter par deux arcs de cercle les portions d'ellipſes faites ſur deux diametres, qui ne ſont pas des axes conjugués, dont l'un eſt terminé par deux tangentes à ſes extrêmités, & dont le conjugué eſt déterminé par une troiſieme tangente donnée de poſition.

On ne peut imiter avec une compoſition de deux arcs de cercle raſſemblés, toutes ſortes d'ellipſes faites ſur des diametres conjugués, qui ne ſont pas des axes, & qui doivent toucher une ligne donnée de ſituation & de diſtance ; mais on peut faire enſorte que l'ovale touchera la parallele de la troiſieme tangente donnée.

Pour connoître ſi le Problême peut être réſolu par des arcs de cercle.

Fig. 154. Soient (*Fig.* 154) PD & RG deux tangentes aux points B & A, & D*g* une troiſieme ligne qui doit toucher l'ovale propoſée à faire ; on portera la longueur DB ſur la ligne D*g* en D*b*, & la longueur *g*A en *g a* : ſi ces deux points *a* & *b* ne tombent pas au même point, le Problême ne peut pas être réſolu ; parce qu'il eſt démontré dans la Géométrie élémentaire *, que ſi d'un point *d* ou G pris hors du cercle, on lui mene deux tangentes *d*B, *d*T, ou GA, GT, elles ſont égales entr'elles ; ſuppoſant donc la ligne D*g* donnée ; il faut pour réſoudre ce Problême, faire D*b* = DB, & *g a* = *g* A, tirer A*a* & B*b*, le point T de leur interſection ſera celui d'attouchement de la tangente *d*G, auquel on tirera la perpendiculaire indéfinie TC, & par les deux autres points d'attouchement A & B donnés, faiſant B*c* perpendiculaire ſur *d*P, & AC perpendiculaire ſur RG, les points C & *c*, où ces lignes couperont TC, ſeront les centres des arcs de cercle qui doivent repréſenter l'ellipſe propoſée à faire, dans le cas où elle peut en approcher le plus. Si la ligne D*g*

Eucl. l. 3. pr. 37.

donné

donnée de poſition eſt au-deſſous du point T, comme EF, il faut faire Eh = EB, & Fi = FA, tirer Bh & Ai, leſquelles étant prolongées, ſe couperont au point T, qui eſt celui de l'attouchement que l'on cherche, par lequel ayant tiré une parallele dG à la donnée Dg ou EF, on reconnoîtra que la ſomme des lignes Bd & AG ſera égale à celles des parties dT & GT. *Fig.* 154.

DEMONSTRATION.

A cauſe des paralleles Dg & dG, ou EF, DB : Db :: dB : dT, & gA : $g a$: : GA : GT, mais gA = $g a$ (par la conſtruction) & DB = Db, donc dT = dB, & GA = GT; donc le point T eſt celui de l'attouchement de la ligne DG; *ce qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE I.

D'où ſe tire la maniere de *faire toutes ſortes d'arcs rampans; avec des portions de cercle dans quelque poſition que ſoient les piédroits entr'eux, paralleles, en ſurplomb, ou en talud, & en quelque ſituation que ſoit la ligne de ſommité d G*: en voici des exemples pour les piédroits paralleles entr'eux, qui ſont les plus ordinaires.

Premier cas où la ligne de ſommité dG eſt horiſontale, & les piédroits à plomb. Soit (*Fig.* 155) la ligne de rampe donnée AB, ſa hauteur ſur l'horiſon BO étant porté ſur Ob d'alignement à la ligne horiſontale AO, on diviſera Ab en deux également en m, d'où l'on élevera la perpendiculaire mT: puis du centre m & pour rayon Am, on décrira l'arc de cercle AT juſqu'à la rencontre de mT; enſuite ayant pris ſur mT; la longueur $m c$ = OB, le point c ſera le centre du ſecond arc BT qui rencontrera le premier au point d'attouchement T, ce qu'il falloit faire pour en rendre la jonction imperceptible. *Fig.* 155.

Second cas où la ligne de rampe AB eſt parallele à celle de ſommité dG.

Ayant diviſé l'horiſontale AO en deux (*Fig.* 156) également en m, & élevé en ce point la verticale mT, qui coupera la ligne de ſommité dG au point T, il faut faire Ad = dT, comme nous l'avons dit au commencement de cette propoſition; puis au point T faire TC perpendiculaire à dG, ou ce qui eſt la même choſe à la parallele AB; le point C où cette perpen- *Fig.* 156.

diculaire coupera l'horiſontale AO, ſera le centre du grand arc de cercle AT : puis menant B *e* parallele à AO, elle coupera TC au point *c*, où ſera le centre du ſecond arc TB, qui ſe joindra au grand au point d'attouchement en T, comme il eſt néceſſaire.

Fig. 157. *Troiſieme cas* où la ligne de ſommité D *g* (*Fig.* 157) n'eſt pas parallele à la ligne de rampe AB.

Ayant trouvé le point T, comme on l'a dit au commencement de ce Problême, on tirera TC perpendiculaire à D *g*, & B *c* parallele à A *o*, on aura comme au cas précédent, les points C & *c* pour les centres des deux arcs qui doivent former le rampant ATB.

DEMONSTRATION.

On voit que dans le fond tous ces cas ne different en rien pour la conſtruction : car, 1°. (*Fig.* 155) puiſque AO & *d*G ſont paralleles entr'elles, de même que CT & A *d* ; il eſt évident que A *d* = *d*T, & puiſque C *b* = CA = CT, & O *b* = OB, BG ſera égal à CO = TG, donc les deux tangentes de chacun de ces arcs AT, TB ſont égales, par conſéquent elles conviennent au cercle, & les centres C & *c* étant ſur une même ligne, la même tangente *d*G eſt commune aux deux arcs de différens cercles.

Les deux cas ſuivans ſont démontrés par le principe général qui établit la poſition des centres, & les mêmes conditions des tangentes, dont nous venons de parler.

COROLLAIRE.

Delà on tire la maniere de tracer *l'ovale pointue*, s'il eſt permis d'uſer ici de ce mot, pour exprimer l'inégalité de ſon contour aux extrêmités de ſon grand axe, laquelle à cauſe de ſa conformité avec le contour d'un œuf appellé en latin *ovum*, eſt nommée en Architecture un *ove*. Comme c'eſt un ornement dont on fait grand uſage dans les corniches, & qu'on en trouve de faux traits dans les Livres, je vais tâcher de les corriger. ALBERT DURER dans ſa Géométrie en donne deux faux, l'un qu'il tire du cone, dont le contour fait un jarret à chaque extrêmité du grand axe, comme il ſeroit facile de le démontrer,

ſi la choſe en valoit la peine ; l'autre trait, qui a été ſuivi par quelques Auteurs, eſt une compoſition d'arcs de cercle, où il a fait encore une erreur groſſiere, joignant les ſecond & troiſieme arcs au-deſſus du point I en S au-dehors des rayons communs DI : 3 I.

Soit donné le petit diametre AB pour la plus grande largeur de l'ove ; on le diviſera en quatre parties, & on ptolongera ce diametre de part & d'autre, de trois de ces parties, faiſant DA & B 2 égales à *m* B : puis du point C, milieu de AB, pour centre, on décrira un cercle AHBE, dont on diviſera les quarts de circonférence AE, BE en deux également aux points 3 & 4, par leſquels on menera les lignes DI, 2 *i*, qu'on fera égales à DB ou 2 A, en décrivant deux arcs BI, A *i* des points D & 2 pour centres, leſquels arcs étant continués, ſe couperont au point *x*, par où & par le centre C, on titera la ligne H *x* : enſuite des points 3 & 4 pour centres, & de l'intervalle 3 I pour rayon, on décrira deux arcs qui ſe couperont en *y* ſur la ligne H *x* : on diviſera l'intervalle E *y* en deux également en *c*, par où on tirera les lignes 3 G, 4 *g*, qui rencontreront ces arcs en G & *g* ; enfin du point C pour centre, & de l'intervalle *c* G ou *c g* pour rayon, on décrita l'arc G *g*, qui achevera l'ovale en ove. Fig. 158.

Il eſt aiſé de voir qu'on peut allonger ou racourcir cet ove, en remontant ou rabaiſſant les centres 3 & 4, & le dernier *c*.

Les Architectes placent ordinaitement cet ove dans une niche, dont *Boſſe* regle ainſi le contour. Il fait HL perpendiculaire & égale au diamette HE ; il la diviſe en deux également en O, & la moitié OL en quatre parties égales ; il diviſe enſuite le grand axe HF en trois également, & ce tiers en cinq : il porte une de ces cinquiemes de F en *p*, & de l'intervalle S *p* tiets de FH, il décrit un arc F z ; il ne dit pas de combien de degrés, ce qui ſeroit cependant néceſſaire pour avoir les intervalles des rayons *q* K, z N, qui ſont les cordes & les rayons de ces arcs.

Toute cette conſtruction n'eſt qu'une fantaiſie & un goût de deſſein arbitraire imité apparemment des reſtes des corniches antiques, où l'on voit ces niches fotmées de différentes façons, en côtes relevées & diviſées entr'elles par des ornemens de feuilles, & quelquefois de dards ; ce qui n'eſt pas de notte ſujet.

Nous ayons donné ci-devant la maniere de décrire des de-

mi-ovales, par le moyen de trois arcs de cercle de 60 degrés chacun, ſuppoſant les axes donnés; il nous reſte à montrer comment on peut les faire de tant d'arcs de cercles que l'on voudra, ſoit régulierement en ovale, ou irrégulierement en portion d'ove; ce qui eſt néceſſaire pour tracer différentes ſortes de *cavets*, ou moulures creuſes, & les contours de certains amortiſſemens qu'on appelle *piédouches*.

Fig. 159. Soient, par exemple, (*Fig.* 159) donnés pluſieurs points A, 1, 2, 3, B, rangés d'une façon convenable au contour creux qu'on ſe propoſe, on prendra l'intervalle A 1 pour côté d'un triangle équilatéral A 1 D, & du point D pour centre, on décrira l'arc A 1: enſuite ayant tiré la corde 1, 2, & l'ayant diviſée en deux également en *m*, on y élevera une perpendiculaire *m e*, qui coupera 1 D prolongée en *e*, où ſera le centre du ſecond arc de cercle 1, 2; on tirera de même la corde 2, 3, & ſur ſon milieu M on élevera la perpendiculaire MC, qui coupera 2 *e* prolongée au point C, où ſera le centre du troiſieme arc 2, 3: ainſi de ſuite, on aura le dernier centre *f*.

La raiſon de cette pratique eſt claire par la ſeule conſtruction, où l'on reconnoît l'application de la regle générale, en ce qu'il y a deux centres ſur la ligne droite, où ſe fait la jonction des arcs qui doivent ſe toucher, c'eſt-à-dire avoir une tangente commune, comme TN, qui touche également les arcs 2, 1 & 2, 3, *ce qu'il falloit faire pour éviter tout jarret*.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cet exemple, que quoique nous ayons compoſé des arcs rampans de deux ſeuls arcs de cercle d'un nombre de degrés égaux ou inégaux, on peut encore mieux les former de tel nombre d'arcs que l'on voudra; car ſi l'on conçoit la Figure 159 changée de ſituation, & qu'on prenne les points A & *p* pour des impoſtes, il eſt viſible que la courbe A 1 2 3 *p* peut ſervir pour un ceintre d'arc rampant; mais alors elle ſera moins une imitation de l'ellipſe, que de la ſpirale à laquelle le Problême ſuivant ſervira d'introduction.

PROBLEME XXIII.

La différence de hauteur des impoſtes A & H, & l'intervalle horiſontal DA des piédroits d'un arc rampant étant donnés, tracer un ceintre compoſé d'autant d'arcs de cercle que l'on voudra, inégaux en rayons, mais égaux en nombre de degrés, ou ſi l'on veut d'une partie *de plus avec certaines circonſtances.*

Soit (à la Figure au-deſſus du chiffre 160) le ceintre ABH qu'on ſe propoſe de faire, par exemple, de cinq arcs de cercles ; ſur la hauteur donnée DH, comme diametre, on décrira un demi-cercle HID, qu'on diviſera en cinq parties égales, c'eſt-à-dire, en cinq arcs, dont on tirera les cordes, auſquelles on menera des paralleles tangentes au cercle, pour lui circonſcrire la moitié d'un décagone : enſuite ayant prolongé la ligne AD vers *n*, on portera ſucceſſivement les cinq côtés de D en *n*. *Fig.* 160.

On diviſera *n* A en deux également en X, par où on menera X*x* parallele & égale à DH, ſur laquelle, comme diametre, ayant décrit un demi-cercle, on lui circonſcrira le même polygone, mais tourné différemment, en commençant par porter une moitié de côté en X 1, & *x* 5, ſur les paralleles DA & H 5, on fera C 3 égale à *o* 2, diſtance du centre *o*, à un angle du polygone, & des points 3 & 1, 3 & 5 pour centres & pour rayon le côté du polygone, on fera des interſections d'arcs qui donneront les points 2 & 4, pour tirer par les points 2, 3, 4, 5 les côtés qu'on prolongera indéfiniment vers B, E, F, G; enfin des points 1, 2, 3, 4, 5 pour centres & pour rayons 1 A, 2 B, 3 E, 4 F, 5 G, on décrira des arcs AB, BE, EF, FG, GH qui formeront enſemble ſans aucun jarret le ceintre qu'on demande : ſi le nombre des côtés du polygone n'eſt pas complet, qu'il y ait une moitié de plus, il y aura auſſi un arc de cercle moindre que les autres ; ce qui arrivera toujours lorſque les côtés feront enſemble la moitié d'un nombre impair, comme du triangle équilatéral, du pentagone, de l'eptagone, &c.

Il n'eſt pas néceſſaire de rendre raiſon de cette conſtruction pour le concours des arcs de cercle qui ſe rencontrent au point commun d'attouchement ; il ſuffit de dire pourquoi on a porté les côtés du polygone circonſcrit ſur la ligne AD prolongée ;

c'eſt pour avoir l'axe X*x*, & le centre C du polygone générateur qui doit être au milieu d'une ligne compoſée de la donnée DA & de l'ajoutée D*n*; parce que chaque rayon des arcs de ſuite diminue de la longueur d'un côté du polygone 1 2, 2 3, 3 4, &c. par conſéquent tous enſemble diminuent de la quantité D*n*, au-dedans d'un demi-cercle qui auroit XA ou X*n* pour rayon, & feroit partie du cercle de révolution de la ſpirale dont cet arc rampant eſt une moitié. On voit par-là la raiſon de la conſtruction de la Figure 155, où nous avons porté la hauteur OB en O*b* ſur AO prolongée, parce que nous étant propoſé de faire un ceintre de deux arcs de 90 degrés chacun, qui ſont la moitié du cercle, le polygone générateur en doit être le quarré, dont la hauteur OB eſt un côté qui doit être diminué ſur la longueur du rayon du ſecond arc : ce que l'on verra plus clairement au Problême ſuivant, qui n'eſt qu'une eſpece de Corollaire de celui-ci.

J'ai dit qu'il falloit que l'arc rampant fit une demi-révolution, parce que j'ai ſuppoſé les piédroits à plomb paralleles entr'eux ; mais s'ils étoient en talud, il faudroit qu'il en fit plus, & en ſurplomb moins, par la raiſon que nous avons ſouvent répetée, que les piédroits doivent être tangens aux arcs à leurs naiſſances.

PROBLEME XXIV.

Imiter la ſpirale par des portions d'arcs de cercle.

Suivant le principe général que tous les arcs inégaux doivent ſe joindre à un point commun d'attouchement, pour qu'on n'en apperçoive pas la jonction, il ne s'agit pour imiter la ſpirale que d'avoir toujours deux centres de ſuite ſur un même rayon, il faudroit encore que ces rayons diminuaſſent toujours dans une certaine proportion qui pourroit beaucoup varier, & que les angles qu'ils font entr'eux fuſſent égaux ou variables, auſſi dans une certaine proportion, comme nous l'avons dit des ſpirales ; ce que l'on peut bien concevoir après ce que nous avons dit de cette courbe, & l'exécuter ſuivant l'intention qu'on a de faire plus ou moins de révolutions, en imitant la ſpirale réguliere ; mais comme il ne s'agit pas dans cette imitation d'une ſi grande préciſion, qui ne peut convenir à une compoſition d'arcs de cercle, il nous ſuffit de donner la maniere générale de faire ce qu'on appelle en Architecture *volute*.

Ayant pris un point C pour centre de la ſpirale ou volute, (*Fig.* 160) on prendra ce point pour le milieu du côté d'un polygone quelconque : nous donnons ici pour exemple l'hexagone, (*fig.* 160 *&* 161) & on le fera de telle grandeur que l'on voudra, à l'égard du plus grand rayon que l'on veut donner à la volute, & de l'intervalle que l'on veut occuper par les rayons oppoſés, dont on peut compter la diminution par le nombre des changemens des centres de chaque arc, & la longueur des côtés du polygone ajoutés enſemble. Les Architectes, qui, pour terminer les révolutions vers le centre, y font un cercle qu'ils appellent *l'œil* de la volute, ſe reglent par la grandeur de cet œil, auquel ils aſſignent un certain nombre de parties du module, c'eſt-à-dire, d'une diviſion faite ſur le diametre de la colonne, ſuivant leurs ſyſtèmes arbitraires. *Fig.* 160.

Pour nous qui ne propoſons qu'une maniere générale, dont on peut facilement déduire les particulieres, nous dirons ſeulement qu'ayant fait un polygone quelconque (*Fig.* 161) & ayant pris le milieu d'un de ſes côtés pour centre de la ſpirale, on tirera de ce point C à tous les angles du polygone des diagonales C 4, C 5, C 3, C 2, & enſuite s'étant fixé un nombre de révolutions, on y inſcrira autant de Polygones ſemblables au premier, qui auront toujours un de leurs côtés commun avec le premier 6 C 1, & les côtés de ces polygones ſeront encore en telle raiſon que l'on voudra, ſelon qu'on ſe propoſe de faire reſſerrer la volute plus ou moins vite. *Fig.* 161. *&* 162.

Cette diſpoſition étant faite, on prolongera tous les côtés de ces polygones d'une part ſeulement, & à volonté, autant à peu près qu'il convient à la longueur des rayons, ſuivant le premier AC qui a été donné, comme on voit dans la Figure 160, 1 2 *a*, 2 3 *b*, 3 4 *c*, 4 5 *d*, 5 G *e*, G 1 *f*, & 12 *a*, qui acheve la révolution. Enſuite du centre 2, & pour rayon 2 *a*, on fera l'arc *a b* terminé en *b* par le rayon 2 *h b* 1 ; du centre 3, & de l'intervalle 3 *b* pour rayon, on décrira l'arc *b c* ; du centre 4, & pour rayon 4 *c*, on décrira l'arc *c d*, & ainſi de ſuite, en changeant de centre à chaque arc, poſant la pointe du compas ſur un des angles du polygone, & arrêtant l'autre au rayon fait du côté de ce polygone prolongé. *Fig.* 160.

Après la premiere révolution, on continuera de même pour la ſeconde ſur le polygone inſcrit immédiatement dans le premier ; & au bout de cette ſeconde révolution, on continuera

Fig. 161. ſur les angles du troiſieme polygone, ſuivant l'ordre des chiffres de la Figure 161.

Il faut remarquer que la ſeconde révolution, commençant par deux centres 6, 7, qui ſont ſur un rayon commun, ne doit point faire de jarret avec la premiere; mais elle fait une ſorte d'irrégularité, en ce que la diſtance du centre 6 au centre 7, n'eſt pas égale à celle du centre 5 au centre 6, comme elle l'a été depuis le point 1 juſqu'au point 5, & comme elle le doit être enſuite aux intervalles 8, 9, 10, 11 & 12; la même choſe arrive à la troiſieme révolution. Cependant les Architectes qui donnent la Géométrie à bon marché, diſent comme D'AVILER, que la *volute de Goldman*, qui eſt faite ſur ce principe, eſt *Géométrique*, quoiqu'elle ne ſoit qu'un cas de notre méthode, dont la ſeule différence eſt, que ſon polygone central eſt un quarré, comme on voit en la Figure 162; mais en fait de volute Ionique, on n'a pas beſoin d'y regarder de ſi près; car les Architectes n'en veulent qu'à une décoration de goût, & non pas à une grande préciſion.

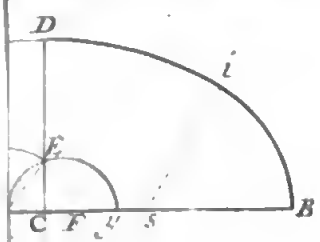
COROLLAIRE I.

Il ſuit que ſi l'on veut *aggrandir la volute* en-dehors, on peut en aggrandiſſant les rayons, continuer les arcs de ſuite, en changeant de centre ſur les mêmes angles des polygones, ou ſur d'autres circonſcrits ſur le même côté 6 C 1.

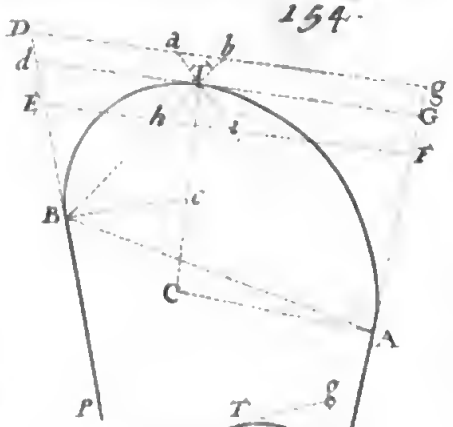
COROLLAIRE II.

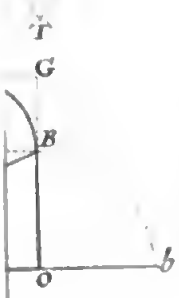
Secondement, que ſi l'on veut *faire un double trait* qui vienne auſſi en ſe reſſerrant avec le premier, ayant déterminé la largeur *a i* ſur le rayon *c a*, on cherchera le côté d'un polygone ſemblable au premier, qui ſoit en même raiſon que *c i*, *c a*, par cette analogie *c a* : *c i* : : *c* 1 : *c x* appellant *x* le point qui ſera à l'angle du ſecond polygone ſur le rayon ſous 2 *b*; la petiteſſe de la Figure ne nous a pas permis d'exprimer ces différences, de peur d'y jetter de la confuſion : nous ne diſons point comment cela ſe fait par les lignes, car nous ſuppoſons que nous parlons à des Lecteurs qui ſçavent trouver une quatrieme proportionelle à trois lignes données, comme il eſt enſeigné chez EUCLIDE, *liv. 6, prop.* 12.

REMAR-

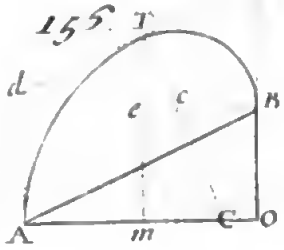


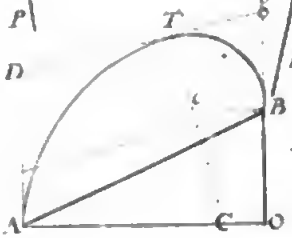
154.





155.

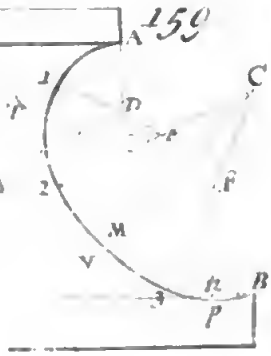




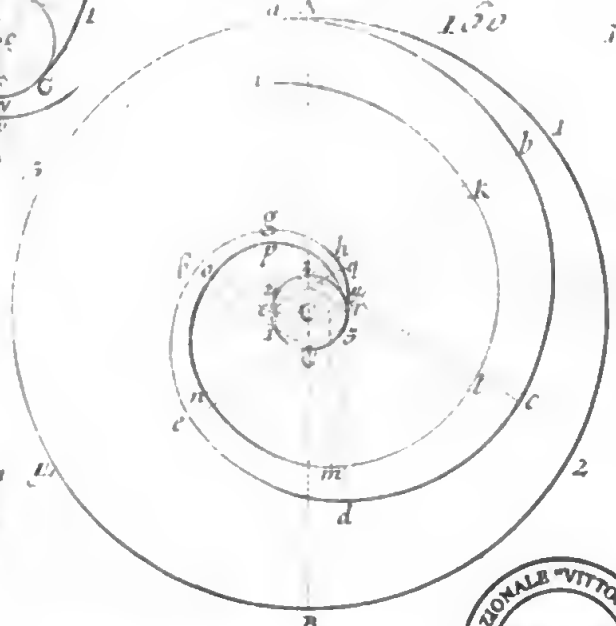
157.

158.

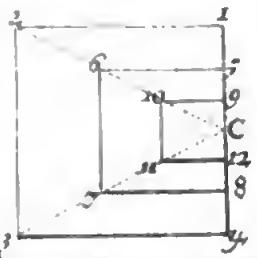
159.



160.



162.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

REMARQUE.

On voit par la Figure 162, que la volute de GOLDMAN que D'AVILER donne comme la plus convenable au chapiteau Ionique, n'eſt qu'un cas de notre maniere générale d'imiter la ſpirale par des arcs de cercle, en prenant pour le polygone central le quarré au lieu des autres polygones qui ont plus de côtés, d'où réſulteroient cependant des volutes plus parfaites.

CHAPITRE V.

De la diviſion des ſections coniques par des lignes droites perpendiculaires à leurs arcs.

ON ſçait que la perpendiculaire à un arc n'eſt autre choſe que celle qui fait des angles droits avec la tangente de cet arc au point d'attouchement; ainſi il faut conſidérer chaque point de diviſion comme celui d'un attouchement, y ſuppoſant une tangente réelle ou poſſible, à laquelle il faut tirer une perpendiculaire par le point d'attouchement donné, ou par un autre point pris hors de la courbe; ce qui s'exécute différemment pour chacune des ſections coniques.

I°.

Pour le cercle.

PROBLEME XXV.

Par un point donné, tirer une perpendiculaire à un arc de cercle, dont on ne connoît pas le centre.

Il peut y avoir trois cas dans ce Problême: 1°. ou le point donné eſt dans l'arc; 2°. ou hors de l'arc 3°. ou à l'extrêmité de l'arc. Pl. 15. Fig. 163.

Si le point donné eſt à la circonférence en D, (*Fig.* 163) on prendra de part & d'autre deux longueurs égales D*e*, D*f*; & des points *e* & *f* comme centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté pour rayon, on fera une interſection d'arcs en

Fig. 163. *g*, par où & par le point D, on tirera la ligne *g* D, qui eſt celle qu'on cherche.

Secondement, ſi le point donné eſt hors de l'arc DGB, comme en *d*: du point *d* pour centre & pour rayon d'un intervalle pris à volonté, on tracera l'arc *h i* qui coupera le donné AGB aux points *h* & *i*, deſquels comme centres, & de la même ouverture de compas, ou de telle autre qu'on voudra pour rayon, pourvû qu'elle ſoit plus grande que la moitié de la diſtance des centres *h* & *i*, on fera une interſection d'arcs en *b*; ſi par les points *b* & *d* on tire une ligne *b d*, la partie *d* G ſera celle que l'on cherche.

3°. Si le point donné eſt ſur l'extrêmité de l'arc donné AGB en B, & qu'on ne puiſſe pas le prolonger au-delà de ce point; 1°. par la maniere ordinaire, ayant porté à volonté deux longueurs égales BK, K *l* pour faire avec d'autres ouvertures pour rayons, à volonté l'interſection en P du même rayon BP, & du point K pour centre, on fera un arc en R, & de KP pour rayon, & du centre B on fera une interſection en R, la ligne RB ſera la demandée. Autrement on portera trois longueurs égales priſes à volonté ſur cet arc comme en K, *l*, *m*, & par le premier cas ayant fait KP & *l* N perpendiculaires ſur l'arc AGB, & égales entr'elles; on tirera les lignes *l* P, KN qui ſe couperont au point O; enſuite ayant tiré BP, & fait B *q* = KO par le point *q*, on menera KR = KN, ou BP; enfin par les points R & B on tirera RB qui ſera la ligne que l'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Par les élémens de Géométrie, il eſt évident que ſi l'on tire les cordes *e f* & *h i*, la perpendiculaire ſur le milieu eſt auſſi perpendiculaire aux arcs dont elles ſont ſous-tendantes; or les deux opérations ont été faites comme ſi les cordes avoient été tirées de *e* en *f*, & de *h* en *i*, & qu'on voulut leur tirer des perpendiculaires, & les diviſer en deux; donc les lignes D *g* & *d* G ſont perpendiculaires à l'arc AGB; de ſorte que ſi l'on prolongeoit ces lignes, elles ſe rencontreroient au centre du cercle en *c*.

La raiſon de la conſtruction du troiſieme cas n'eſt pas moins claire, car les triangles *l* KP, KBR ont été faits égaux; mais le côté KP eſt perpendiculaire à l'arc *l* KB (par la conſtruc-

tion ;) donc BR le ſera auſſi au même arc, *ce qu'il falloit faire.* Pl. 15. Fig. 163.

USAGE.

Ce Problême ſert à tracer les joints de tête de tous les cintres circulaires des voutes, afin que les arrêtes des angles des vouſſoirs qui les compoſent, ſoient d'égale réſiſtance ; c'eſt ce que les ouvriers appellent le *trait quarré ſur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe*, lorſqu'il s'agit de faire le joint à une extrêmité, comme en BR.

Les ouvriers ont coutume de faire la même opération ſur les arcs qui ne ſont point circulaires, comme les ſurbaiſſés ou ſurhauſſés, qui ſont des portions d'ellipſes ou d'autres courbes ; cependant elle ne convient qu'au cercle, & eſt défectueuſe dans les autres courbes; l'erreur à la vérité n'en eſt pas bien ſenſible, lorſque l'on ne ſe ſert que d'une petite longueur des rayons d'interſection, & qu'on prend une fort petite corde ou portion d'arc dans les grandes voutes ; mais dans les petites, & lorſqu'on prend un grand arc de l'ellipſe ailleurs qu'aux environs de ſes axes, elle peut être fort ſenſible : en un mot elle eſt contraire à la régularité, à la ſimétrie, & peut nuire à la ſolidité, comme nous l'avons expoſé.

LEMME.

La perpendiculaire ſur le milieu de la corde d'un arc de ſection conique autre que le cercle, & qui n'eſt pas un des axes, eſt oblique à cet arc.

Soit (*Fig.* 164) l'arc ADPB portion d'une ellipſe, d'une parabole, ou d'une hyperbole, & le point D ou P, qui ne ſoit pas à l'extrêmité d'un des axes de la courbe : ſi ayant fait $bP = Pe$, des points b & e, comme centres, on fait des interſections d'arcs en g & h avec des rayons égaux, de longueur priſe à volonté, je dis que la ligne menée par ces deux points g & h, qui eſt perpendiculaire à la corde be, ne la ſera point à ſon arc bPe. Fig. 164.

DE'MONSTRATION.

Une ligne n'eſt perpendiculaire à un arc, que lorſqu'elle

Pl. 15. Fig. 164. l'eſt à ſa tangente au point P où elle le rencontre; mais ſi P r perpendiculaire à P *h* eſt une tangente, la corde *b e* qui lui eſt parallele, & coupée en deux également en *m* par la ligne P *h* ſera une ordonnée, & cette ligne P *h* ſera un diametre; or il n'y a de diametres perpendiculaires aux ordonnées que les axes, donc le point P eſt ſur un axe; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Secondement, il eſt démontré qu'on ne peut mener qu'une tangente par un point P; cependant il eſt clair que par cette conſtruction on pourroit en mener pluſieurs; car ſi au lieu des points *b* & *e*, équidiſtans de P, & centres des interſections *g* & *h*, on en prend deux autres auſſi équidiſtans de P *e*, comme B & *r*, la corde *r* B ne ſera plus parallele à *b e*, & par conſéquent la perpendiculaire *x* P *y* ne ſe confondra point avec la premiere *g h*, mais elle la croiſera; & cependant encore au même point P, *r* P égalera BP, comme *b* P étoit égal à P *e*, par la conſtruction; la raiſon en eſt fort ſenſible; car les arcs de l'ellipſe n'étant pas d'une courbure égale comme ceux du cercle, les cordes égales ne ſous-tendent pas des arcs égaux, celle qui eſt plus près du grand axe, répond à un plus grand arc que celle qui eſt près du petit axe, où la courbe ſe redreſſe & approche plus de ſa corde; donc par la méthode des ouvriers, on trouve pluſieurs joints de tête différemment inclinés à l'arc, & cependant il n'y en a qu'un ſeul de bon, qui eſt la perpendiculaire à la tangente au point de diviſion du joint, donc leur méthode eſt mauvaiſe; *ce qu'il falloit démontrer.*

On auroit fait peu d'attention à la pratique des ouvriers, ſi elle n'avoit été enſeignée par les Auteurs qui ont écrit de la coupe des pierres, leſquels ont dû en ſentir l'irrégularité, en ce qu'elle ne fait pas des angles égaux de part & d'autre du joint des vouſſoirs; de ſorte que l'arrête de l'un eſt aigue, & l'autre obtuſe, ce que nous avons cru devoir faire remarquer avant que d'établir la vraie maniere de tirer les joints ſur les arcs de toute autre ſection conique que le cercle.

PROBLEME XXVI.

Par un point donné à la circonférence d'une ſection conique, tirer une perpendiculaire à ſon arc.

Il faut premierement connoître les foyers de la ſection, ſoit

ellipſe, parabole, ou hyperbole ; & s'ils ne ſont pas donnés, il faut les chercher par les Problêmes II. X, & XI.

Par les foyers F & *f* des trois Figures 164, 165, 167, on tirera au point donné D les lignes droites FD & *f* D, qu'on prolongera en M & L, *Fig.* 164, & ſeulement en L, Fig. 165, parce que la parabole n'ayant qu'un foyer, on tirera par le point D la ligne DM, parallele à l'axe OFH, & pour l'hyperbole, (*Fig.* 167) il ne ſera néceſſaire de prolonger que FD en L, parce que la ligne *f* D du foyer oppoſé, donnera l'angle *f* DL dont on a beſoin. *Fig.* 164. 165 & 167.

Du point D comme centre, & d'un intervalle pris à volonté, on fera un arc LXM qu'on diviſera en deux également en X, par où & par le point donné D, on tirera XD, qui ſera la ligne qu'on cherche.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée par le point D, *t* DT perpendiculaire à DX : il eſt démontré dans tous les Traités * des ſections coniques, que les lignes droites menées des deux foyers à un même point de la courbe, par lequel paſſe une tangente, font des angles égaux avec cette tangente *t* T ; mais ces angles *f* DT & FD *t*, (*Fig.* 164) ſont égaux à leurs oppoſés au ſommet *t* DL, TDM ; ſi on leur ajoute à chacun la moitié de l'angle LDM, les angles *t* DX & TDX, ſeront égaux entr'eux, donc ils ſeront droits ; or (par la conſtruction) cet angle LDM eſt diviſé en deux également, donc la ligne XD qui le diviſe, ſera perpendiculaire à la tangente *t* T, & par conſéquent à l'arc ; *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Apollonius. l. 3. prop.* 48 & pour la Par. *l. 1. p.* 33.

La même démonſtration eſt claire dans la Figure 167, avec cette différence qu'il n'eſt pas néceſſaire de prolonger *f* D, mais ſeulement FD en L, parce que l'angle *f* DT eſt au-dehors de l'hyperbole, & qu'il n'y a que ſon égal TDF, dont un côté eſt dedans.

A l'égard de la Figure 165 pour la parabole qui n'a qu'un ſeul foyer F que l'on puiſſe déterminer, on peut ſuivant le ſiſtème de la Géométrie de l'infini la conſidérer comme un ellipſe infiniment allongée ; alors ſon ſecond foyer étant infiniment loin, la ligne NDM qui en ſeroit tirée au point D, ſeroit parallele à l'axe OT : il en réſulte en effet la même égalité des angles ND *t*, FDT, comme il eſt prouvé par d'autres moyens ; ainſi la mê-

me conſtruction pour tirer une perpendiculaire à l'arc d'une ſection conique, ou plutôt à la tangente au point d'attouchement, eſt la même pour toutes; excepté pour le cercle où les deux foyers ſont réunis à ſon centre.

AUTREMENT.

On peut démontrer cette propoſition ſi l'on veut admettre l'axiome que M. de ROBERVAL établit pour l'invention des tangentes, que *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point là*: or la direction des lignes tirées à un point de l'hyperbole de chacun des foyers tend à l'éloigner également, donc la ligne qui diviſe également l'angle de ces lignes eſt la touchante, & dans l'ellipſe l'une de ces lignes tend autant à s'éloigner, que l'autre à s'approcher du foyer, donc la ligne qui diviſe leur angle eſt la tangente.

USAGE.

On auroit pû intituler ce Problême pour en exprimer l'application à la pratique, *maniere de tracer les joints de tête des ceintres faits d'arcs de ſections coniques*, & on en auroit indiqué tout d'un coup l'uſage pour la coupe des pierres; mais comme nous n'avons pas encore expliqué ce que c'eſt que *joint*, il convenoit d'énoncer la propoſition en termes généraux.

Je dirai en paſſant, que ce Problême eſt fondé ſur une vérité qui a fourni de merveilleuſes inventions dans la Catoptrique pour réfléchir la lumiere, parce que *l'angle d'incidence eſt égal à l'angle de refléxion*; c'eſt de-là que j'en avois tiré la pratique que je donne pour les joints, avant que j'euſſe ſçû que M. BLONDEL l'avoit déja fait dans ſes Problêmes d'Architecture, mais il n'a pas pourvû au cas ſuivant.

PROBLEME XXVII.

Par un point donné hors de la circonférence d'une ſection conique, lui mener une perpendiculaire.

Ce Problême n'eſt pas ſi ſimple que le précédent, & ſe réſout différemment pour la parabole & pour les deux autres ſec-

tions coniques, l'ellipſe & l'hyperbole ; c'eſt un Problême *de minimis*.

1°. *Pour la parabole* : (*Fig.* 165.)

Soit le point donné P hors de la parabole, on en abaiſſera une perpendiculaire PH ſur l'axe OS prolongé vers T s'il le faut ; on fera HK égale à la moitié du parametre, c'eſt-à-dire, à 2 FS ; on diviſera enſuite l'intervalle K S en deux également au point *m*, où l'on fera *m* C perpendiculaire à l'axe OS, & égale au quart de HP : ſi du point C pour centre, & pour rayon l'intervalle CS, on décrit un arc de cercle, il coupera la parabole ASB au point *x*, qui eſt celui que l'on cherche, par lequel & par le point donné P, tirant une ligne P*x*, elle ſera perpendiculaire à la courbe, ou plutôt à la tangente T *t* au point *x*. *Fig.* 165.

Nous ne pouvons pas donner la démonſtration de cette conſtruction dans toute ſon étendue, parce qu'elle ſuppoſe des propoſitions qu'il ſeroit trop long de rappeller ici & de démontrer ; nous indiquerons ſeulement ſur quoi elle eſt fondée ; du point *x* ayant mené la tangente *x*T juſqu'à l'axe OS prolongé, ce qui eſt facile à faire en portant la diſtance de l'ordonnée K *x* au ſommet de l'axe S, au-delà du ſommet de S en T : on trouve par les propriétés de la parabole & du cercle qu'elle coupe, que les triangles PE*x*, & *x*KT ſont ſemblables, & leurs angles K*x*T & P*x*E égaux, auſquels ajoutant l'angle commun T*x*E, on reconnoîtra que l'angle T*x*P eſt droit ; *ce qu'il falloit faire.*

2°. *Pour l'ellipſe.*

Soit (*Fig.* 166) l'ellipſe ADB, & le point P donné hors de la circonférence, par lequel il faut tirer une perpendiculaire à l'arc AD à un point inconnu *x*, qu'il faut trouver ſur cet arc, lequel point ſoit celui d'attouchement d'une ligne *t* T, à laquelle P*x* ſoit perpendiculaire. *Fig.* 166.

On commencera par chercher le parametre de l'axe AB, comme nous l'avons dit au Problême II, où en portant le demi-axe CD en C*d* ſur AB, on tirera AD ; & par le point *d*, on lui menera une parallele *de*, qui donnera ſur CD le point *e*, par lequel on tirera AF, qui ſera coupée en F par une parallele BF menée à CD par l'extrêmité B du diametre AB ; la ligne BF ſera le parametre, lequel ſera porté de B en *f*, & de *f* en K,

Fig. 166. parallelement à DC prolongée ; par le point K, on tirera l'indéfinie AG : enſuite on prendra la diſtance CH du centre C à la perpendiculaire PH abaiſſée ſur le diametre AB du point P donné, & on la portera de A en *g* ſur AB, on portera H*g* de A en N ſur l'axe BA prolongé en N, par où on menera MNS parallele à DC ; par le point N on menera NL parallele à PC tirée du point donné P au centre de l'ellipſe C, & terminée à la rencontre de PH prolongée en L, ce point L donnera la diſtance LH d'une ligne MQ, qu'il faut mener parallelement à l'axe AB, les deux lignes MS & MQ ſeront les aſymptotes d'un arc d'hyperbole P *x y* qui coupera l'arc AD au point *x*, que l'on cherche pour tirer la ligne demandée P *x*.

On peut encore trouver la diſtance de la ligne MQ, en portant PH ſur AC qui tombe ici en *g*, & tirer *g* G juſqu'à la rencontre menée par le point G parallelement au diametre AB de AG, la ligne MQ ſera l'aſymptote.

Les aſymptotes étant données, il eſt aiſé de trouver autant de points que l'on voudra de l'hyperbole, qui doit donner le point *x* par ſon interſection avec l'ellipſe AD (par le Problême XII.) ; il n'y a qu'à tirer à volonté par le point P une ligne quelconque qui coupe les aſymptotes, par exemple, SPR en S & en R : ſi l'on porte PS en R*y*, le point *y* ſera un de ceux de l'hyperbole, par lequel on tirera d'autres lignes à volonté, comme Y *y* V, qui donneront par la même conſtruction d'autres points de cette courbe vers *x* & Z, en portant la diſtance *y* Y en V, *r* en-deçà & au-de-là de *x*, & par les points P *x* Z *r*, on tracera l'hyperbole P *x r y* qui coupera l'ellipſe AD au point *x*, par où & par le point P donné, ſi l'on tire la droite P *x* qui eſt une corde de l'hyperbole, cette ligne ſera celle que l'on cherche, laquelle ſera perpendiculaire à l'ellipſe, ou plutôt à ſa tangente *t* T au point *x*.

3°. *Pour l'hyperbole.*

Fig. 167. Soit (*Fig.* 167) l'axe donné RS, le centre C, la moitié du ſecond axe CV, par le moyen duquel on trouvera CK moitié du parametre, comme on l'a dit au Problême XII ; ou en faiſant VK perpendiculaire ſur VR, par le point K, on fera K *r* perpendiculaire à RS, & égale à CR, & on tirera la ligne R *r* : enſuite par le point donné P, ayant mené PE parallele à K *r* ;

on

on portera CE en R *e*, & on tirera *e h* parallele à K *r*; on portera aussi la distance *e h* de C en H, par où on menera HG parallele à K *r*, & par H la ligne HI parallele à CP, laquelle coupera PE au point I, par lequel on menera GIN parallele à RS; les deux lignes G *g*, GN, sont les asymptotes d'une seconde hyperbole, laquelle passant par le point donné P, doit aussi passer par le point X que l'on cherche; la ligne droite menée de P par X satisfera à la proposition, en ce qu'elle sera perpendiculaire à l'arc de l'hyperbole SB, ou plutôt à sa tangente *t* T au point X; *ce qu'il falloit faire.* Pl. 15. Fig. 167.

Introduction à la démonstration.

La démonstration de ce Problême dépend d'une autre proposition, qui est que si l'on prend sur un axe d'ellipse ou d'hyperbole un point plus éloigné d'une de ses extrêmités que la longueur de son demi-parametre, & que la distance du centre de cette ellipse ou hyperbole à une ordonnée au même axe, soit en même raison avec la distance de cette ordonnée au point donné hors de la courbe, que l'axe à son parametre; la ligne menée de ce point à celui de la courbe où se termine l'ordonnée, est la plus petite de toutes celles qu'on y peut mener. Cela supposé, comme il est démontré au Livre VII. *prop.* 6 des sections coniques de M. de la HIRE, soit prolongé P *x* en *p*, où cette ligne rencontre l'axe AB, & tirée *d x* parallele à PH, il ne s'agit que de démontrer que l'axe est au parametre, comme C *d* est à *dp* (*Fig.* 166). Fig. 166.

Par le point *x* soit mené *d x* X, parallele à PH, qui coupera PC en X, & par le point *p*, où P *x* prolongée, rencontre l'axe AB soit menée *p z* aussi parallele à PH : pour diminuer le nombre des signes, soit nommé l'axe AB (*a*) le parametre BF (*b*) par la construction *a* : *b* :: PL : LH :: CN : NH; donc (par la cinquiéme du sixiéme d'EUCL.) les triangles NHL, PHC sont semblables entr'eux, lesquels sont semblables encore aux triangles G*pz*, C*d*X, à cause des paralleles *d*X & *pz*; donc C *d* : C *p* :: *d*X : *pz*; & C *p* : C *d* :: *pz* : *d*X, en divisant C *d* : C *d* — C *p* = *dp* :: *d*X : *d*X — *pz* = *q*X; & en composant C *d* + *dp* = C *d* + *zq* : *zq* :: *d*X + *q*X : *q*X :: CH + HN : HN :: *a* : *b*; donc C *d* : *p d* :: *a* : *b*, donc *p x* (par la proposition citée ci-dessus) est un *minimum*, par conséquent aussi

P x, qui eſt par la même raiſon perpendiculaire à la tangente T t, p P étant une ligne droite ; *ce qu'il falloit démontrer pour l'ellipſe.*

Nous omettons la démonſtration pour l'hyperbole, elle eſt fondée ſur le même principe, & ſera facile à déduire de la précédente, en faiſant attention aux aſymptotes & à leurs propriétés ; il faut ſeulement ajouter, où l'on retranche pour l'ellipſe. Le peu d'uſage que nous avons à faire de cette courbe, n'exige pas que l'on s'y arrête plus long-tems.

USAGE.

Ce Problême de mener une perpendiculaire à une courbe par un point donné au-dehors, ne tombe gueres dans la pratique de l'Architecture pour la coupe des pierres, parce qu'on fait ordinairement les diviſions de joints par des points pris ſur les arcs des ceintres, comme il a été enſeigné au Problême précédent. Cependant comme il peut arriver dans une décoration de vouſſoirs à croſſettes, ou pour tirer quelques rayons ſur une ellipſe, qu'on auroit beſoin de ce Problême : nous avons crû devoir le joindre au précédent pour la perfection de la doctrine, dans laquelle on ne doit pas négliger ce qui n'eſt pas d'un fréquent uſage, parce que les Livres ſont plus utiles pour les cas extraordinaires, que pour ce qui ſe pratique tous les jours, dont on peut s'inſtruire facilement ; d'ailleurs c'eſt un contentement à l'eſprit de ſçavoir ce qu'on auroit à faire, ſi le cas arrivoit.

Je dois avertir d'une petite difficulté qui peut ſe préſenter & embarraſſer un Lecteur peu verſé dans ces matieres ; c'eſt que la perpendiculaire tirée par le point donné P hors de l'ellipſe ſur l'axe AB, peut tomber hors de cette ellipſe ſur la prolongation de l'axe ; alors l'hyperbole ne peut rencontrer l'ellipſe. Pour y remédier, au lieu d'abaiſſer la perpendiculaire ſur un axe, il faut l'abaiſſer ſur ſon conjugué, & faire la même opération.

De la diviſion des ſpirales par des perpendiculaires à leurs arcs.

PROBLEME XXVIII.

Par un point donné au contour de la ſpirale, tirer une perpendiculaire à ſon arc.

PRemierement, il eſt évident que lorſque les ſpirales ne ſont qu'une imitation des vraies courbes méchaniques par une compoſition d'arcs de cercles, comme ſont les *volutes* des Architectes; il n'y a pas plus de difficulté à mener des perpendiculaires à leurs arcs par des points donnés qu'au cercle; puiſque chacun d'eux a ſon centre différent, auquel cette perpendiculaire prolongée doit aboutir.

Secondement, s'il s'agit de la ſpirale d'ARCHIMEDE, ou des autres de VARIGNON, on ne peut donner la ſolution de ce Problême, qu'en ſuppoſant la rectification de la circonférence du cercle de révolution; car ARCHIMEDE a démontré que la ſoustangente de la ſpirale à la fin de la premiere révolution étoit égale à la circonférence du cercle circonſcrit; & comme nous ne pouvons faire la diviſion propoſée, que par une perpendiculaire à la tangente de la courbe au point donné; ce Problême eſt un de ceux dont la ſolution Géométrique ſera auſſi long-tems à trouver que la quadrature du cercle.

Cependant ſuppoſant le rapport du diametre du cercle à ſa circonférence, comme 7 eſt à 22, ou 100 à 314, ce qui eſt ſuffiſant pour la pratique des arcs, il ſera aiſé de trouver les tangentes à la ſpirale d'ARCHIMEDE en tel point que l'on voudra marquer à ſon contour.

Soit (*Fig.* 168) la ſpirale ADBPC, qui fait deux révolutions completes, la premiere de C en B, la ſeconde de B en A: ſi le point donné pour mener une perpendiculaire à cette courbe eſt en B, à la fin de la premiere révolution, ayant tiré BC au centre C, on lui fera une perpendiculaire BG égale à la circonférence du cercle qui auroit BC pour rayon, ou à la moitié, comme dans cette Figure, à laquelle menant GT parallele & égale à BC ou à ſa moitié, ſi l'on n'a pris que la moitié de la circonférence; du point T on tirera TB qui ſera la tangente, à la- Fig. 168.

Fig. 168. quelle ſi l'on tire par le point B donné, la perpendiculaire BX; cette ligne ſera celle qu'on demande.

Si le point donné eſt en A, à la fin de la ſeconde révolution; on fera de même une perpendiculaire ſur CA, que l'on fera égale à la circonférence du cercle qui a CA pour rayon, ou à ſon tiers, comme dans cette Figure, ſur laquelle faiſant *t g* parallele & égale au premier rayon BC, ou à ſon tiers, la ligne *t* A ſera la tangente au point A, & la perpendiculaire A*x*, celle qu'on demande.

Nous prenons ici des parties aliquotes ſemblables, pour que la Figure n'occupe pas trop de place; ce qui ne change rien à la poſition des tangentes, parce qu'on ſçait que les triangles ſemblables ont les angles oppoſés aux côtés homologues égaux.

Si le point donné eſt en P dans l'intervalle de la premiere révolution, ayant tiré comme ci-devant PC & ſa perpendiculaire PH, on portera ſur PH la longueur de la circonférence du cercle P*hi*, qui a CP pour rayon, & faiſant HI parallele à PC & égale à BC rayon, de la révolution complette, on menera IPT qui ſera tangente au point P, & la perpendiculaire P*x* ſera elle qu'on cherche.

Si le point donné étoit en *q*, entre la premiere & la ſeconde révolution BE*q* A, on en agiroit encore de même, ne portant pour la perpendiculaire à la ſous-tangente que le premier rayon BC.

La démonſtration de cette conſtruction, qui eſt de M. PERSONIER de Roberval, eſt fondée ſur un principe des mouvemens compoſés qu'on peut voir dans la premiere collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, & ſur les 19 & 20e. prop. des ſpirales d'ARCHIMEDE.

Ou pour abréger, il faut multiplier l'arc de révolution (x) par ſon rayon (y) & le diviſer par le rayon (a) du cercle de la premiere révolution, ſuivant la formule de M. VARIGNON $\frac{xy}{a}$ pour trouver les ſous-tangentes de cette ſpirale.

Préſentement il faut voir comment on doit tirer les ſous-tangentes des autres ſpirales d'un degré plus élevé que celle d'ARCHIMEDE, comme ſont les paraboliques, verticocentrales, & les hyperboliques cocentrales, dont nous avons donné la conſtruction ci-devant.

Appellant (m) le degré de cette courbe, M. VARIGNON trouve pour expreſſion générale des ſous-tangentes de ces premieres

$\frac{mxy}{a}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut rectifier l'arc de révolution EN, (*Fig.* 140, PLANCHE 12) compris depuis l'axe AX, juſqu'au point donné N, le multiplier par ſon rayon CN, & par le degré (m) de la courbe génératrice qui eſt ici 2, puis diviſer ce produit par le rayon de la premiere révolution complete, & l'on aura la longueur Cx de la ſous-tangente Cx; ainſi ayant tiré du centre C la droite CN au point donné N, on lui menera par le point C la perpendiculaire Cx égale à la longueur trouvée par quotient de cette diviſion, qui ſera priſe ſur la même échelle qui aura ſervie à meſurer le contour de l'arc de révolution pour le rectifier, & les deux rayons de l'arc de révolution incomplete, & de la révolution complete. Pl. 12. Fig. 140.

Ou bien ſi l'on veut trouver la longueur de la ſous-tangente ſans calcul, on le peut de la maniere qui ſuit, avec la regle & le compas.

On portera ſur le rayon CN prolongé le double de ſa longueur en Cn; & ſur CH perpendiculaire à ce rayon, la longueur CH égale à l'arc de révolution rectifié, puis ayant fait H9 parallele & égale à Cn, on portera ſur la même H9 prolongée la longueur CD du rayon de la premiere révolution complete de 9 en G, laquelle révolution ſe compte depuis le centre C; enfin par les points G & n, on tirera la ligne Gnx qui rencontrera HC prolongée en x; la ligne menée du point x par le point donné N, ſera la tangente que l'on cherche.

La raiſon de cette opération eſt facile à concevoir: ſuppoſant que l'expreſſion Algébrique $\frac{mxy}{a}$ pour les ſpirales paraboliques verticocentrales a été démontrée par M. VARIGNON, comme elle l'eſt en effet dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, il eſt clair que je conſtruits cette équation qui eſt dans ce cas $\frac{2xy}{a}$, c'eſt pourquoi je porte le double du rayon CN $= y$ en Cn pour avoir un parallelogramme C$9 = 2xy$; enſuite pour le diviſer par a, c'eſt-à-dire, par le rayon de la premiere révolution complete, qui eſt CD, parce que la ſpirale fait deux révolutions & demi de C en A, je porte CD (a) de 9 en G, pour tirer Gnx qui ſeroit la diagonale d'un rectangle fait de HG par Hx, ſuivant laquelle les complemens ſont

égaux (par la quarante-troiſieme du I. Livre d'EUCLIDE) ainſi le rectangle Hn qui eſt un de ces complemens, ſera égal à celui qu'on peut ſuppoſer de l'autre côté de cette diagonale, lequel ayant pour un de ſes côtés $9G = CD = a$, aura par conſéquent l'autre égal à Cx qu'on cherche; puiſqu'en diviſant un rectangle par une de ſes racines, le quotient donne l'autre.

On ſera peut-être ſurpris que j'applique à l'exemple que je donne d'une ſpirale circulaire, l'expreſſion des ſous-tangentes, des paraboliques verticocentrales: il ne faut pas prendre ici le nom de parabole dans la ſignification ſeule de celle d'APOLLONIUS, mais auſſi pour les autres de différens degrés, qui ſont tous déſignés par la lettre m; ainſi il faut remarquer que le quart de cercle dans cette ſituation eſt une eſpece de demi-parabole. En effet, ſuivant la Géométrie de l'infini, cette courbe n'eſt qu'un demi-cercle infiniment allongé, puiſque dans le cercle, les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme les rectangles des abſciſſes; & dans la parabole, dont le diametre ou plutôt l'axe eſt infini, les abſciſſes ne différant que d'une longueur finie, elles ſont cenſées égales, meſurées depuis le point de rencontre de l'ordonnée à la partie qui s'allonge infiniment; d'où il ſuit que les quarrés des ordonnées de la parabole ſont comme leurs abſciſſes, donc l'expreſſion des ſous-tangentes convient au quart de cercle verticocentral, puiſqu'elle convient de plus à d'autres courbes, dont les abſciſſes ſont entr'elles, comme les puiſſances quelconques de leurs ordonnées, ainſi que le démontre M. VARIGNON.

On a pû remarquer que j'ai pris le nombre *deux* pour la valeur de m, parce que la parabole & le cercle ſont du ſecond degré, ſur quoi on pourroit me demander quelle eſt la courbe parabolique du premier degré, puiſque celle-ci eſt du ſecond; à quoi je répondrai que c'eſt le triangle, s'il eſt permis de le mettre au rang des ſections coniques & des courbes; car on peut lui trouver des abſciſſes & des ordonnées, comme je l'ai dit au I. Livre page 16; & ſous cette conſidération on peut le regarder comme la génératrice de la ſpirale d'ARCHIMEDE, dont les arcs de révolution ſont entr'eux comme leurs rayons; c'eſt pourquoi l'expreſſion m s'évanouit, de ſorte que celle des ſous-tangentes ſe réduit à $\frac{xy}{a}$ qui eſt plus ſimple que la précédente, dont nous

avons donné la conſtruction $\frac{2xy}{a}$, où nous avons doublé la longueur de CN, qu'il ne faut pas doubler à la ſpirale d'ARCHIMEDE.

La même conſtruction que nous avons donnée pour trouver les ſous-tangentes des ſpirales paraboliques vertico-centrales, ſert pour trouver celles des hyperboliques cocentrales, dont nous avons donné un exemple à la Figure 141, avec cette différence que l'expreſſion Algébrique devenant négative, il faut opérer en ſens contraire, c'eſt-à-dire, prendre les ſous-tangentes du côté oppoſé.

REMARQUE.

Il arrive aſſez ordinairement que les ſous-tangentes deviennent ſi longues, qu'elles ne peuvent être contenues dans la ſurface ſur laquelle on trace l'épure, c'eſt-à-dire, le deſſein de grandeur naturelle à l'ouvrage qu'on ſe propoſe; pour remédier à cet inconvénient, il faut ne prendre que le tiers ou le quart, ou toute autre partie des longueurs données, & mettre la ſous-tangente ſur le rayon perpendiculairement, & à une diſtance proportionelle du centre C.

USAGE.

Le principal uſage du Problême qui enſeigne la maniere de mener des tangentes aux ſpirales eſt, comme nous l'avons dit, pour la coupe des joints des volutes, conſoles, limaçons & autres ouvrages en ſpirale, qu'on peut faire de pierre de pluſieurs pieces; mais il faut remarquer que le liſtel de la volute étant compoſé de deux ſpirales différentes, l'une qui forme l'arrête extérieure, l'autre l'intérieure, la perpendiculaire à la tangente de l'une des deux ne l'eſt pas à l'autre; de ſorte que ſi le joint eſt en bonne coupe ſur une arrête, il ſera en fauſſe coupe ſur l'autre; mais comme ce mal eſt ſans remede, à moins que de faire le joint courbe, il convient pour la plus grande régularité de tracer entre les ſpirales de ces deux arrêtes une moyenne par les diviſions de la moitié de la largeur du liſtel, ou de celle du limon, s'il s'agit du limaçon, & mener les perpendiculaires aux tangentes ſur les points de diviſion pris ſur cette ſpirale moyenne; ainſi la fauſſe coupe ſe diviſera partie

ſur l'arrête extérieure, partie ſur l'arrête intérieure.

Le ſecond uſage de ce Problême eſt pour faire un *œil* circulaire au milieu de la ſpirale qui puiſſe ſe raccorder avec elle ſans aucun jarret à la jonction de ces deux courbes ; car ayant déterminé ſur la ſpirale un point, où l'on veut qu'elle ſe joigne à *l'œil* circulaire, il faut mener par ce point une tangente & une perpendiculaire à cette tangente par le même point, ſur laquelle on prendra le rayon du cercle qui doit former l'*œil*, & par ce moyen les deux courbes ſe joindront par une tranſition inſenſible ſans aucun jarret.

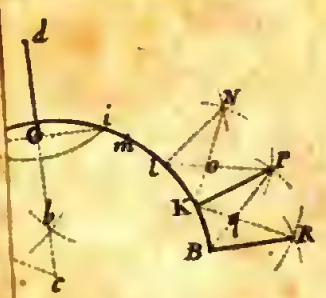
D'où il ſuit que le centre de *l'œil* ne tombera pas ſur le centre de la ſpirale, parce qu'il n'y a que le cercle dont la perpendiculaire à la tangente paſſe par le centre; cette propriété ne lui étant pas commune avec la ſpirale.

Cette perfection de jonction des deux courbes ſe trouve obſervée dans la volute de GOLDMAN, qui n'eſt pas pour cela une ſpirale Géométrique quoiqu'en diſe D'AVILER, mais une compoſition d'arcs de cercle, dont la ſuite des rayons n'eſt pas en raiſon exactement uniforme, comme je le dirai en ſon lieu ; ainſi la cathete d'une volute en ſpirale Géométrique ou Méchanique paſſant par le centre de *l'œil*, ne doit pas paſſer par celui de la ſpirale, ou ſi l'on veut qu'elle paſſe par le centre de la ſpirale, elle ne paſſera pas par celui de *l'œil* ; c'eſt à l'Architecte à choiſir l'un des deux, l'éloignement de ces deux centres peut être plus ou moins grand, ſuivant la grandeur ou la petiteſſe de *l'œil* de la volute, & la diſtance du point d'attouchement de la ſpirale (où ſe fait la jonction) de ſon centre, ſi le rayon de l'œil eſt plus petit que cette diſtance, ſon centre tombera au-dedans, s'il eſt plus grand, au-dehors.

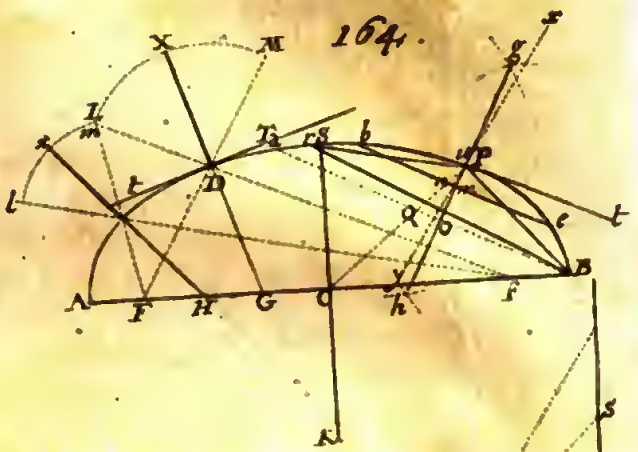
Des diviſions de quelqu'autres courbes uſuelles par des perpendiculaires à leurs arcs.

OUtre les courbes des ſections coniques & les ſpirales ; il s'en trouve encore d'autres à diviſer par des perpendiculaires à leurs arcs, dans quelques *traits* de la coupe des pierres ; mais ſi rarement qu'il n'eſt pas fort néceſſaire de s'arrêter à en chercher les tangentes.

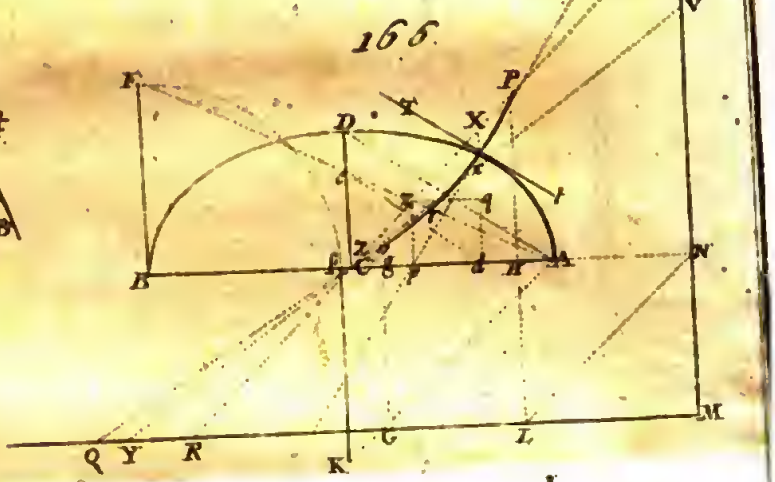
La

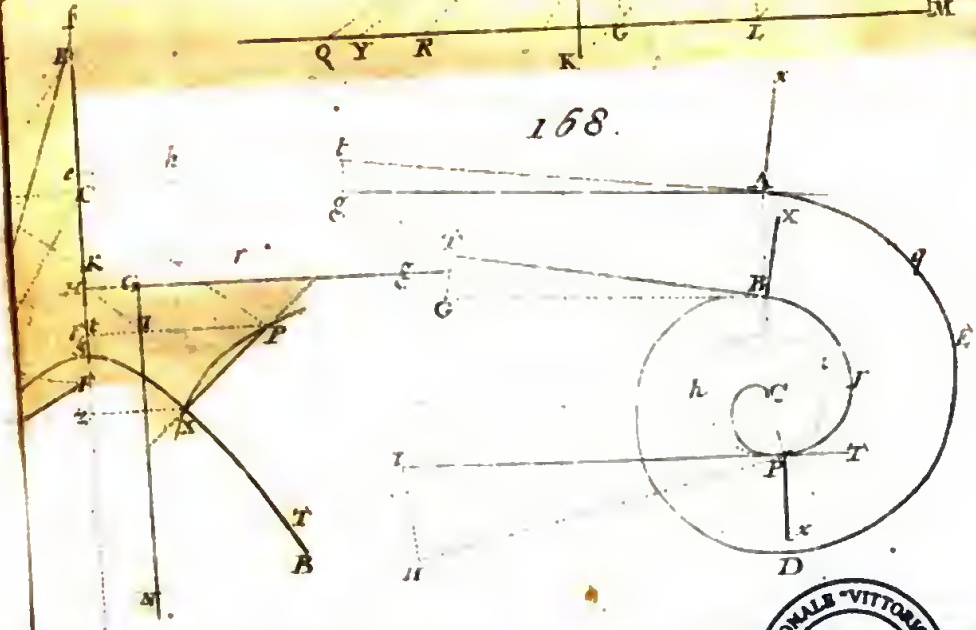


164.



166.





168.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

La premiere eſt celle d'une eſpece de cicloïde, qui eſt la courbe dévelopente de la circonférence de la face de la *Trompe érigée ſur une ligne droite*, ſuivant le trait du P. DERAN, ſur laquelle il faut tirer les joints de tête, ce qu'il fait en opérant ſur cette courbe comme ſur un arc de cercle, en prenant de part & d'autre des ouvertures de compas égales, & faiſant des deux diſtances, comme centres des arcs de cercle qui ſe coupent, & donnent à peu près cette perpendiculaire, & ſuffiſamment pour qu'on n'en puiſſe appercevoir l'irrégularité, ſi l'on prend de petites diſtances du point donné à diviſer ; nous donnerons un autre trait de la même trompe, où l'on n'a pas beſoin de cette opération.

La ſeconde eſt cette courbe du quatrieme ordre dont nous avons parlé, qui eſt la ſection d'un anneau ou d'une hélice : dans celle-ci on n'a pas beſoin de faire des joints de tête réguliers, parce qu'elle n'eſt pas employée pour une face apparente ; & quand elle le ſeroit, l'inclinaiſon des joints ſe trouveroit déterminée par celle de l'arc droit de la voute qui n'eſt qu'un demi-cercle ou une demi-ellipſe.

La troiſieme ſeroit la chaînette qu'on pourroit employer pour mettre l'équilibre entre les vouſſoirs égaux ; mais outre qu'au lieu de cette courbe on pourroit ſe ſervir de la parabole qui en eſt très-peu différente, c'eſt que l'une & l'autre ne conviennent guere aux ceintres, ſi l'on a quelque égard à l'agrément de leur contour, & à celui de leur naiſſance à l'impoſte, lorſque les piédroits ſont à plomb : cependant les Curieux pourront ſe ſatisfaire ſur la maniere de décrire cette courbe méchaniquement, dans le ſecond Tome, (Planc. 33, Fig. 50) au Chapitre V. & ſur celle de la décrire par pluſieurs points trouvés Géométriquement, au troiſieme Tome, après le IIIe. Problême du Chapitre douzieme (Planc. 110. Fig. 230) l'art de lui tirer une tangente par un point connu & par conſéquent la coupe d'un joint de tête de vouſſoir. Si par un hazard extraordinaire il ſe préſentoit d'autres courbes à diviſer, on pourra s'en tirer en opérant comme ſur un arc de cercle, & corrigeant à la vûe ce qui pourroit paroître défectueux.

SECONDE PARTIE
DU SECOND LIVRE.

CHAPITRE V.

De la deſcription des ſections des corps qui ne doivent, ou ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces concaves ou convexes.

LES ſections dont nous avons parlé dans la premiere Partie de ce Livre ont été conſidérées comme devant être décrites ſur des ſurfaces planes, quoiqu'elles ſoient originaires des ſurfaces courbes : il s'agit à préſent de les tracer ſur les ſurfaces qui leur ſont naturelles, de même que celles qui ne peuvent être décrites ſur des plans, auſquels elles ne peuvent s'adapter. Cependant, parce que les points des contoures de ces dernieres ne peuvent ſe trouver que par le ſecours des lignes droites qu'on ne peut chercher ſur des ſurfaces courbes, en ce qu'elles ne ſont pas à la ſurface du ſolide, mais au-dedans, comme ſont les rayons, les ordonnées & les abſciſſes ; il a fallu avoir recours à une repréſentation imparfaite & défigurée, faite ſur une ſurface plane par des paralleles abaiſſées ſur cette ſurface de pluſieurs points de la courbe : ce qu'on a appellé *la projection*, du mot latin *projicere*, qui veut dire jetter, comme ſi tenant un corps en l'air, on jettoit ou laiſſoit tomber de chacun de ſes points une goute d'encre ſur un plancher, la ſuite de ces goutes liées par une ligne continue, donneroit une figure qui ſeroit la projection de ce corps.

De la projection.

Le mot de projection a pluſieurs ſignifications, il peut s'ap-

pliquer à l'action de jetter, mais nous la reſſerrons ici à la deſcription d'un corps formée ſur un plan par des perpendiculaires à ce plan, où ſi l'on veut l'étendre encore davantage, par des paralleles menées des angles de ce corps ou de pluſieurs points de ſon contour ſur ce plan en quelque ſituation qu'il ſoit à ſon égard.

Il ſuffit cependant à l'uſage que nous en devons faire, de conſidérer les lignes verticales & les horiſontales, parce que c'eſt à ces deux genres de ſituations conſtantes, & que l'on peut toujours déterminer, qu'on doit rapporter les lignes inclinées à l'horiſon. Selon cette reſtriction nous pouvons dire, pour nous accomoder aux termes de l'Art, que la projection d'un corps eſt la trace de pluſieurs *à-plombs*, abaiſſés de leurs angles ou de leurs contours pour en faire *le plan* ou Ichnographie, ou de pluſieurs lignes de niveau tirées de même de ſes angles, ou de ſon contour ſur une ſurface *à-plomb*, pour en faire les *profils* ou les *élévations*.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

D'où il ſuit que la projection faite ſur un plan vertical ou horiſontal, raccourcit la repréſentation de toutes les lignes & ſurfaces qui ne ſont pas paralleles au plan ſur lequel on la fait.

Car ſoit (*Fig.* 169) la ligne AB, dont on fait la projection ſur le plan *g h*: il eſt évident que ſi cette ligne étoit dans la ſituation a B parallele à ce plan, les perpendiculaires a D, BF abaiſſées de ſes extrêmités ſeroient auſſi paralleles & égales, & par conſéquent que la repréſentation DF ſeroit égale à a B; mais que ſi l'on tranſporte le point a en A ſans mouvoir le point B, on raccourcira la repréſentation de cette ligne de la diſtance qu'il y aura de la perpendiculaire aD à AE qui eſt égale au ſinus verſe a S de l'angle a B A de l'inclinaiſon de la ligne AB abaiſſée à ſon extrêmité A au-deſſous de la ligne horiſontale a B, ſi la projection ſe fait par des verticales; donc la repréſentation EF ſera plus petite que la ligne AB. PL. 16. *Fig.* 169.

On peut démontrer cette vérité d'une maniere plus ſimple en menant A *c* parallele à EF, parce qu'alors on reconnoîtra que la projection d'une ligne qui n'eſt pas parallele au plan de deſcription, eſt toujours égale au côté d'un triangle rectangle,

dont la ligne objective eſt l'hypotenuſe ; d'où nous tirons la propoſition ſuivante, qui eſt fondamentale pour tracer les deſſeins qu'on appelle *épures* pour la coupe des pierres.

THÉOREME.

Les projections des lignes courbes qui ſont dans un plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres plans de deſcription, ſont des lignes droites, dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs points de ces courbes, ſont toujours en même proportion avec les abſciſſes co-ordonnées.

Premierement il eſt clair que la projection d'une ligne courbe qui eſt dans un plan perpendiculaire à celui de deſcription eſt une ligne droite ; car puiſque toutes les lignes menées des points de la courbe ſur le plan de deſcription, ſont dans le même plan ; on ne doit plus conſidérer que la ſection des deux plans, laquelle ſuivant la Géométrie élémentaire eſt néceſſairement une ligne droite : ainſi la projection de l'ellipſe ABDE, (*Fig.* 170) eſt la ligne *a d* dans le plan *g h*, & la ligne *be* dans le plan *g h*, & la ligne *be* dans le plan *g k*, l'une *a d* eſt horiſontale ſur le plan horiſontal, & l'autre *b e* verticale ſur le plan vertical ; & les points c^1, & c^2 de ces deux lignes ſont la repréſentation de trois points raſſemblés en un ; ſçavoir, c^1 qui repréſente les points B, C, E ; & C^2 les points A, C, D : de ſorte que *c a*, *c d* ſont les repréſentations d'un quart ou d'une moitié d'ellipſe ; ce qui eſt viſible, & à quoi il faut s'accoutumer pour concevoir tout ce que nous dirons dans la ſuite ſur des Figures où nous n'exprimeront ſouvent les lignes courbes que par des droites.

Fig. 170.

Quant à la ſeconde partie de ce Théorême touchant le rapport des diviſions faites par des paralleles menées de pluſieurs points des courbes ; nous n'étendrons la démonſtration qu'aux ſections coniques, qui ſont preſque les ſeules dont nous avons affaire, particulierement du cercle & de l'ellipſe.

Soit une ligne *k* L ou *b e* (*Fig.* 171) coupée par des paralleles *a t*, Q *s*, P *r*, le rectangle de $a\,T \times T\,d : k\,T \times T\,L :: Q\,c \times c\,q : k\,c \times c\,l$; il en eſt de même des rectangles faits par les parties de la ligne *be* coupées par les paralleles *a t*, Q *s*, P *r* ; donc

Fig. 171.

les points T, *c*, *z*, ſections de lignes tirées des points *a*, Q, P, ſur la ligne *k* L, donnent des diviſions ſur cette ligne qui ſont en même rapport entr'elles que celles que les mêmes points *a*, Q, P donnent ſur la ligne *be*, quoique différemment ſituée à l'égard de l'arc *a* P de l'ellipſe au-dedans de la courbe.

Il ne ſera pas difficile de faire voir que le même rapport ſubſiſtera à l'égard des lignes qui ſont hors de la courbe, par exemple, de *g* H; car ſi l'on mene par le point *g* une ligne *gf* parallele à *be*, il eſt évident que les diviſions *rs* & *st* ſont égales à *zn* & *nm*: mais à cauſe des paralleles *at*, Q*s*, P*r*, les triangles *gt*M, *gs*N, *gr*O ſont ſemblables; donc *rs* = *zn*: *st* = *nm*:: ON: NM:: *zc*: *c*T, donc la projection des points P, Q, *a*, ou *p*, *q*, *d*, faite par des lignes paralleles entr'elles, donne toujours des diviſions qui ſont en même rapport entr'elles, ſur les plans différemment ſitués à leur égard, ſoit au-dedans, ſoit au-dehors de la courbe, & quelque angle que les lignes de projection faſſent avec ces plans; *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit que la projection faite ſur des plans perpendiculaires aux paralleles de projection, n'eſt pas une repréſentation plus réguliere des objets, que celle qui eſt faite par des lignes obliques, & que cette maniere de repréſenter les corps eſt Géométrique, puiſqu'elle conſerve toujours un certain rapport des parties des courbes projettées.

COROLLAIRE II.

De-là il ſuit que ſi l'on fait la projection d'un cercle par des lignes paralleles, perpendiculaires, ou obliques au plan de deſcription, les diviſions correſpondantes des deux côtés de la ligne de projection qui paſſe par ſon centre, ſeront égales entr'elles, à cauſe de l'uniformité de cette courbe: il en ſera de même à l'égard de l'ellipſe, lorſque la projection ſe fera par des lignes perpendiculaires au plan de deſcription.

Ce que nous diſons du cercle & de l'ellipſe eſt encore vrai à l'égard de la parabole & de l'hyperbole, lorſque les lignes de projection ſont paralleles à leurs axes.

On peut étendre ce Théorême à d'autres courbes qu'aux

Sections coniques, comme aux ſpirales & aux ovales faites par la ſection des corps annullaires dont nous avons parlé : en un mot la projection conſerve toujours une certaine régularité de rapport, qui eſt le ſeul moyen d'adapter à une ligne droite quelques propriétés d'une ligne courbe, & d'appliquer ſur un plan les ſurfaces concaves ou convexes, ſans confuſion de leurs parties, quoiqu'elle transforme quelquefois une courbe en une autre.

THEOREME.

La projection d'un cercle qui n'eſt pas parallele à ſon plan de deſcription eſt une ellipſe, & au contraire celle de l'ellipſe peut être un cercle; & celle des ellipſes, paraboles ou hyperboles, eſt une courbe d'une même eſpece plus ou moins allongée.

Fig. 172. Soit (*Fig.* 172) le quart de cercle AEFC dans le plan AEHC, ſur lequel on fait la projection de ce même quart de cercle ſuppoſé élevé ſur ce plan en D, de l'intervalle de l'arc DE, meſure de ſon angle d'inclinaiſon DAE, le rayon AC demeurant immobile ſur le plan. Des points D & G, pris à volonté à la circonférence du quart de cercle, ayant abaiſſé ſur le même plan les perpendiculaires D*d*, G*g* qu'il faut ſuppoſer telles, quoiqu'elles ne le ſoient pas dans la Figure, à cauſe de la perſpective ; ſi par les points *d* & *g* on tire les droites A*d*E, B*g*F perpendiculaires au rayon AC, on aura deux triangles ſemblables A*d*D, B*g*G rectangles en *d* & *g* par la conſtruction, & dont les angles en A & B ſont égaux, puiſqu'ils ſont celui de l'inclinaiſon des deux plans des quarts de cercle DAC & EAC, donc A*d* : AD :: B*g* : BG; mais AD = AE & BG = BF; donc AE : A*d* :: BF : B*g*, c'eſt-à-dire, que les ordonnées de la courbe ſont entr'elles comme celles du cercle ; ce qui n'appartient qu'à l'ellipſe, * *& qu'il fallait démontrer.*

* L. 1. art. 41.

On auroit pû démontrer la même choſe tout d'un coup en conſidérant le cercle à la ſurface d'un cylindre ſcalene, dont la ſection perpendiculaire à l'axe eſt une ellipſe ; car les lignes de projection étant multipliées à l'infini, & paſſant à la circonférence d'un cercle formeroient la ſurface d'un cylindre.

Par ce moyen on démontre tout d'un coup la ſeconde partie

de ce Théorême, qui dit que la projection d'une ellipſe eſt ſouvent un cercle, & ordinairement une ellipſe plus ou moins allongée ; car l'ellipſe conſidérée à la ſurface du cylindre droit ſe réduit à un cercle à ſa baſe ; & ſi le cylindre eſt coupé plus ou moins obliquement, ſoit qu'il ſoit droit ou ſcalene, la ſection eſt une ellipſe plus allongée ou plus racourcie.

La même démonſtration ſert pour la troiſieme partie, qui dit que la projection des paraboles & hyperboles ſont des courbes de même eſpece, comme il a été dit au Théorême III, qui ne different de celle qu'on veut repréſenter par la projection, qu'en ce qu'elles ſont plus ou moins allongées ou racourcies, ſuivant le plus ou moins d'obliquité de la ſection ; car les lignes de projection multipliées à l'infini forment un corps cylindrique, qui a pour baſe une parabole ou une hyperbole, c'eſt l'inverſe du Théorême III.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que plus les lignes de projection ſont les angles aigus, avec le plan de la Figure qu'on veut projecter, plus la Figure ſe reſſerre ; de ſorte que ſi ces lignes ſont un angle infiniment aigu, elles tombent dans le plan de la Figure, & la réduiſent à une ligne droite, comme nous l'avons dit ci-devant.

USAGE.

L'application de cette propoſition ſe préſente tous les jours à la pratique de la coupe des pierres & des autres ouvrages d'Architecture ; car la projection, c'eſt-à-dire, en termes de l'art, le *plan* d'une porte, ſoit en plein ceintre, ſoit ſurhauſſée, ſoit ſurbaiſſée dans un mur en talud, comme ſont ordinairement ceux des revêtemens des fortifications, eſt une ellipſe fort reſſerrée, ſuivant le plus ou le moins d'inclinaiſon du talud, & celui d'un joint de lit d'une niche ſphérique en coquille eſt de même une ellipſe qui ſe reſſerre vers la clef, où elle devient une ligne droite, & s'ouvre vers les impoſtes, où elle devient un arc de cercle.

Ces deux propoſitions ſont encore néceſſaires pour l'intelligence des Figures ſuivantes, & des traits en général, où l'on repréſente ſouvent les cercles & les ellipſes par des lignes droi-

tes qui en ſont la projection, ou par des ellipſes extrêmement reſſerrées.

De la deſcription du cercle ſur les ſurfaces concaves ou convexes de la ſphere, du cone, & du cylindre.

PROBLEME XXIX.

Par deux ou trois points donnés ſur la ſurface d'une ſphere, décrire un cercle.

ON doit conſidérer la ſurface de la ſphere, comme compoſée de deux Figures, l'une concave, l'autre convexe; cette différence n'eſt pas un objet pour la théorie, où l'on n'a pas égard à l'impénétrabilité des corps, mais bien pour la pratique qui ne peut opérer ſur l'une comme ſur l'autre.

Premièrement s'il s'agit de décrire un cercle majeur dans la ſurface concave; il ſuffit qu'on ait deux points donnés, pourvû qu'on connoiſſe le diametre de la ſphere, & qu'ils ne ſoient pas diamétralement oppoſés; car il eſt clair, par la génération de la ſphere (*Art.* 1.) que le diametre d'un cercle devient l'axe de la ſphere, lorſqu'on le fait mouvoir autour de ce diametre; par conſéquent qu'il eſt commun à tous les cercles qui paſſent par l'axe de la ſphere.

Si les deux points donnés ſont moins éloignés que de 180 degrés, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle majeur, mais une infinité de cercles mineurs de différentes grandeurs; d'où il réſulte que, pour ceux-ci, ce n'eſt pas aſſez de deux points donnés, il en faut trois pour en déterminer la poſition & la grandeur, parce qu'il en faut chercher le diametre comme il ſuit.

Fig. 173. Soient les trois points donnés A, B, E (*Fig.* 173) dans la ſurface concave de la ſphere; on en meſurera les diſtances pour en faire à part, ſur une muraille ou autre ſurface plane, un triangle ABE, puis par les points B & E, on tirera aux lignes AE, AB des perpendiculaires B *d*, E *d* qui ſe rencontreront au point *d*; ſi par ce point *d* & l'oppoſé A, on tire une ligne A *d*, elle ſera le diametre qu'on cherche.

COROLLAIRE.

De cette méthode on tire celle de trouver le diametre d'une ſphere;

ſphere ; car ſi avec un cordeau de longueur arbitraire, & d'un point P pris à volonté pour pole, on décrit un cercle ſur la ſurface concave, en ayant trouvé le diametre par la pratique précédente, on fera un triangle iſoſcele de la longueur du diametre AE pour baſe, & des deux longueurs du cordeau AP, EP pour côtés, ſur leſquels on fera aux points A & E, deux perpendiculaires qui ſe rencontreront au point D : la ligne PD ſera le diametre de la ſphere qu'on cherche. Cela ſuppoſé pour décrire un cercle majeur par les deux points donnés A & B) *Fig.* 173) il faut tracer à part ſur une ſurface plane un quart de cercle (*Fig.* 174) ou ce qui eſt la même choſe un triangle rectangle iſoſcele, dont les jambes *a c*, *p c* ſoient égales au rayon de la ſphere, l'hypotenuſe *a p* ſera la corde d'un arc de 90 degrés qui ſervira à trouver le pole du cercle propoſé. *Fig.* 175. *Fig.* 174.

Des points A & B comme centres, & la corde AP pour rayon, on fera une interſection de deux arcs de cercle qui ſe couperont en P où ſera le pole, duquel on décrira le cercle majeur EABF, qui eſt repréſenté ici en perſpective, c'eſt-à-dire qu'on y fixera le cordeau, une perche, ou un ſimbleau, pour tracer le cercle dans la ſurface concave de la ſphere à peu près comme on ſe ſert du centre ſur une ſurface plane. *Fig.* 173.

J'ai dit dans la ſurface concave, parce qu'il eſt viſible qu'on ne peut pas opérer de même ſur la convexe, ſur laquelle au lieu de ſe ſervir de la corde *a p* (*Fig.* 174) pour rayon des interſections qui donnent le pole ; il faut ſe ſervir de l'arc *a l p* ; c'eſt pourquoi il faut un inſtrument pour y ſuppléer, ou un compas à pointes courbées, ſi la ſphere eſt petite, comme ſont dans l'artillerie les boulets & les bombes ; mais ſi la ſphere eſt grande comme une voute, au lieu d'un cordeau, il faut ſe ſervir d'un aſſemblage de trois pieces de bois *p* H, H *g*, *g a* aſſemblées à angle droit, dont la grande H *g* ſoit égale à la corde *p a*, & les deux autres à la fleche *f l* ; & pour les entretenir en cet état, il faut les lier par des liens ou écharpes IK, *i k*, qui les empêchent de s'ouvrir ou de ſe fermer. *Fig.* 174.

Pour trouver le pole d'un cercle mineur, dont on a trois points donnés (*Fig.* 175) on décrira ſur une ſurface plane par le moyen du triangle APE le cercle AE *d*, puis ayant diviſé l'arc BE en deux également en *m*, on tirera le diametre *m t* perpendiculairement à BE, ſur le milieu C duquel on mene- *Fig.* 175.

ra la perpendiculaire X *c x*, puis du point *m* ou *t* pour centre ;
Fig. 175. & de l'intervalle du demi-diametre de la ſphere pour rayon, on décrira des arcs de cercle qui couperont la perpendiculaire X *x* au point G qui repréſente le centre de la ſphere, duquel & avec le même rayon on décrira des arcs qui couperont la ligne X *x* aux points *x* & X, où ſeront les poles du cercle mineur ABE *d* que l'on cherche ; ainſi les diſtances X *m* ou *x t*, ſeront les rayons des interſections des arcs de cercle qu'on fera des points B & E, comme centres pour avoir le point d'un des poles, comme nous l'avons dit ſur la Figure 173.

Ou bien méchaniquement & avec une exactitude ſuffiſante pour la pratique, on enfilera trois cordeaux égaux dans un anneau (*Fig.* 173) en S pour la ſurface convexe, & en P pour la concave, qui ſeront d'une longueur proportionnée à peu près à celle qu'on juge à vûe d'œil, & un peu plus longue ; on les nouera enſemble par un bout, & on attachera les autres aux points donnés, puis faiſant couler l'anneau en rapprochant de la ſurface de la ſphere les trois cordeaux également tendus, on parviendra exactement au pole, où l'on attachera un des cordeaux pour tracer le cercle demandé ſur la ſurface de la ſphere. Cette méthode a cela de commode qu'elle peut ſervir ſur la ſurface convexe, en éloignant l'anneau au-deſſus du pole autant qu'on le voudra, pour éviter le frottement du cordeau qui ſert de ſimbleau, lequel doit être tangent à la ſphere, pour n'être point plié ſur la ſurface convexe, où ce pli, ou plutôt cette courbure cauſeroit des ondulations par le frottement.

Mais ſi on avoit un cercle majeur à décrire, comme les ſocles ou les côtés d'une couverture de dôme, tels qu'on en voit à celui des Invalides ; on ne pourroit aſſez élever le point S pour éviter le frottement, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir du niveau ou du plomb ; ſi les cherches doivent être de niveau comme les ſocles, ou à plomb comme les côtes, ou ſi de tels ornemens étoient inclinés, comme des entrelas de cercles, il faudroit avoir au pole une perche perpendiculaire à la ſurface convexe par la pratique dont nous parlons qui ſerviroit à alligner le cordeau, afin qu'en le courbant, il ne ſe détournât point de ſa direction ; parce que pour peu qu'il ſe courbe à droite ou à gauche, il ſe racourcira & donnera de faux points du cercle propoſé.

DEMONSTRATION.

Premierement, il eſt clair qu'ayant trouvé la corde de 90 degrés de la circonférence de la ſphere, & l'ayant appliquée aux deux points donnés, la rencontre de deux de ces cordes égales eſt le pole qui eſt toujours éloigné de 90 degrés d'un grand cercle, par la ſeizieme propoſition des ſphériques de THEODOSE. *Fig.* 175.

Secondement, pour trouver le diametre d'un cercle dont on a trois points donnés, nous avons élevé des perpendiculaires ſur AB & AE pour avoir la poſition de ce diametre, parce que (par la trente-unieme Prop. d'EUCL. *l.* 3) l'angle droit eſt toujours dans le demi-cercle; & puiſque les lignes B*d* & E*d* ſont bien poſées, leur rencontre ſe terminera au point de la circonférence du cercle diamétralement oppoſé au point A: la même conſtruction eſt encore plus intelligible dans le Corollaire pour trouver le diametre de la ſphere.

Troiſiemement il eſt démontré dans la treizieme propoſition des ſphériques de THEODOSE, que ſi dans la ſphere un cercle en coupe un autre en deux également & perpendiculairement, les poles de celui qui eſt coupé, ſont dans la circonférence de celui qui le coupe & à diſtances égales; or il eſt viſible que le cercle mineur ABE*d* eſt coupé en deux également par ſon diametre *mt*, lequel eſt la corde d'un cercle majeur, dont le diametre X*x* eſt élevé perpendiculairement ſur cette corde; par conſéquent les points X & *x* ſont les poles du cercle ABE*d*, & les lignes X*m*, X*t*, *xm* & *xt*, les diſtances, ſont les tangentes de ces poles au cercle; car quoique les deux cercles majeur & mineur ſoient dans cette Figure ſur un même plan, il faut les concevoir à angle droit l'un à l'autre; de ſorte que ſuppoſant le mineur dans le plan du papier, le majeur ſeroit élevé en l'air perpendiculairement en tournant ſur la corde *mt*, qui doit êtr immobile.

USAGE.

Ce Problême eſt néceſſaire aux Peintres, aux Sculpteurs en ſtuc ou en plâtre, & aux marbriers qui ont des ornemens circulaires à tracer dans la ſurface concave d'une voute ſphérique, ou ſur la ſurface convexe, comme par exemple des ſocles, des

côtes d'arcs doubleaux, des bordures de bas relief, ou des ouvertures feintes, ou des entrelas circulaires.

A l'égard des ouvertures vrayes ou feintes faites après coup dans une voute ſphérique ; je dirai en paſſant que VIVIANI *a trouvé le moyen de percer une voute hémiſphérique en quatre endroits pour des fenêtres, en ſorte que le reſte de la voute ſoit géométriquement quarrable.*

Quoique cette propoſition n'ait aucun rapport à notre ſujet qui n'a pour but que la diviſion des ſurfaces & non pas leur étendue ; je crois qu'on ne ſera pas fâché de cette petite digreſſion : la conſtruction de ce Problême conſiſte à diviſer la baſe de l'hémiſphere par deux diametres à angles droits, ſur leſquels on fait quatre petits demi-cercles pour baſes de quatre moitiés de cylindres droits qui percent l'hémiſphere ; le reſtant des quatre ouvertures qu'ils font, eſt quarrable, c'eſt-à-dire, qu'on en peut trouver la ſurface géométriquement. On a vû par nos principes au Théorême VII. que la courbe que font chacun de ces demi-cylindres étoit une ellipſimbre ; il ne s'agiroit plus que de quarrer l'eſpace enfermé dans ces ellipſimbres pour avoir la ſurface totale de l'hémiſphere ; mais quoique la Géométrie ne ſoit pas parvenue à ce degré de perfection, elle nous fournit pour la pratique des moyens ſuffiſamment exacts.

PROBLEME XXX.

Par un point donné ſur la ſurface d'un cylindre, tracer un cercle.

Si le cylindre eſt droit, & que la baſe ſoit donnée, il n'y a point de difficulté ; il n'y a qu'à ſuivre le contour de la baſe à diſtance égale priſe toujours parallelement à l'axe, ſoit avec une regle ou un cordeau, ou en petit, avec cet inſtrument de Menuiſier qu'on appelle *Truſquin* ; mais ſi l'on n'a pas la baſe, ou parce qu'elle eſt oblique ou rompue, ou embarraſſée par quelque corps qui la couvre, comme ſi l'on vouloit tracer un ornement circulaire, tel qu'une baſe ou une aſtragale à un pilier Gothique en place ; il faut commencer par mener pluſieurs paralleles à l'axe, & tracer le cercle, s'il eſt queſtion d'un cylindre ſcalene, comme une ellipſe ſur un cylindre droit, ainſi que nous le dirons ci-après ; nous parlerons ſeulement ici du cylindre droit.

Premiere maniere de tracer des paralleles à l'axe du cylindre, *la baſe étant donnée.*

Soit une baſe droite ou oblique ABDE; ayant applani cette baſe, on y menera deux lignes *g* G, *f* F paralleles entr'elles, qu'on diviſera en deux également en M & *m*, par où ſi l'on tire la ligne BE, ſon milieu C ſera l'extrêmité de l'axe du cylindre: on en fera autant ſur la baſe oppoſée pour trouver l'autre extrêmité du même axe; enſuite ayant poſé une regle HI à volonté ſur cette baſe, pourvû qu'elle paſſe par le pied C de l'axe, on tracera la ligne AD: poſant auſſi une autre regle KL ſur la baſe oppoſée, on la fera tourner ſur l'extrêmité de l'axe, juſqu'à ce que regardant l'une par l'autre, leur direction ſoit parallele; en ſorte que celle du côté où l'on regarde couvre ſi bien l'autre, que les deux lignes ſupérieures ou inférieures de ces regles ſe confondent en une, ce qu'une perſonne ſeule peut faire en arrêtant une des regles dans ſa poſition, & tenant l'autre pour la tourner comme il convient, pour faire en ſorte que le rayon viſuel raſe les deux regles, de maniere qu'elles ne paroiſſent point ſe croiſer, ce qu'on appelle *bornoyer*, parce que l'on ferme ordinairement un œil, & que nous avons exprimé par des lignes qui partent d'un œil *œ*, à la Fig. 177, en cette ſituation ſi on trace des diametres ſur les baſes, la ligne menée à la ſurface du cylindre par l'extrêmité de ces diametres ainſi correſpondans, eſt une parallele à l'axe du cylindre, par exemple D *d*. *Fig. 177.*

Lorſque les baſes ſont embarraſſées comme à un pilier en place, qui eſt engagé par le haut & par le bas, on eſt obligé d'avoir recours à des manieres méchaniques pour tracer des paralleles à l'axe.

La premiere & la plus ſimple, eſt celle de ſe ſervir du plomb pour les cylindres poſés bien verticalement comme des piliers ronds; & s'ils ſont inclinés, c'eſt d'appliquer de *champ* une regle fort large OP, & dont les côtés oppoſés ſont bien paralleles le long du pilier, & la tourner de maniere qu'en regardant par deſſus cette regle, elle ne croiſe point la ligne tangente du pilier; en ſorte que les rayons viſuels *œ* O, *œ* P raſent l'un & l'autre, la ſurface du pilier; la ligne tracée ſur la même ſurface cylindrique au long du côté de la regle qui appuye ſur le cylindre, eſt une parallele à l'axe.

La ſeconde maniere, qui eſt encore méchanique, eſt de tra-

Fig. 176. cer avec un compas d'un point C pour centre, & d'une ouverture prise à volonté une ligne courbe *d*E*e*, sur la surface du cylindre, comme l'on décrit un cercle sur une surface plane; ensuite d'une ouverture de compas un peu plus grande que la premiere, mais moindre que la longueur de l'arc de cylindre, dont elle est la corde developpée, c'est-à-dire rectifiée, on décrira sur du carton un demi-cercle, ou seulement un secteur de cercle qui en approche, dont on posera le centre en C, & l'ayant appliqué & plié sur la surface du cylindre, on y en tracera le contour qui coupera celui de la courbe précédente en deux points X & *x*, par lesquels si l'on tire une ligne droite, on aura la parallele à l'axe qu'on cherche, à laquelle il sera facile d'en tirer d'autres par des points donnés s'il le faut. On peut faire la même chose avec un cordeau, mais moins exactement; cela supposé comme une préparation nécessaire pour tracer les cercles & les ellipses à la surface du cylindre.

Si le cylindre est droit, il ne s'agit que de faire des sections perpendiculaires aux lignes paralleles à l'axe : ainsi on prendra à volonté les points *x* & X pour centres, & de tel intervalle qu'on voudra pour rayon, on fera des intersections d'arc en H & en K, & plus loin en *h* & en *k*, ou plus près en *l* & *i*, & l'on appliquera sur ces points *k*K, *l i*, H *h* une regle pliante, avec laquelle on tracera le cercle autour du cylindre s'il est droit; car s'il est scalene, la section perpendiculaire à l'axe sera une ellipse, auquel cas pour décrire un cercle par le point donné, il faut mener par ce point un contour parallelele à la base, ou faisant un angle sous-contraire.

Fig. 180. Pour tracer des lignes paralleles à l'axe dans la surface concave d'une portion de cylindre, comme dans une voute, (*Fig.* 180) au lieu de prendre deux paralleles des deux côtés du centre, on les prendra toutes deux du même côté, comme *a f*, *b e*; on les divisera chacune par le milieu en M & *m*, & on menera par ces milieux la ligne *d*C qui sera un diametre; mais parce que le cylindre n'est pas complet, ce diametre ne sera terminé que d'un côté en *d*, & ne l'étant pas au-delà de C, on ne pourra en avoir le milieu C, qu'en répetant la même opération par deux autres lignes *i h*, K*g* qui donneront un second diametre E *e* qui coupera le premier en C, centre de la base où passera l'axe du cylindre. On en fera autant à la base oppose, & l'on aura l'autre extrêmité de cet axe, auquel il ne sera pas difficile de mener

des paralleles, en tendant un cordeau d'un bout de l'axe à l'autre, & bornoyant par cette ligne deux points dans la ſurface concave; de ſorte que cet axe ſoit dans le même plan, & que le cordeau les couvre à l'œil qui doit être un peu éloigné du cordeau, du côté oppoſé aux points que l'on veut marquer ſur la ſurface concave, pour y tracer une parallele à l'axe du cylindre.

DEMONSTRATION.

La premiere maniere de tracer une parallele à l'axe du cylindre eſt fondée ſur ce que les ordonnées à un diametre ſont coupées en deux également par ce diametre; lequel étant auſſi diviſé en deux également, donne le centre de la baſe du cylindre, ſoit qu'elle ſoit circulaire ou elliptique; or quelle qu'elle ſoit, l'axe paſſe par ſon centre, & les deux regles HI, KL que l'on dirige par le rayon viſuel dans le même plan paſſant par l'axe, donnent auſſi les côtés du parallelogramme par l'axe, dont les côtés oppoſés ſont paralleles; donc D*d* eſt une ligne parallele à l'axe; *ce qu'il falloit faire.* *Fig.* 177.

La ſeconde maniere de tracer une parallele à l'axe du cylindre par le moyen d'une regle d'une certaine largeur, quoique méchanique, eſt exacte dans ſon principe; car puiſqu'elle eſt dirigée par les rayons viſuels dans un plan tangent au cylindre, ce plan ne le touchera que ſuivant une ligne parallele à l'axe, & le plan de la regle étant de largeur égale d'un bout à l'autre, fera un parallelogramme, dont un côté ſera ſur le plan tangent, & l'autre ſur le cylindre, toujours également éloigné de la ligne d'attouchement; donc il lui ſera parallele, & par conſéquent à l'axe.

La troiſieme maniere, quoique méchanique, eſt auſſi exacte dans ſon principe; on trace ſur le cylindre deux courbes à double courbure *d*E*e*, *m*MB de différente nature, qui ne peuvent ſe rencontrer qu'en quatre points; ſçavoir, deux de chaque côté en X*x* d'une ſection par l'axe AG; celle de ces courbes qui eſt tracée avec le compas, a tous ſes diametres paſſans par le centre C, courbes de courbures inégales, à la réſerve de *d e* qui eſt droit, & de contour inégalement long, qui ont cependant des ſous-tendantes toujours égales, leſquelles ſont les lignes droites qu'on imagine paſſer par les deux points du compas; & au contraire celle qui eſt tracée avec un cercle *Fig.* 176.

Pl. 16. Fig. 176. plié, a tous ſes diametres de contour également long, & toutes les ſous-tendantes inégales. Chacune de ces courbes a un diametre droit qui leur eſt commun ſur le côté AB, & un circulaire qui lui eſt perpendiculaire; ſçavoir, CE dans la premiere, & CM pour la ſeconde; tous les autres ſont elliptiques, dont la courbure ſe redreſſe à meſure qu'ils approchent de AB; de ſorte qu'étant tous inégaux de chaque côté, ils ne peuvent aboutir au même point que lorſqu'ils approchent également de ce diametre droit, qui eſt le côté du cylindre, comme en X & *x*, donc la ligne X *x* eſt parallele au côté, & par conſéquent à l'axe; *ce qu'il fallloit faire.*

Quant à la maniere de tracer le cercle ſur la ſurface du cylindre, il eſt clair que l'on ſuppoſe que le cylindre ſoit droit, parce que les points K *i*, *k* H étant chacun également éloignés des points *x* X, ſont dans un même plan perpendiculaire au côté *x* X du cylindre, par conſéquent à ſon axe, auquel ce côté eſt eſſentiellement parallele.

D'où il réſulte une ſection parallele à la baſe, c'eſt-à-dire, un cercle.

Mais auſſi il eſt clair que ſi le cylindre étoit ſcalene, cette ſection perpendiculaire au côté ſeroit une ellipſe qui ne ſeroit point parallele à la baſe; ainſi pour décrire un cercle à la ſurface d'un cylindre ſcalene, il faut en avoir la baſe, tirer des paralleles à l'axe ſur la ſurface, c'eſt-à-dire pluſieurs côtés, & porter ſur chacun de ces côtés la même diſtance du point donné au contour de la baſe, pour avoir autant de points que l'on a de côtés; mais alors on ne peut plus ſe ſervir de la regle pliante poſée de plat pour tracer le cercle, parce que la direction de ſon pli ſe tourne perpendiculairement au côté du cylindre, au lieu que celle du contour du cercle le coupe obliquement d'un angle égal à celui que l'axe fait avec le plan de la baſe; mais on peut s'en ſervir en la poſant de *chan*, c'eſt-à-dire, ſur ſon épaiſſeur appliquée ſur ces points trouvés, parce que l'ellipſe eſt une courbe plane, & qu'une regle d'une largeur beaucoup plus grande que ſon épaiſſeur étant pliée, ſe dirige facilement ſur un plan; il n'en ſeroit pas de même s'il s'agiſſoit d'une courbe à double courbure, il faudroit alors que l'épaiſſeur fut égale à la largeur, afin qu'elle ne fit pas plus de réſiſtance à ſe plier d'un côté que de l'autre.

Enfin la derniere opération pour tirer des paralleles à l'axe dans

dans une ſurface concave de portion de cylindre, eſt la même que la premiere redoublée, parce que le centre de la ſection étant dans chaque diametre, il ſera dans le point de concours des deux où ils ſe croiſent.

USAGE.

Ce Problême eſt un des fondamentaux de la conſtruction des voutes cylindriques, parce qu'il ſert à trouver l'arc droit des berceaux circulaires ou elliptiques, ou pour le ceintre entier, ou pour une petite portion, telle qu'eſt un vouſſoir, pour y poſer la *cerche*, c'eſt-à-dire le modele de la courbe, lequel doit être préſenté perpendiculairement à une ligne parallele à l'axe; car pour peu que cette ligne lui fût inclinée, le modele de la courbe circulaire ou elliptique marqueroit une concavité ou une convéxité, laquelle étant continuée ſuivant la direction d'une ligne qui croiſeroit la direction de l'axe, donneroit une ſurface différente de celle qu'on ſe propoſe, comme on peut l'appercevoir par la différence de la ſection du plan qui paſſeroit par cette courbe.

Ce Problême peut encore ſervir à tracer ſur une doële de berceau des ornemens de Peinture ou de ſtuc, comme des arcs-doubleaux.

La maniere de faire des paralleles à l'axe, peut être employée au même uſage, par exemple, à diriger une corniche dans un berceau rampant, dont la régularité de l'impoſte ſeroit douteuſe; ce qu'on a ſouvent lieu d'examiner à cauſe du peu d'exactitude des Ouvriers dans les voutes même les plus ſimples.

Enfin ce Problême eſt néceſſaire pour la conſtruction de ceux qui ſuivent.

PROBLEME XXXI.

Par un point donné à la ſurface d'un cone, faire paſſer un cercle.

Premier cas. Lorſque le cone eſt droit, & que le ſommet eſt donné; il ne s'agit que de fixer un cordeau ou une regle au ſommet, & de ce point, comme pole, décrire un cercle, en tournant ſur la ſurface concave ou convexe, cela eſt très-ſimple.

2°. Mais ſi le ſommet n'eſt pas donné comme dans un cone tronqué, il faut tirer ſur la ſurface du cone deux lignes droites, c'eſt-à-dire deux côtés, leſquels étant prolongés, ſe rencontreront au ſommet du cone.

Pour tirer ces côtés, il ſuffit d'appliquer une regle bien droite ſur la ſurface du cône, en ſorte qu'elle ne laiſſe point de jour entr'elle & cette ſurface. Si cependant le cone tronqué étoit d'une grande circonférence, on pourroit s'y tromper, parce que la ſurface étant d'une convéxité peu ſenſible, vers la baſe ſurtout, on pourroit biaiſer la regle ſans s'en appercevoir; c'eſt pourquoi ſi l'on veut opérer exactement, il faut tirer des paralleles ſur les plans des baſes oppoſées, que nous ſuppoſons premierement paralleles entr'elles, & faire pour cette eſpece de cone tronqué la même opération que nous avons faite à la Figure 177, pour trouver le côté du cylindre; alors on ſera ſûr que la rencontre des côtés du cone trouvés par ce moyen, en donnera exactement le ſommet, ſi l'on veut s'en ſervir, mais on peut s'en paſſer. Car ayant trouvé deux côtés du triangle par l'axe du cone qui diviſe les deux baſes en deux parties égales, on ſubdiviſera chacune de ces parties en un même nombre de parties égales, & l'on tirera des lignes droites des unes aux autres, à la baſe ſupérieure & inférieure, comme l'on voit à la Figure 186; la diſtance du point donné à la ſurface du cone priſe de l'une des baſes, & portée ſur chacune de ces lignes ou côtés du cone, donnera des points par leſquels on menera à la main une ligne courbe qui ſera le cercle demandé.

Il faut remarquer ici qu'on ne peut pas ſe ſervir pour le tracer d'une regle pliante poſée de plat, parce que la ſurface de la largeur s'appliquant perpendiculairement au côté du cone, la direction de ſon pli donneroit une courbe qui s'écarteroit des points marqués, pouvant être une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole, ſuivant l'ouverture de l'angle du ſommet du triangle par l'axe; ce qui eſt clair, mais on peut s'en ſervir en la poſant de *cant* ou de champ; on ſe ſert encore de la regle d'une autre maniere, on bornoye par ſon côté deux ou trois points, ſuivant leſquels on la tient appuyée d'un côté, & en l'air par l'autre, puis fermant un œil, on ſuit avec le crayon l'allignement de cette regle, ſans changer l'œil de place.

Si les baſes oppoſées du cone tronqué ne ſont pas paralleles, il eſt clair que l'une étant circulaire, l'autre ſera elliptique, & que c'eſt de la circulaire qu'il faut prendre les meſures de la diſtance du point donné.

Mais ſuppoſant que la baſe circulaire eſt ſeule plane, & que la partie tronquée n'eſt pas applanie, on peut encore tracer les

côtés sur la surface du cone en prenant des points à son contour équidistans d'un troisiéme au milieu des deux, & de ces points, comme centres, faire des intersections d'arcs, comme si on élevoit une perpendiculaire sur une surface plane, & sur les côtés ainsi trouvés, tracer le cercle par le point demandé, comme nous venons de le dire.

Troisieme cas. Lorsque le cone est scalene, quand même son sommet seroit donné, on ne peut plus s'en servir comme d'un pole pour tracer le cercle par le point donné, ni de la distance du point donné à la surface mesurée sur un côté jusqu'à la circonférence de la base, parce que le contour du cercle parallele à la base, est inégalement distant de celui de la base, quoique les plans de l'un & de l'autre soient supposés paralleles, & par conséquent équidistans.

Il faut alors (*Fig.* 179) abaisser une perpendiculaire SP du sommet S du cone scalene donné ASB sur le plan de sa base AB prolongé; ce qui est une opération familiere à ceux qui sçavent bien faire des Cadrans pour trouver le pied du stile, & qui est un Problême du XI Livre d'EUCLIDE, Prop. XI. Ceux qui ne sont pas Géometres, le font par le moyen d'une équerre qu'ils posent d'un côté sur le plan, & appuyent l'autre au sommet S, & en la tournant sur le côté SP marquent le point P, par lequel si l'on tire une ligne par le centre C, on aura le triangle rectangle APS, & par conséquent l'obliquangle ABS, qui est la plus oblique de toutes les sections par l'axe du cone, c'est-à-dire qui en marque le plus long côté AS, & le plus petit BS. *Fig.* 179.

Ayant décrit ce triangle sur une surface plane, & le demi-cercle A 2 B, moitié de la base du cone, on le divisera en autant de parties qu'on voudra avoir de points du cercle demandé, comme ici en quatre, aux points 1, 2, 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires sur le diametre AB, qui le couperont aux points E, C, G, desquels on tirera des lignes au sommet S; puis par le point donné D ou *d*, s'il est dans ce triangle ASB, on tirera une ligne D *d* parallele à AB; & s'il n'y est pas, nous verrons par la suite de l'opération ce qu'il faut faire pour tirer cette parallele.

Du point E pour centre & pour rayon ES, on fera un arc S *h* qui coupera AB prolongée en *h*, d'où l'on tirera au point 1 la ligne 1 *h* qui sera le côté du cone passant par le point 1; on

Fig. 168. trouvera de même les côtés 2 *k*, & 3 *l* qui aboutiront en *b*, *k*, *l*, à différens points donnés sur AB prolongée par la transposition des lignes CS & GS.

Ensuite du point E pour centre & pour rayon E*e*, où ES coupe D*d*, on fera un arc *ef*, qui donnera sur AB le point *f*; la ligne *fx* menée parallelement à E 1, donnera sur le côté 1 *h* le point *x* que l'on cherche, qui est un de ceux de la circonférence du cercle demandé, pris sur le côté 1 *h*, dont la projection est ES dans le triangle par l'axe ASB; le rayon C*m* donnera un point auprès de G, d'où tirant G*y* parallele à C 2, on aura le point *y*: ainsi des autres.

Si le point donné D n'est pas sur les côtés du triangle par l'axe ASB, mais qu'il soit par exemple en *g*, ayant tiré par le sommet du cone le côté S*g*, il coupera la base au point 3, d'où ayant trouvé le côté 3 *l*, on portera sur ce côté la distance donnée 3 z égale à 3 G pris sur la surface du cone; puis de z tirant z*b* perpendiculaire sur AB prolongé, la distance G*b* donnera sur GS le point *g* par où doit passer la parallelle D *d*, pour trouver les points de la circonférence du cercle demandé, comme nous venons de le dire.

Il n'est pas nécessaire de parler ici du cercle de la section sous-contraire, parce qu'il est aisé d'y suppléer, en faisant attention qu'au lieu d'opérer sur la ligne D *d* parallele à la ligne AB, il faut tracer une autre ligne NB, ou sur une de ses paralleles qui fasse avec SA un angle égal à l'angle SBA.

DEMONSTRATION.

Il est clair par la nature du cone que l'on ne peut trouver de lignes droite à la surface, que celles qui sont menées du sommet à la circonférence de sa base que toutes ces lignes sont égales dans le cone droit, & inégales dans le scalene; que lorsqu'elles sont égales, qui en a une les a toutes; mais que lorsqu'elles sont inégales, on ne peut les trouver par la projection sur le triangle par l'axe ASB, comme on a trouvé ci-devant les côtés du cylindre sur le parallelogramme par l'axe, parce que les lignes ES, CS, GS, sont les côtés d'un triangle rectangle, dont le côté du cone qui leur répond est l'hypotenuse. Or il est clair qu'en transportant, par exemple, ES en E*h*, le côté E 1 restant immobile à angle droit sur AB, la ligne 1 *h*

représente exactement le côté du cone, & 1 x la distance de la base à une section parallele faite par un plan perpendiculaire au triangle par l'axe ASB, & parallele à la base. Pl. 16. Fig. 179.

Que les angles SE 1, SC 2, SG 3 soient droits, c'est une suite de la construction. parce que le plan du triangle par l'axe ASB passe par la ligne SP qui a été faite perpendiculaire au plan de la base AB; c'est-à-dire du demi-cercle A 2 B; par conséquent toutes les lignes E 1, C 2, G 3, perpendiculaires à la commune section AP de ces deux plans, sont perpendiculaires à toutes celles qui sont tirées dans le plan ASP, comme SE, SC, SG, &c.

Nous avons supposé dans ce Problême que le cone étoit droit, ou incliné sur une base circulaire; mais si l'on n'avoit qu'une base elliptique, & qu'on voulut tracer un cercle sur le cone, il faudroit chercher l'angle de l'inclinaison d'un plan coupant celui de la base, dont la section fût un cercle, pour avoir le profil du triangle par l'axe du cone elliptique. Comme cette proposition n'a été donnée par aucun des Auteurs des Traités des sections coniques que je connoisse, & que j'y ai trouvé de grandes difficultés, j'ai eu recours au célebre M. BERNOULLI, un des premiers Mathématiciens de notre siecle, qui a bien voulu m'en donner la solution; il est convenu „ que ce Problême étoit „ du nombre de ceux qui, quand on ne s'y prend pas bien, en„ gagent dans un calcul pénible, & conduisent à des équations „ de quatre dimensions, & que sa solution étoit une chose nou„ velle.

Ce grand homme * qui a le bonheur d'avoir deux fils, nommé Daniel & Jean, qui marchent à grand pas sur ses traces dans les hautes Sciences, comme il a paru par plusieurs Ouvrages de Mathématique de leur façon, ayant parlé au second (qui a remporté deux prix de l'Académie des Sciences de Paris) de ma question il l'a résolu d'une autre maniere, dont il a bien voulu me faire part. On la verra à la suite de celle de M. son pere, que je mets ici mot à mot, persuadé que ce qui vient des grands hommes doit être conservé sans altération; dans cette idée j'aurois copié en entier la lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, s'il n'y avoit répandu des expressions si obligeantes sur mon Ouvrage, que je ne pourrois les répeter sans pécher contre la modestie. Il n'en falloit pas moins pour me faire supprimer les marques de sa politesse & celles de la bienveillance dont

* Il est mort depuis la premiere Edition de ce Traité.

il m'honore, à laquelle je ſuis extrêmement ſenſible.

PROBLEME XXXII.

Etant donné un cone ASB droit, ſur une baſe elliptique ADB, dont AB eſt le petit axe, dont le plan doit être conçû perpendiculaire au plan du triangle iſoſcele ASB; on demande la poſition d'un plan incliné ſur l'ellipſe, dont la ſection dans le cone ſoit un cercle.

Fig. ✠ près de la *Fig.* 182. 1°. J'appellerai le *grand côté* du cone elliptique la droite SD, (ou S*d*) tirée du ſommet S à l'extrêmité D du grand demi axe de l'ellipſe, dont le plan doit être conſidéré comme perpendiculaire au plan du triangle iſoſcele ASB.

DE'FINITIONS.

2°. *Le petit côté* du cone ſera SA tirée du ſommet S à l'extrêmité A du petit axe de l'ellipſe.

Soient nommées

La hauteur ou l'axe du cone SC $= a$
Le petit demi-axe de l'ellipſe CA ou CB $= b$
Le grand demi-axe de l'ellipſe CD $= c$

Le grand côté du cone SD $= \sqrt{cc+aa} = n$, la différence du quarré de CD, & du quarré de CA, c'eſt-à-dire, $cc - bb = hh$, & partant $\sqrt{cc-bb} = h$, pour faire une ligne droite égale à h on a $\sqrt{cc-bb}$, il n'y a qu'à décrire un demi-cercle ſur CD, & y inſcrire la corde C*a* égale à CA, tirant enſuite l'autre corde D*a*, on aura D$a = \sqrt{cc-bb} = h$: ou bien dans l'angle droit ACD, tirés une hypotenuſe AF égale à CD, on aura CF$= \sqrt{cc-bb} = h$: notez que le point F ſera un des foyers de l'ellipſe.

Solution. Le plan de l'ellipſe ADB étant perpendiculaire au plan du triangle ASB, je cherche la poſition d'une ligne droite *y*Y dans le triangle iſoſcele ASB, laquelle paſſe par le centre C de l'ellipſe, & ſur laquelle ſi on dreſſe un plan auſſi perpendiculaire au plan ASB, je veux que ce plan dreſſé faſſe dans le cone par ſa ſection un cercle, dont le diametre ſera *y*Y, & CD une ordonnée commune à l'ellipſe & au cercle, parce que

le plan de l'ellipſe & le plan du cercle ſe coupent dans la droite CD : il faudra donc, par la propriété du cercle, que CD ſoit la moyenne proportionelle entre les deux ſegmens du diametre Cy & CY, & partant que le rectangle $Cy \times CY$ de ces deux ſegmens ſoit égal au quarré de l'ordonnée CD, & c'eſt ce qu'il faut exécuter. *Fig.* ✠ près de la *Fig.* 182.

Ayant prolongé Yy juſqu'à SE perpendiculaire à SC, ſoit $SE = x$: on aura, à cauſe des triangles ſemblables SyE, & AyC, SE : AC : : Ey : yC, & *componendo* SE + AC : AC : : Ey + yC ou EC : yC, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: \sqrt{xx+aa} : yC = b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b}$. Pareillement, à cauſe des triangles ſemblables SYE, BYC, on aura SE : BC : : EY : CY, & *dividendo* SE — BC : BC : : EY — CY, ou EC : CY, c'eſt-à-dire, $x - b : b : : \sqrt{xx+aa} : CY = b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b}$; or le rectangle $yC \times CY$ devant être égal au quarré de CD, j'aurai d'abord cette égalité $b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b} \times b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b}$ ou $\frac{bbxx+bbaa}{xx-bb} = cc$, d'où on trouve par la réduction $xx = \frac{bbcc+bbaa}{cc-bb} = bb\frac{mm}{hh}$, par conſéquent $x = b\frac{m}{h}$; *ce qu'il falloit trouver.*

Conſtruction Géométrique.

Faites cette analogie : *Comme h ou* $\sqrt{CD^2 - AC^2}$ *ou CF eſt à b ou AC, ainſi m ou SD eſt à une quatrieme* ; je dis que ſi vous prenez SE égale à cette quatrieme, & que vous tiriez par le centre C la droite EY, la partie yY interceptée entre les deux petits côtés SA & SB, prolongée, fera la poſition & la grandeur du diametre cherché ; ſur lequel ſi on dreſſe un plan perpendiculaire au triangle ASB, la ſection de ce plan fera dans le cone un cercle, donc auſſi tous les autres plans paralleles à celui-ci, feront par leurs ſections tout autant d'autres cercles.

SCHOLIE.

Que ſi vous aimez mieux trouver trigonométriquement l'angle de l'inclinaiſon de la ſection ; ſçavoir, l'angle ACy, qui eſt

égal à l'angle E, vous n'avez qu'à faire cette analogie, comme ES eſt à SC, ainſi le ſinus total eſt à la tangente de l'angle cherché AC y.

COROLLAIRE.

On en trouve maintenant tout ce que l'on veut, par exemple, C x, ou la diſtance du centre de l'ellipſe au centre du cercle; car $y\,Y = y\,C + CY = b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x+b} + b\frac{\sqrt{xx+aa}}{x-b} =$ (en ſubſtituant la valeur de x) $\frac{cn}{m+h} + \frac{cn}{m-h} = \frac{2mcn}{mm-hh} =$ en ſubſtituant la valeur de $mm-hh$ qui eſt $= aa+bb = nn$) $\frac{2mcn}{nn} = \frac{2mc}{n}$, donc la moitié $\frac{mc}{n} = Y\,x$ ou $y\,x$, & en retranchant C y, ou $\frac{cn}{m+h}$, il reſte C $x = \frac{mc}{n} - \frac{cn}{m+h} = \frac{mmc-nnc+hmc}{mn-hn} =$ (en ſubſtituant pour $mm-nn$ ſa valeur $cc-bb$, ou hh) $\frac{hhc+hmc}{mn+hn} = \frac{hc}{n}$: ainſi C x ſera la quatrieme proportionelle de n, h & c, c'eſt-à-dire, de SA $\sqrt{CD^2-AC^2}$ & CD, ou de SA, CF & CD.

Ce que vous trouvez, (c'eſt toujours M. BERNOULLI qui parle en réponſe) que *le quarré de la moitié du diametre* y Y *qu'on cherche, eſt égal au quarré de la moitié du grand axe* CD, *de la baſe, plus au quarré de* C x; n'eſt autre choſe qu'une application d'une propoſition du II. Livre d'EUCLIDE, qui eſt qu'une ligne droite comme y Y étant coupée également en x, & inégalement en C, le quarré de la moitié $y\,x$ eſt égal au rectangle des ſegmens inégaux y C × CY plus au quarré de l'interceptée C x. Car, comme j'ai remarqué ci-deſſus, le rectangle y C × CY doit être égal au quarré de CD; donc on aura auſſi $Y\,x^2$ ou $y\,x^2 = CD^2 + c\,x^2$, comme vous avez trouvé; ceci eſt encore confirmé par ce que je viens de démontrer en dernier lieu, où j'ai trouvé $Y\,x = \frac{mc}{n}$, C $x = \frac{hc}{n}$ & CD $= c$; il faut donc faire voir qu'effectivement $\frac{mmcc}{nn}$ ſera $= cc + \frac{hhcc}{nn} = \frac{nncc+hhcc}{nn}$; or il eſt clair que $mm - nn$ étant égal $cc -$

bb

$bb = hh$, on aura $nn + hh = mm$, donc $\frac{nncc + hhcc}{nn}$ devient $= \frac{mmcc}{nn}$; ainſi on a $Yx^2 = \frac{mmcc}{nn}$, & auſſi $CD^2 + Cx^2 = \frac{mmcc}{nn}$, par conſéquent $Yx^2 = CD^2 + Cx^2$.

Vous dites, Monſieur, que vous ne connoiſſez pas CX, parce que l'angle ASX vous eſt inconnu: voilà CX trouvé, puiſqu'il eſt égal $\frac{hc}{n}$ indépendamment de l'angle ASX, ſi pourtant par curioſité on veut trouver cet angle, je m'y prendrai en telle maniere.

Dans le triangle ACy, on a trouvé l'angle ACy, l'angle CAy eſt donné, le côté AC eſt auſſi donné: de ces trois choſes données, on trouve Cy A, & le côté Ay, donc dans le triangle xyS, on aura l'angle xyS, & les deux côtés xy & yS, ce qui ſert à trouver l'angle xyS que l'on cherche.

Quant au côté Ay on le trouve immédiatement par la premiere ſimilitude des deux triangles Sy E, Cy A en faiſant comme SE + AC eſt à AC, ainſi Sy + y A, ou SA, eſt à Ay, c'eſt-à-dire, $x + b : b :: n\frac{nb}{x+b} = Ay$, & mettant pour x ſa valeur $\frac{bm}{b}$ on aura $\frac{nb}{x+b}$, ou $Ay = \frac{hn}{m+h}$; faiſant donc comme $m + h$ ou SD + Cd eſt à h ou Cd, ainſi n ou SA eſt à une quatrieme: cette quatrieme ſera celle à laquelle il faut prendre Ay égale, & tirant enſuite par le centre de l'ellipſe C la droite y CY, cette droite ſera encore le diametre du cercle cherché; ce que j'ai voulu remarquer par occaſion.

En ſuppoſant au lieu d'un cone droit, un cone ſcalene ou oblique ſur une baſe elliptique; on réſoudra le Problême par la même méthode, & avec la même facilité.

Autre ſolution du même Problême, par M. Jean BERNOULLI le fils.

Suppoſé que le point y ſoit le point cherché dans la ligne AS, par lequel le plan dont eſt queſtion doit paſſer.

Ayant tiré de ce point la ligne yH perpendiculaire à la baſe AB du triangle ASB, & la ligne yK parallele à la même baſe

qui joigne les deux côtés SA & SB de ce triangle, je nommerai

SA = SB (le petit côté du cone) = d
SD (le grand côté du cone) = e
CD (le demi grand axe de l'ellipſe) = a
AC = CB, le demi petit axe = b
FC (la diſtance du foyer F au centre C de l'ellipſe) = f
Ay (la diſtance de l'extrêmité A du petit axe au point cherché y) = x

Ces dénominations étant faites j'aurai SC (l'axe du cone) = $\sqrt{dd-bb}$, & SA (d) : SC ($\sqrt{dd-bb}$) :: Ay (x) : IC, ainſi IC = yH = $x\sqrt{dd-bb}$, pareillement SA (d) : AC (b) :: Sy ($d-x$) : yI ; on aura yI = IK = HC = $\frac{bd-bx}{d}$; or $\overline{yC}^2 = \overline{yH} + \overline{HC}^2$, donc $yC\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d}$. Pour trouver CY, je fais cette analogie yK = 2yI : CB :: yY : Cy ; *& dividendo*, yK − CB $\left(\frac{bd-2bx}{d}\right)$: CB (b) :: yY − CY = $yC\left(\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d}\right)$: CY ; on trouvera CY = $\frac{\sqrt{xx-2bbx+bb}}{d-2x}$.

Maintenant puiſque le cercle cherché & la baſe du cone ſe coupent dans la ligne CD, celle-ci ſera une corde du cercle ; la ligne yY en ſera une auſſi, & même elle en ſera un diametre, ayant pour appliquée le demi-grand axe CD, par conſéquent le rectangle des ſegmens de ce diametre où $yC \times CY$ ſera égal à $\overline{CD}^2$, c'eſt-à-dire, $\frac{dxx-2bbx+bbd}{d-2x} = aa$, & en retranchant bb de part & d'autre $\frac{dxxx}{d-2x} = aa - bb =$ (par la propriété de l'ellipſe) $\overline{CF}^2 = ff$, donc $xx = -\frac{2ffx}{d} + ff$ & $x = -\frac{ff}{d} + \frac{f}{d}\sqrt{ff+da}$, ou (en ſubſtituant pour $\sqrt{ff+da}$, ſa valeur e) $x = \frac{fe-ff}{d}$; faiſant donc comme d ou SA eſt à f ou

FC, ainſi $e - f$, ou SD — FC, eſt à une quatrieme : cette quatrieme ſera la cherchée.

Les Corollaires qu'on pourroit tirer de cette ſolution, ſont les mêmes que ceux de la précédente.

Pour réduire ces deux ſolutions à la pratique de la regle & du compas, qui eſt la plus commode pour les Artiſtes, on opérera ainſi à la premiere.

Du centre C & CD moitié du grand axe pour rayon, on fera l'arc D *d* qui rencontrera BA prolongé en *d* : ſi l'on tire *d* S, cette ligne repréſentera le grand côté du cone.

Par le foyer F & le point A, extrêmité du petit axe, ayant tiré l'indéfinie FA *e*, on portera ſur cette ligne la longueur du grand côté du cone S *d*, de F en *e*, par où on menera *e g* parallele à AB, qui coupera CS en *g* : par le ſommet S on menera la ligne SE, parallele & égale à *e g*; & enfin par les points E & C on tirera EY qui coupera les côtés SA & SB prolongés en *y* & Y, la partie *y* Y ſera le diametre du cercle que l'on cherche; laquelle étant diviſée en deux également en *x*, le point *x* en ſera le centre.

Si de ce même point *x* par S on tire *x* S, cette ligne ſera l'axe du cone.

Pour la ſeconde ſolution : ayant tiré une ligne A *e* faiſant un angle quelconque avec AS, on portera la longueur CF, diſtance du centre au foyer de l'ellipſe, de A en *o* ſur A *e*, & de *d* en *n* ſur *d* S, puis faiſant SV égal à S *n* ſur *o* S, on tirera par les points V & C la ligne VY, qui coupera AS en *y*, où eſt le point cherché; ainſi la ligne *y* Y ſera le diametre du cercle demandé, qu'on tracera ſur la ſurface du cone elliptique de la même maniere que l'ellipſe ſur le cone droit circulaire, dont nous parlerons après celle de décrire l'ellipſe ſur le cylindre.

USAGE.

Cette propoſition ſert pour les *traits* des voutes coniques appellées trompes, tant droites que biaiſes, c'eſt-à-dire, dont les baſes (qui ſont leurs faces) ſont perpendiculaires ou obliques à leurs axes, parce que les joints de doele & les faces des trompillons ſont toujours des cercles ou portions de cercles paralleles à cette baſe : d'ailleurs quand même les faces ne ſeroient pas planes, comme ſont celles des trompes ſur le coin qui ſont

angulaires, les convexes & les concaves des tours rondes & creuſes, & les ondées, comme celle d'anet, il faut toujours pour la facilité de l'exécution ſuppoſer une baſe circulaire du cone droit ou oblique, de laquelle, comme d'un terme, on porte les allongemens au-dehors, ou les reculemens en-dedans des parties excédentes ou défaillantes des concavités ou des convéxités des faces.

De la deſcription de l'ellipſe ſur les ſurfaces concaves ou convexes du cylindre & du cone.

PROBLEME XXXIII.

Le grand axe d'une ellipſe avec un point à la ſurface du cylindre, dont la diſtance à un des axes eſt connue, étant donnés, y tracer l'ellipſe.

ON peut trouver les points néceſſaires pour décrire une ellipſe ſur la ſurface du cylindre de deux manieres, ou ſur des cercles paralleles à la baſe, ou ſur des lignes droites paralleles à l'axe; comme la premiere eſt la plus longue & plus compoſée dans l'opération, parce qu'outre pluſieurs cercles qu'il faut décrire ſur des ſurfaces courbes, il faut encore au moins une parallele à l'axe du cylindre, nous lui préferons la ſeconde.

Fig. 176. *Fig.* 178. Si le point donné eſt à une des extrêmités du grand axe, par exemple en L, on fera ſur une ſurface plane à part (*Fig.* 178) un angle *l g a* égal à celui de l'axe du cylindre ſur la baſe, droite, ſi le cylindre eſt droit & aigu ou obtus, s'il eſt ſcalene ſur un des côtés de cet angle comme *a g*, on portera le diametre du cylindre, puis du point *g* comme centre, & de la longueur de l'axe de l'ellipſe pour rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera le côté *a l* en *l*, la ligne *g l* ſera la poſition de l'axe de l'ellipſe dans le parallelogramme par l'axe du cylindre; puis on décrira ſur *a g* comme diametre le demi-cercle *a n o p g*, qu'on diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de l'ellipſe comme ici en quatre aux points *n*, *o*, *p*, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur *a g* qu'on prolongera juſqu'au diametre *g l*; les lignes compriſes entre les diametres *a g*

& *g l*, ſeront les diſtances du contour du cercle de la baſe à l'ellipſe demandée ; on tranſportera ſur le contour de la baſe du cylindre (*Fig.* 176) les diviſions *a*, *n*, *o*, *p*, *g* de la Figure 178, & par ces points on tirera des paralleleles à l'axe, ſur leſquelles on portera les diſtances QR, *c*S, *q u* de la Figure 178, & l'on aura ſur la ſurface du cylindre les points L, N, O, P, G, par leſquels on tracera à la main l'ellipſe demandée. *Fig.* 176. & 178.

Si le point donné eſt ailleurs qu'aux extrêmités du grand axe, la même conſtruction ſubſiſtera, mais elle demande une préparation pour la poſition du cercle qui doit repréſenter la baſe du cylindre : on décrira ſur le grand axe *g l* de l'ellipſe une demi-ellipſe, ou ſeulement le quart d'ellipſe où le point donné P ſe trouve dont on connoît par la ſuppoſition l'arc P *g*; puis ayant mené ſur la ſurface du cylindre par ce point une ligne *r*P parallele à l'axe, on y portera la diſtance *q u* iſſue de l'ordonnée P *u*, & par le point P on tracera un cercle ſur la ſurface du cylindre, qui repréſentera celui de la baſe, & on continuera comme au cas précédent.

DEMONSTRATION.

Le grand axe de l'ellipſe doit toujours être dans le plan du parallelogramme par l'axe du cylindre, parce qu'il partage l'ellipſe en deux parties égales, comme ce parallelogramme partage le cylindre ; or le triangle *l a g* repréſente une partie du plan de ce parallelogramme, & le plan de l'ellipſe eſt auſſi perpendiculaire à celui de la ſection par l'axe du cylindre, donc les diſtances des points du contour de la baſe à ceux de l'ellipſe priſe ſur des paralleles à l'axe, ſont égales à celles des points correſpondans des diametres de l'un & de l'autre, comme ſont *q u*, *c*S, QR, puiſqu'on peut ſuppoſer à chaque point *p*, *o*, *n* une ſection perpendiculaire au plan *g a l*, ſuivant les lignes *p q*, *o c*, *n*Q qui ſeront auſſi des parallelogrammes, où les ordonnées de l'ellipſe *u*P & SO, RN ſeront des côtés paralleles, parce que les deux plans de la baſe & de l'ellipſe ſont perpendiculaires au troiſiéme *g a l*, par conſéquent (par la neuvieme du XI Liv. d'EUCL.) les lignes *p q* & *u* P ſeront égales entr'elles, de même que les diſtances *q u* & *p*P, non dans cette Figure 178, mais à la ſurface du cylindre *Fig.* 176, ainſi des autres *c*S & *o*O, QPL & *l n*N, quoiqu'elles ne le ſoient

pas dans la Figure, où ces deux plans ne peuvent être repréſentés dans leur vraie ſituation l'un à l'égard de l'autre, parce qu'ils doivent être en l'air perpendiculairement au plan *g a l*; donc l'opération eſt exacte.

USAGE.

Ce Problême eſt d'un très-fréquent uſage dans la coupe des Pierres; car la plus grande partie des voutes ſont des berceaux ſouvent biais par tête, ou parce qu'ils ne ſont pas horiſontaux, comme les deſcentes, ou parce que le mur de face eſt en talud, ou parce que leur direction eſt oblique à ce mur par la contrainte des lieux; dans tous ces cas, on ſuppoſe une ſection perpendiculaire au berceau que l'on appelle *l'arc droit*, d'où on avance ſur des paralleles à l'axe du berceau les diſtances qui excédent l'arc droit pour former une face elliptique; ce que l'on verra pluſieurs fois au IV. Livre.

PROBLEME XXXV.

Un point étant donné à la ſurface du cone, qui ſoit à l'extrêmité du grand axe de l'ellipſe donnée, ou d'une ordonnée connue, tracer l'ellipſe ſur la ſurface courbe du cone.

Lorſqu'on a le grand axe d'une ellipſe, on a toujours ſa poſition dans le cylindre, en quelques points qu'on place ſes deux extrêmités, elle ſera toujours égale; il n'en eſt pas de même dans le cone: ſi le point de poſition n'eſt pas déterminé, l'ellipſe que l'on peut trouver avec un grand axe donné peut varier, en ce que ſon petit axe peut être plus ou moins grand, & ſelon qu'il ſera incliné à la baſe, l'ellipſe ſera plus ou moins différente du cercle de cette baſe; de ſorte qu'à moins qu'on n'ait le point de poſition de l'extrêmité du grand axe, il faut encore connoître le petit, ou une ordonnée, auquel cas on trouvera la ſituation du grand axe de l'ellipſe dans le triangle par l'axe du cone. *Fig.* 181.

On commencera (*Fig.* 181) par chercher le parametre de l'axe donné EL & de l'ordonnée connue, comme nous l'avons dit au Problême XV, ce qui eſt facile; on inſcrira enſuite le triangle par l'axe du cone *b S a* dans un cercle *S a b*, puis on cherchera une quatrieme proportionelle à l'axe don-

né, à ſon parametre, & au côté S *a*, qui donnera ſur S *a* la longueur *a* P; par le point P on menera PD parallele à *b a*, qui coupera le cercle au point D, par où & par le point S on tirera l'indéfinie SDF, ſur laquelle portant la longueur de l'axe donné de S en K, on menera par le point K la ligne KL parallele à S *b*, & par le point L la ligne LE parallele à SK; cette ligne EL ſera l'axe donné dans la poſition où il doit être pour que l'ellipſe ſoit telle qu'on la demande à la ſurface du cone, dont *b* S *a* eſt la ſection du triangle par l'axe, auquel le plan coupant le cone doit être perpendiculaire. Cette préparation étant faite.

Soit (*Fig.* 183) le triangle par l'axe du cone BSA, l'axe de l'ellipſe EL & l'axe du cone SC, du point C, milieu de la baſe BA, on décrira le demi-cercle BMA, & des points E & L extrêmités de l'axe de l'ellipſe, ayant abaiſſé des lignes E *e*, L *l* perpendiculaires à BA, ou paralleles à l'axe SC; on diviſera l'intervalle *e l* en deux également en *c*, on décrira de ce point, comme centre, & pour rayon *c e* le demi-cercle *e r s t l*, qui ſera la projection de la moitié de l'ellipſe propoſée. *Fig.* 183.

On prendra enſuite ſur le côté BE autant de parties égales que l'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipſe, par leſquelles on menera des paralleles à BA, comme 4 *f*, 3 *i*, 2 *d*, 1 *b*, *o* L juſqu'à la rencontre de l'axe EL, & par les points *f*, *i*, *d*, *b*, on abaiſſera des perpendiculaires à la baſe BA prolongées juſqu'au cercle *e s l*, comme *b u*, *d t*, *i s*, *f r* qui couperont ſa circonférence aux points *r*, *s*, *t*, *u*, par leſquels & par le centre C on tirera les lignes C *r* 4^b, C *s* 3^b, C *t* 2^b, C *u* 1^b, qui donneront ſur la baſe du cone les points 4^b, 3^b, 2^b, 1^b, par leſquels & par le ſommet S on tirera des lignes droites ſur la ſurface qu'on n'a pas marqué dans la Figure 183, mais bien dans la Figure 185, qui auroit dû être de grandeur égale à l'autre, ſi la place l'avoit permis; ces lignes ſerviront à trouver les points de la circonférence de l'ellipſe, en portant les diviſions correſpondantes à leur origine, par exemple B 4 ſur 4 S en 4 *r*, B 3 ſur 3 S en 3 *s*, B 2 ſur 2 S en 2 *t*, B 1, ſur 1 S en 1 *u*, & l'on aura ainſi des points à la ſurface du cone, par leſquels menant une ligne courbe à la main, on aura l'ellipſe propoſée.

DE'MONSTRATION.

Fig. 181. Premierement, pour la poſition de l'axe EL, il faut démontrer qu'il doit être à ſon parametre comme aS eſt à aP.

Si l'on ſuppoſe un plan qui coupe le cone parallelement à la baſe, comme en mn, le cercle qu'il fera par cette ſection aura une ordonnée GI commune avec l'ellipſe EIL, à l'interſection des deux plans du cercle & de l'ellipſe; donc $\overline{GI}^2 = nG \times Gm$ & $LG \times GE : \overline{GI}^2 :: EL$ eſt à ſon parametre; or à cauſe des paralleles LE & SF, qui ſont les triangles ſemblables LGn, SFa, on aura $LG : Gn :: SF : Fa$, & $EG : Gm :: SF : Fb$, donc $\overline{SF}^2 : Fa \times Fb :: EL$ eſt à ſon parametre; or à cauſe du cercle $SDab$ * $FD \times DS = Fa \times Fb$, donc l'axe EL eſt à ſon parametre $:: \overline{SF}^2 : FD \times FS :: aS : SP$; *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Eucl. l. 3. p. 36.*

Secondement, pour rendre raiſon de la maniere dont on a trouvé les points à la circonférence de l'ellipſe.

Fig. 183. Il eſt clair par ce que nous avons dit de la projection au Theorême, que celle de l'ellipſe EL eſt un cercle, ou ſa moitié un demi-cercle esl, & que ſi l'on ſuppoſe des plans perpendiculaires à celui du triangle par l'axe BSA, & paralleles à cet axe SC du cone, leurs interſections avec le plan de l'ellipſe ſe fera ſuivant les ordonnées qui ſont égales dans l'ellipſe & dans le cercle qui eſt ſa projection, puiſqu'elles ſont communes aux deux ſections, dont les points r, s, t, u, ſont dans leur poſition horiſontale, à l'égard du point C qui repréſente l'axe.

Il ne reſte plus qu'à déterminer leur hauteur au-deſſus de la baſe BA du cone, laquelle doit être trouvée ſur des lignes à la ſurface qui paſſent par les points r, s, t, u, & par le ſommet S, leſquelles ſont repréſentées par la projection $Cr\,4^b$, $Cs\,3^b$, $Ct\,2^b$, $Cu\,1^b$, & parce qu'on ne peut pas avoir ces hauteurs verticalement, mais ſur la ſurface inclinée du cone, il faut concevoir pluſieurs plans paralleles à la baſe, & paſſans par les points f, o, i, d, b, dont les ſections ſeront des cercles qui couperont les lignes tirées par les points de la baſe 4^b, M 3^b, 2^b, 1^b, en des points qui ſeront à la circonférence de l'ellipſe, puiſqu'ils coupent tous l'ellipſe en deux points, & que les lignes 4^bS, 3^bS, 2^bS, 1^bS, la coupent auſſi aux points des ordonnées marquées, donc chaque interſection des cercles & des lignes

gnes correſpondantes, qui tirent, de même que les cercles, leur origine des points *f, o, i, d, b*, ſera un des points de l'ellipſe ; *ce qu'il falloit trouver.* Fig. 183.

Si le cone eſt droit, les diviſions E 4, 3 4, 3 2, ſont égales ſur tous les côtés tirés de la baſe du cone à ſon ſommet S ; ainſi l'on peut ſans tracer les cercles porter ces intervalles ſur chaque côté du cone tiré des points correſpondans 4^b M 3^b, 2^b, 1^b, de la baſe au ſommet ; puiſque les cercles paralleles les coupent tous en parties égales.

Si le cone eſt ſcalene les diviſions ne ſeront plus égales, mais ſeulement proportionelles, & alors on ne peut ſe diſpenſer de tracer les cercles pour avoir les points de leur interſection avec les différens côtés plus ou moins inclinés, ſuivant l'obliquité du cone.

USAGE.

Ce Problême eſt une introduction à la conſtruction des trompes coniques en talud, ou en ſurplomb, ou biaiſes, dont les faces ſont elliptiques.

PROBLEME XXXV.

Un point étant donné à la ſurface d'un cone pour ſommet d'une parabole, décrire cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe.

Soit (*Fig.* 184) le triangle ASB, la ſection du cone donné par ſon axe SC & par le point donné P, tracé ſur une ſurface plane ; on menera par ce point P une ligne P *a* parallele au côté SB, qui coupera la baſe du triangle en *a*. Du point C, milieu de cette baſe, pour centre, & pour rayon CA, on décrira un demi-cercle B *y* A qui repréſentera la moitié de la baſe du cone ; enſuite ayant diviſé la ligne P *a*, qui repréſente l'axe de la parabole demandée, en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de points à ſa circonférence, comme auſſi aux points *q, r, s*, on menera par ces points des paralleles à AB, qui couperont l'axe du cone SC aux points *o*, 1^c, 2^c, *s*, & le côté SA aux points P *t u* V, deſquels on abaiſſera ſur BA des perpendiculaires qui la couperont aux points PT *u* V ; & des points *q, r, s*, d'autres perpendiculaires ou paralleles à l'axe prolongées au-deſſous de BA. Enfin du point C comme centre & Fig. 184.

pour rayons les longueurs CT, C*u*, CV, on décrira des arcs de cercle concentriques TQ, *u*R, SV qui couperont les paralleles à l'axe SCS aux points Q, R, S*a*, la ligne courbe menée par ces points PQRS*a* dans le demi-cercle de la baſe du cone B*y* A ſera la projection de la parabole demandée, par le moyen de laquelle on la tracera ſur la ſurface concave ou convexe du cone, comme on va le dire.

Fig. 182. Soit (*Fig.* 182) le cone *b*S*a* égal à celui de la Fig. 184; ce qu'on n'a pû obſerver dans cette Planche faute de place, mais que l'on peut ſuppoſer; on menera du ſommet S par le point P donné à la ſurface, une ligne droite SA ſur laquelle ayant porté les diſtance S*t*, S*u*, SV, SA de la Figure 184 aux points 1, 2, 3, 4, on tracera par chacun de ces points un cercle par le Problême XXXI. ſur lequel on portera de part & d'autre de la ligne SA l'arc de la projection qui eſt correſpondant à cette diviſion, par exemple l'arc TQ qui eſt le premier au-deſſous du ſommet P de 1 en Q, l'arc *u*R de 2 en R, & enfin l'arc VS de la Fig. 184, en 3 S de la Fig. 182, & par les points P, Q, R, S, *x*, ainſi trouvés d'un côté, & les équidiſtans de l'autre côté de la droite SA, on tracera à la main ou avec une regle pliante, mince & large, poſée de cant, la parabole demandée; j'ai dit avec une regle mince & large, parce que cette courbe, quoique décrite ſur une ſurface convexe ou concave, eſt plane dans ſon contour.

DÉMONSTRATION.

La raiſon de cette conſtruction eſt facile à trouver pour peu qu'on faſſe attention à la Figure 184: car premierement on coupe le cone en pluſieurs tranches paralleles à la baſe, qui font autant de ſections circulaires de rayons inégaux, qui ſont tranſportés ſur celui de la baſe CA par les perpendiculaires P*p*, *r*T, *u u*, VV; de ſorte que le centre C qui repréſente, en un ſeul point de projection, tout l'axe SC, repréſente auſſi tous les centres de ces ſections répandus ſur cet axe *o*, 1*e*, 2*e* *s*, & toutes les paralleles à l'axe *q* 1 Q, *r* 2 R, *s* CS, *a* a, repréſentent des ſections verticales des plans, qui coupent ces cercles perpendiculairement au triangle par l'axe BSA, & par les points d'interſection, où les diametres des cercles coupent l'axe de la parabole; par conſéquent ils donnent les cordes de ces arcs cir-

culaires par l'interſection des deux plans perpendiculaires entr'eux, & du troiſieme P*a* qui forme la parabole par ſa ſection dans le cone, où ſe terminent les arcs des ſections circulaires.

Les longueurs des cordes des demi-arcs TQ, *u*R, VS, A a étant ainſi trouvées, il eſt clair qu'elles ont été bien tranſportées ſur le cone à la Figure 182, & dans leurs juſtes places; & par conſéquent que les points à la circonférence de la parabole ont été trouvés ſur la ſurface concave ou convexe du cone; *ce qu'il falloit faire.*

Il eſt auſſi clair par ce que nous avons dit ci-devant de la projection des ſections coniques, & par le Théorême III du I. Livre, que la courbe PQR a, tracée dans le plan de la baſe B *y* A, eſt encore une parabole, quoique différente de celle de la ſection propoſée P *a*.

Nous avons dit au Problême X à quoi ſert la deſcription de la parabole.

PROBLEME XXXVI.

Le premier axe d'une hyperbole, & un point qui ſoit une de ſes extrêmités étant donné à la ſurface du cone, tracer cette courbe ſur la ſurface concave ou convexe.

Soit (*Fig.* 184) le triangle BSA la ſection par l'axe du cone, par le point donné H on prolongera indéfiniment le côté AS vers K, puis du point H pour centre & pour rayon la longueur du premier axe donné HK, on fera un arc qui coupera AS prolongé en K; ſi de ce point K par H on mene une ligne droite KY, on aura la poſition de l'axe de l'hyperbole dans le cone, laquelle étant donnée il n'y a qu'à faire ſa projection de la même maniere qu'on a fait celle de la parabole, ce que la Figure fait ſuffiſamment voir, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en répeter la conſtruction. On obſervera ſeulement, 1°. qu'elle eſt beaucoup abrégée, lorſque l'axe KH eſt parallele à l'axe du cone SC; parce que la projection *h y* eſt une ligne droite qui termine tout d'un coup tous les arcs 1 E, 2 C, 3 I. 2°. Que ſi l'axe HY panche vers S, la projection du contour aura ſa concavité tournée vers B, & au contraire ſi cet axe panche en-dehors. *Fig.* 184

Nous avons dit au Problême XII, à quoi ſert la deſcription de l'hyperbole.

Corollaire général ſur la projection des ſections coniques.

Il ſuit de la méthode dont nous venons de faire uſage pour décrire les ſections coniques ſur le cone, qu'on peut auſſi très-commodément l'employer pour *décrire ſur un plan toute ſorte de ſection conique, le triangle par l'axe du cone, & un axe de la ſection étant donnés dans ce triangle.*

Car ſi au lieu de prendre les arcs de la projection des tranches paralleles qui donnent des cercles concentriques, terminés par la projection du plan qui forme la ſection, on prend les cordes de ces arcs rangées ſucceſſivement ſur un axe à angle droit, ce ſeront autant d'ordonnées, par l'extrêmité deſquelles on fera paſſer la courbe que l'on cherche.

Premier exemple pour l'ellipſe.

Fig. 183. Soit le triangle par l'axe du cone BSA (*Fig.* 183) dans lequel l'axe EL de l'ellipſe eſt donné; ayant diviſé cet axe en autant de points que l'on voudra *b, d, i, f*, on abaiſſera par ces points & par les extrêmités EL des perpendiculaires à la baſe BA, au-delà de laquelle on les prolongera en *r, s, t, u*; enſuite ſur *e l* comme diametre, ſi l'on fait un demi-cercle *e r s t u l*, il coupera toutes ces paralleles aux points *r, s, t, u*, qui déterminent la longueur des ordonnées qui conviennent à l'ellipſe aux points *b, d, i, f*; ainſi ayant élevé des perpendiculaires à cet axe ſur ces diviſions, on portera les longueurs des ordonnées au cercle qui eſt la projection de l'ellipſe ſur ces perpendiculaires; ſçavoir, R *r* ſur *f g*, D *s* ſur *i h*, F *t* ſur *d i*, G *u* ſur *b* K, & l'on aura les points E, *g, h, i*, K, L, par leſquels on tracera la demie-ellipſe à la main, ou avec une regle pliante.

Second exemple pour la parabole.

Fig. 184. Soit le triangle par l'axe du cone BSA (*Fig.* 184) & l'axe de la parabole P *a* donné dans ce triangle, ayant diviſé cet axe par pluſieurs plans paralleles à la baſe BA, & paſſant par les points pris à volonté *q, r, s*, on fera la projection des cercles qu'ils font dans le cone, & la projection de la parabole a R Q *p*, comme nous l'avons dit ci-devant; par les paralleles *a* a, *s* S, R *r*, Q *q*, P *p*, on fera des perpendiculaires ſur P *a* aux points *q, r, s*, ou,

pour éviter la confuſion des lignes, ſur une parallele $P^2 A$, & l'on portera ſur ces perpendiculaires les ſinus des arcs QT, R*u*, SV; ſçavoir *a* a, S 3, R 2, Q 1, leſquels ſeront rangés ſucceſſivement aux points correſpondans de l'axe de la parabole, comme 1 Q en *q* Q^2, 2 R en *r* R^2, 3 S en *s* S^2, & *a* a en A a^2, & l'on aura les points Q^2, R^2, S^2, a^2, par leſquels on tracera la parabole à la main ou avec une regle pliante. *Fig.* 177.

Troiſieme exemple pour l'hyperbole.

Soit (*Fig.* 184) le triangle par l'axe du cone BSA, & l'axe de l'hyperbole donné HY dans ce triangle; ayant diviſé cet axe en autant de parties qu'on voudra par des plans qui coupent le cone parallelement à ſa baſe, en *f*, *g*, *i*, & ayant fait la projection des arcs de cercle qui paſſent par les points *e*, *d*, *i*, par le moyen des paralleles à l'axe SC; on tirera autant de perpendiculaires à l'axe HY donné ou à quelqu'autre égal, & également diviſé comme *h*B, ſur leſquelles on portera les ſinus des demi-arcs de la projection, 1 E, 2 D, 3 I, B *y* correſpondans à chaque diviſion; c'eſt-à-dire, les perpendiculaires ſur B*h* tirées des points F, G, I, B qu'on tranſportera en F f^2, G g^2, I i^2, B y^2, & par les points *h*, f^2, g^2, i^2, y^2, on tracera à la main une courbe qui ſera l'hyperbole que l'on cherche.

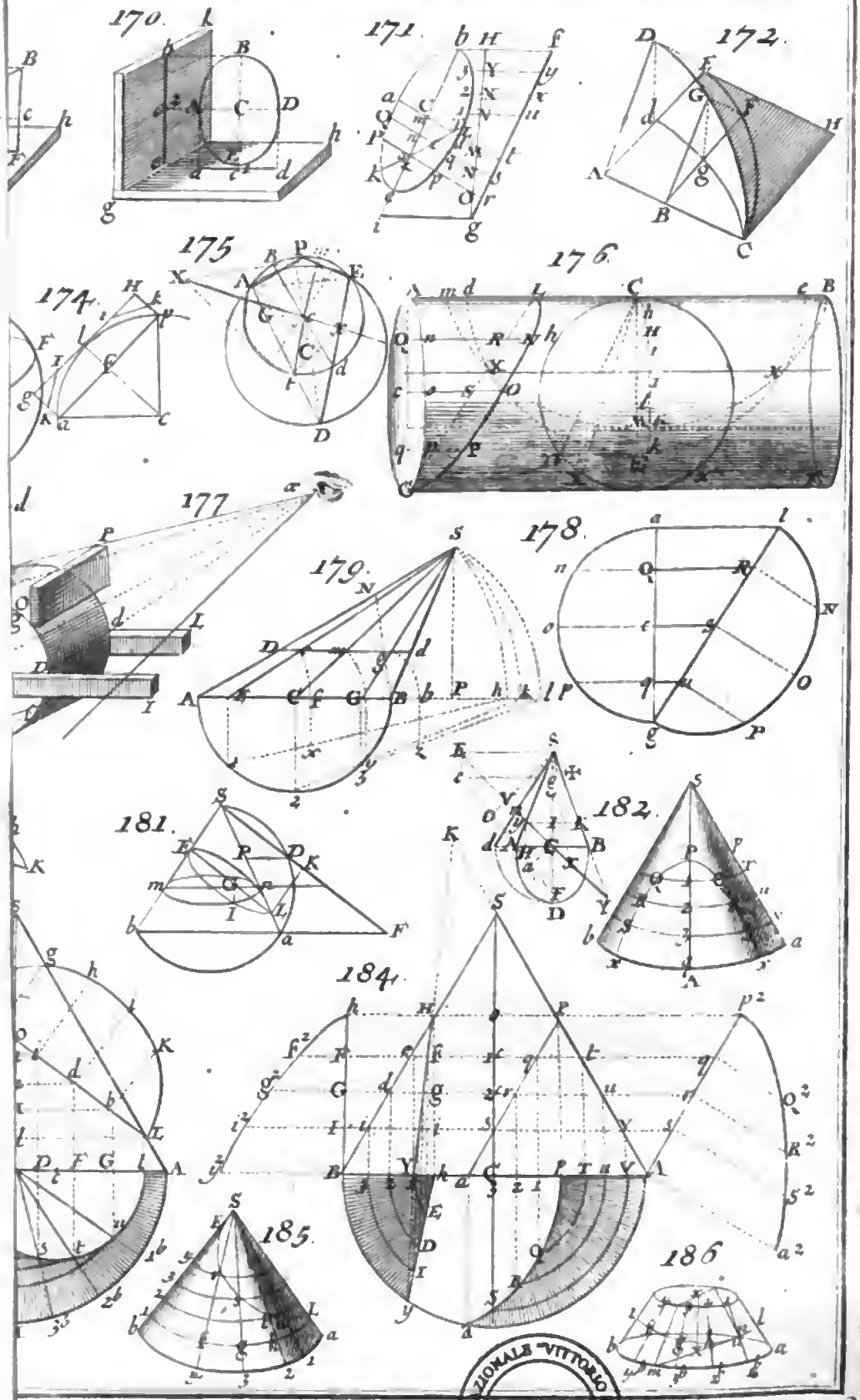
La démonſtration de ces pratiques eſt la même que celle que nous avons donnée de la deſcription de ces courbes, ſur des ſurfaces concaves ou convexes; en effet il n'y a rien de changé, excepté qu'au lieu de prendre les arcs de la projection pour les porter de part & d'autre d'un côté du cone, ſur des cercles paralleles à la baſe, ici l'on prend les demi-cordes de ces mêmes arcs ſur des lignes paralleles à cette baſe ſur un plan.

Remarque ſur cet uſage.

On peut toujours ſe ſervir de la méthode de la projection dans l'Architecture pour la coupe des pierres, parce que les cones ſont ordinairement donnés, de même que les axes des ſections dans ces cones, & parce qu'on eſt toujours obligé de faire des *plans* & des profils; on a auſſi la projection des diviſions de ces cones par les tranches qui ſont ordinairement les rangs des pierres; il ne s'agit que d'y reconnoître les cordes qui ſont

les ordonnées & abſciſſes, leſquelles ſont toûjours égales ſur le côté du cone & ſur l'axe de la parabole, & dans les autres ſections où elles ſont inégales ſur le côté du cone & ſur l'axe, elles ſont toujours en même raiſon avec celles de l'axe, parce que l'un & l'autre ſont diviſés par des paralleles à la baſe du cone. Comme cette pratique de projection eſt d'une très-grande importance pour former ce deſſein que les Architectes appellent *l'épure*, nous l'expliquerons plus au long au Livre ſuivant.

Si l'on a bien compris la maniere de tracer les ſections coniques par ce moyen, il ne ſera pas difficile de concevoir qu'il eſt applicable à toutes les autres courbes qui peuvent ſe former ſur des corps réguliers & même irréguliers, comme on va l'expliquer ci-après.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

TROISIEME PARTIE DU SECOND LIVRE.

CHAPITRE VII.

Des ſections qui ne peuvent être décrites que ſur des ſurfaces courbes, & par le moyen de la projection ſur des ſurfaces planes.

PROBLEME GÉNÉRAL.

Trouver tant de points que l'on voudra du contour des courbes faites à la Surface des ſpheres, cones & cylindres qui ſe pénetrent mutuellement.

LORSQU'IL s'agit de décrire des courbes qui ſont dans une ſurface plane, on trouve les points de leur contour par le rapport des ordonnées aux abſciſſes de leurs axes ou de leurs co-ordonnées; mais pour celles qui ne ſont pas dans un plan, ce rapport ne ſuffit pas, parce que leurs axes ou diametres n'étant pas des lignes droites, les abſciſſes ne ſont pas droites; ce ſont des courbes auſquelles il faut mener d'autres ordonnées à une ligne droite, qui eſt comme leur ſous-tendante, pour en trouver la courbure par différentes diſtances de la corde à l'arc; de ſorte que le rapport de deux lignes connues ne peut ſuffire, puiſque de quelque façon qu'un plan coupe la ſphere, le cone, ou le cylindre, il ne produira qu'une ſection conique ou un parallelogramme; & ſi l'on ſuppoſe un ſecond plan perpendiculaire ou incliné à ce premier, leur commune ſection ſera bien une droite, dans laquelle il doit ſe trouver un point de la ſection ſolide, mais cette ligne n'en détermine pas la poſition, il faut avoir recours à un

troiſieme plan qui coupe les deux premiers dans certaines circonſtances, pour déterminer ce point ſur la ligne où l'on ſçait qu'il doit être; tels ſont les points du contour de ces courbes à double courbure, que j'appelle ici des ſections *ſolides*, parce qu'elles proviennent de la ſection d'un ſolide coupé ou pénetré par un autre ſolide, & non pas par un plan, comme les ſections coniques.

Dans le nombre des trois plans qu'il faut ſuppoſer pour trouver les points de ces courbes, il y en a toujours un donné, qui fait une ſection conique, dont l'axe eſt la ſous-tendante de la courbe à double courbure, que nous pouvons appeller *imbriquée*, parce qu'elle eſt faite en contour de tuile creuſe, ou qui eſt tangent à un des ſommets de cette courbe, pour les diſtinguer des autres courbes à double courbure qui ont plus d'une infléxion.

Le ſecond plan doit être parallele au premier, pour y trouver les ordonnées à l'axe courbe de la ſection ſolide, & les comparer à celles de la ſection conique qui leur correſpondent.

Enfin le troiſieme plan doit couper les deux précédens par les ordonnées de la ſection conique & de la ſolide *imbriquée*, pour en trouver les diſtances, ou par des perpendiculaires, ou par des lignes inclinées d'une inclinaiſon connue.

Si l'on entend bien ce principe, on verra que tous les Problêmes propoſés à réſoudre, n'en ſont qu'une application, ſuivant la différence des cas.

On reconnoîtra auſſi que cette méthode, toute ſimple qu'elle eſt, eſt très-Géométrique, & la clef de tous les traits des enfourchemens des voutes, qui font preſque toute la difficulté de l'art de la coupe des pierres.

Il ne s'agit donc, 1°. que de couper les ſolides qui ſe pénetrent par des plans paralleles entr'eux, comme par tranches, qui font toujours des ſections ſemblables dans chaque corps, mais différentes de l'un à l'autre.

Secondement, de reconoître dans chacune de ces tranches la partie commune aux deux corps: car ſi l'on trace ſur un plan les deux ſections différentes dans leur diſtance reſpective, on verra qu'elles ſe coupent en deux points de leur contour, qui ſont communs aux deux ſurfaces de ces corps.

Troiſiemement, de ſuivre, je veux dire lier par des traits les points communs aux deux ſurfaces, paſſant de l'un à l'autre ſur

les

les ſurfaces courbes, même pour avoir la courbe naturelle, ou ſur une ſurface plane, pour en avoir l'imitation produite par la projection, comme nous l'avons expliqué ci-devant.

Or puiſque ſuivant la Géométrie de l'infini, on peut conſidérer les ſolides comme compoſés d'une infinité de tranches paralleles infinimenent minces, dans leſquelles les ordonnées & les abſciſſes des ſections planes, augmentent ou diminuent dans un rapport connu; on peut déterminer une infinité de points au contour des courbes à double courbure, qui ne ſont pas applicables ſur une ſurface plane, ou les applatir pour ainſi dire, en les réduiſant par la projection à des courbes planes, ſans y faire d'autre changement, que d'en ſupprimer la troiſieme dimention; ce qui eſt néceſſaire pour y parvenir par gradation, comme l'on fera dans tous les Problêmes ſuivans.

On peut rendre la méthode de trouver pluſieurs points des courbes à double courbure plus ou moins aiſée, ſuivant la ſituation que l'on donne aux plans qui coupent les corps en tranches paralleles; lorſque les axes des cones & des cylindres qui ſe pénetrent, ſont paralleles entr'eux, la ſituation la plus commode des tranches, eſt d'être perpendiculaires à ces axes, parce qu'alors les points communs ne ſont que les interſections de différens cercles: ſi les axes de ces corps ſe coupent à angle droit, la ſituation des tranches doit être parallelele à l'un des deux pour avoir un cercle & un parallelogramme, ou une hyperbole & un cercle, ou obliquement pour avoir deux ellipſes qui ſe coupent; tout cela deviendra plus ſenſible par les exemples des Problêmes ſuivans.

Du Cicloïmbre.

PROBLEME XXXVII.

Tracer un cicloïmbre ſur deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent à angle droit.

SOIT (*Fig.* 187) le cylindre OL*a b* pénetré par un plus petit T*t u*V, c'eſt-à-dire d'un plus petit diametre, dont l'axe *x* X tombe perpendiculairement ſur celui du grand C*c*: il faut tracer la courbe qui ſe fait à l'interſection des deux ſurfa- PL. 17. *Fig.* 187.

PL. 17. Fig. 187. ces ſur l'un ou l'autre de ces deux cylindres. Pour y parvenir, il faut commencer par faire la préparation ſuivante.

Ayant fait à part ſur un plan un quart de cercle CAB, dont le rayon CA ſoit égal à celui du gros cylindre; ſur le rayon CB prolongé, & du point B pour centre, on décrira un autre quart de cercle DEB, dont le rayon DB ſera égal à celui du petit cylindre, & parallele à AC; on diviſera l'arc DE en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple, en quatre, aux points 1, 2, 3, par leſquels on menera hors du quart de cercle DE, des paralleles à AC, & d'autres paralleles à CE comme 1 *i*, 2 *h*, 3 *g*, D *d*, juſqu'à la rencontre de l'arc A *d* B en *d*, *g*, *h*, *i*, par où on menera d'autres paralleles à AC indéfinies. Sur DB prolongée, on prendra *o b* pour une partie du côté du gros cylindre, & plus grande que le diametre du petit, on la diviſera en deux également au point *m*, duquel on portera de part & d'autre les diſtances DI, DH, DG, DF en *m t*, *m* 1, *m* 2, *m* 3, & par tous ces points *m*, 3, 2, 1, *t*, on tirera des perpendiculaires à *o b*, ſur chacune deſquelles on portera ſucceſſivement & dans l'ordre des diviſions correſpondantes de part & d'autre du point *m*, les diviſions du rayon CB ou leurs égales, qui ſont les diſtances de la tangente DB à l'arc A *d* B; ſçavoir, D *d* en *m* F, 6 *g* en 3 *q*, 5 *h* en 2 *r*, 4 *i* en 1 *s*, & de même de l'autre côté de *m*, tirant vers le point *u*, & l'on aura la projection d'une moitié de la courbe ſolide, qui ſe fait par l'interſection des ſurfaces des deux cylindres, laquelle projection n'eſt pas abſolument néceſſaire, mais très-utile pour ſe conduire dans la deſcription de la courbe ſur les ſurfaces convexes ou concaves des cylindres, comme on le verra au IVe. Livre.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut décrire le cicloïmbre, 1°. *ſur le grand cylindre.*

Ayant tracé une parallele à ſon axe, comme *o b*, on portera les diſtance *m* 3, *m* 2, *m* 1, *mt* d'un côté d'un point *m* pris à volonté, & autant de l'autre vers *u*, & par les points *m*, 3, 2, 1, *t*, &c. on tracera autant de cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires au côté *o b*, ſur leſquels on portera ſuivant l'ordre des diviſions correſpondantes de l'arc AB, de part & d'autre du point *m*, les arcs de cercle B *d* ſur le cercle repréſenté ici par la ligne droite *m* F, B *g* ſur l'arc 3 *q*, B *h* ſur 2 *r*, & B *i* ſur 1 *s*; ce que l'on voit plus diſtinctement dans la Figure 188, où ces arcs ſont deſſinés en perſpective avec des lettres ſembla-

bles à celles de la Figure 187 ſur l'arc A *d* B repréſenté par l'arc a K B repréſenté par l'arc a K B, B *g* par *b* G, B *h* par *b* H, & B *i* par l'arc *b* I; ce qui donnera ſur les arcs de cercles paralleles, tracés ſur le gros cylindre, les points K, G, H, I, *t*, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera le cicloïmbre propoſé; on en fera de même pour les autres quarts de cette courbe qui ſont tous égaux entr'eux, & au quart qui en paroît dans la Figure 188. *Fig.* 187 & 188.

Il faut remarquer que la courbe *t* F *u*, qu'on a tracée dans la Figure 187, eſt celle de l'axe courbe du cicloïmbre, repréſenté dans la Figure 188, par la ligne courbe *t* Y, qui paſſe par le milieu des cordes de tous les arcs retranchés du gros cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer le cicloimbre *ſur le petit cylindre*, on décrira ſur la ſurface un cercle dont la projection (*Fig.* 187) eſt la ligne droite *t m u*, & ayant diviſé ſa circonférence en parties égales à celles de l'arc DE, du quart de cercle DEB; on menera par les points de cette diviſion autant de paralleles à ſon axe, leſquelles ſeront perpendiculaires au cercle, ſi le cylindre eſt droit, comme nous le ſuppoſons, & ſur chacune de ces paralleles repréſentées (*Fig.* 188) par les lignes *k* K, *g* G, *h* H, *i* I, T *t*, on portera les longueurs D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, de la Figure 187, ſuivant leur ordre, & depuis le cercle tracé *t m u*, qui eſt leur terme commun, leſquelles longueurs rapportées quatre fois de ſuite, donneront les points par où paſſe le cicloïmbre ſur le petit cylindre, par leſquels on tracera la courbe à la main; *ce qu'il falloit faire.*

DÉMONSTRATION.

La raiſon de cette opération ſe déduit facilement de notre Problême général; car ſi l'on ſuppoſe le grand cylindre coupé par pluſieurs tranches paralleles entr'elles, & perpendiculaires à ſon axe, ces tranches ſeront toutes renfermées entre deux cercles; mais le même plan qui coupe chaque tranche du grand, étant auſſi ſuppoſé couper le petit cylindre parallelement à ſon axe, fera des tranches compriſes entre deux parallelogrammes inégaux, dont l'un ſera plus large que l'autre; de ſorte qu'on a une ſuite de cercles égaux coupés par des parallelogrammes

Fig. 187. & 188. inégaux, dont les rapports des côtés ſont exprimés par les lignes tangentes BD, B 6, B 5, B 4, par leſquelles les autres côtés qui traverſent ceux-ci à angle droit, ſont exprimés par les lignes D *d*, 6 *g*, 5 *h*, 4 *i*, dont les plus éloignés du point B qui eſt ſur l'axe du petit cylindre, ſont coupés plus loin de la tangente DB par l'arc A *d* B, ſuivant l'ordre des ſinus verſes des arcs B *d*, B *g*, B *h*, B *i*, comme nous l'avons dit au Théorême XVIII ; *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême eſt la baſe de la pratique des traits de la coupe des Pierres où il s'agit de trouver les arrêtes des enfourchemens des berceaux inégaux qui ſe croiſent à angle droit, dont nous avons fait un petit détail à l'application du Théorême cité.

On peut même y comprendre ceux qui ſe croiſent obliquement, dont la différence du trait n'eſt qu'une modification de cette pratique, comme on le va voir au Problême ſuivant.

PROBLEME XXXVIII.

Tracer une ellipſimbre formée par la ſection d'une ſphere pénetrée par un cylindre dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere.

Fig. 189.

Soit (*Fig.* 189) une ſphere ou une portion de ſphere ARB *s*, dont le centre eſt C, pénetrée par un cylindre DEFG, qui entre dans la ſphere de tout ſon contour ; on la diviſera, ſuivant le Problême général, par tranches paralleles entr'elles & perpendiculaires à l'axe du cylindre, par des lignes droites 1 *r*, 2 *s*, 3 *t*, qui repréſenteront les plans coupans ces deux corps, leſquels feront toujours pour ſections deux cercles, dont on aura les rayons ſur ces lignes, ſi on les conſidere comme les interſections d'un plan paſſant par l'axe du cylindre, & de ces plans qui lui ſont perpendiculaires. On prendra donc le rayon du cylindre DX, & des points *f*, *e*, *d*, interſections de l'axe X *x* du cylindre, & des perpendiculaires à cet axe 1 *f*, 2 *e*, 3 *d* priſes à volonté, & en auſſi grand nombre que l'on voudra avoir de points pour centres, on décrira des arcs ou des demi-cercles

1 4 *o*, 2 5 *p*, 3 6 *q*, & des points *h*, *g*, *i* pour centres, pris au milieu des cordes de la ſphere R *r*, S *s*, T *t*, on décrira d'autres demi-cercles, qui couperont les précédens aux points 4, 5, 6, par leſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur les lignes 1 *r*, 2 *s*, 3 *t*, qui les couperont aux points *n*, *m*, *l*, leſquels donneront la projection des points de la courbe à double courbure, que j'appelle ellipſimbre, par leſquels on tracera la ligne A, *l*, *m*, *n*, B, qui ſera ſon axe courbe. Pl. 17. Fig. 185.

Cette préparation étant faite, 1°. ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le cylindre; après avoir tracé une parallele à ſon axe, par exemple AD, on portera ſur cette ligne les intervalles des diviſions qui ont été priſes à volonté A 3, A 2, A 1, par leſquels on tracera autant de cercles paralleles entr'eux & perpendiculaires à l'axe du cylindre, que nous ſuppoſons droit; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne AD tracée à la ſurface du cylindre, les arcs des cercles déterminés par l'interſection de ceux de la ſphere; ſçavoir, l'arc 1 4 ſur le premier cercle, l'arc 2 5 ſur le ſecond, & 3 6 ſur le troiſieme, & par les points A, 6, 5, 4, B, on tracera à la main une moitié de l'ellipſimbre, & l'autre de l'autre côté également, ce que la Figure 189 ne peut exprimer, parce que les demi-cercles 1 4 *o*; 2 5 *p*; 3 6 *q* doivent être relevés en l'air par l'imagination perpendiculairement au plan de la ſection par l'axe du cylindre, & qu'ils ne repréſentent encore qu'une moitié de la courbe, l'autre étant de l'autre côté de la ligne AD ſur le cylindre.

Secondement, ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur la ſurface de la ſphere; au lieu de la ligne AD que nous avons priſe pour milieu des arcs, dont la Figure nous donne les moitiés, on tracera ſur la ſphere un cercle majeur * paſſant par les points A & B, ſur lequel on portera les intervalles des diviſions faites par les paralleles 1 *r*, 2 *s*, 3 *t* qui ſont les arcs AT, AS, AR, AB, par leſquels on décrira autant de cercles paralleles entr'eux & perpendiculaires au majeur, & l'on portera de part & d'autre de ce cercle majeur les arcs des cercles mineurs déterminés par l'interſection des demi-cercles du cylindre, qui ſont dans les plans correſpondans. Ainſi l'on portera ſur le premier l'arc R 4, ſur le ſecond l'arc S 5, ſur le troiſieme l'arc T 6, & l'on aura ſur la ſurface de la ſphere les points A, 6, 5, 4, B, par leſquels on tracera à la main une courbe qui ſera l'ellipſimbre propoſée: * Prob. XXIX.

Fig. 189. on en fera autant de l'autre côté de l'arc ARB, ſur la ſurface de la ſphere, pour l'autre moitié de l'ellipſimbre.

On peut encore tracer cette courbe ſur le cylindre & ſur la ſphere d'une autre maniere.

Premierement, ſur le cylindre, on peut tracer une ellipſe par les points A & B (par le Probl. XXXV) & ayant pris ſur cette ellipſe les arcs correſpondans aux parties de l'axe Az, AY, de la projection, on fera paſſer par les points z & Y des paralleles l'axe du cylindre, ſur leſquelles on portera les longueurs z *l*, Y *m* de la projection, leſquelles donneront les points *l*, *m* & *n* qui ſeront à la circonférence de l'ellipſimbre; mais cette maniere eſt plus longue. On traceroit de même ſur la ſphere un cercle majeur AB, d'où, comme terme, on porteroit les arcs correſpondans aux longueurs *l*z, *m*Y, pour avoir les points *l*, *m* & *n*; mais cette maniere, qui ſeroit plus longue, ſeroit moins correcte dans l'exécution : on ne la propoſe ici que comme une idée des différens moyens qu'on peut employer pour parvenir à la même fin.

DÉMONSTRATION.

La raiſon de la premiere conſtruction eſt toujours fondée ſur le Théorême général de la diviſion des corps en tranches paralleles, par le moyen deſquelles on a pluſieurs interſections des cercles inégaux de la ſphere & du cylindre, dans leſquelles ſont les points de la rencontre des deux ſurfaces, & par conſéquent de l'ellipſimbre, car quoique l'on ait tracé ces différens cercles ſur le plan de la Figure, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre, il faut les redreſſer par l'imagination perpendiculairement à ce plan; ce qui ne change rien à leur diſtance relative au plan tangent ſuppoſé ſur la ligne AD du cylindre, puiſque les lignes 4*n*, 5 *m*, 6 *l* lui ſont paralleles, comme elles le ſont auſſi à l'axe de la ſphere CP : & puiſque la courbe doit toujours avoir des points communs aux deux ſurfaces, il ſuit qu'elle paſſera par les interſections des courbes formées par le plan qui coupe les deux corps; *ce qu'il fallait trouver.*

On parviendra auſſi à la même deſcription, ſi au lieu de faire les tranches perpendiculaires à l'axe du cylindre, on les lui fait paralleles; alors les points de la courbe ſe trouveront à l'interſection des cercles de la ſphere & des parallelogrammes du cy-

Digitized by Google

lindre : c'eſt toûjours le même principe différemment appliqué.

Si le cylindre n'étoit pas droit mais ſcalene, il arriveroit du changement pour les Figures des ſections; car ſuppoſant les tranches perpendiculaires à ſon axe, elles ſeroient circulaires dans la ſphere & elliptiques dans le cylindre, & elles n'y ſeroient circulaires que lorſque les tranches ſeroient obliques à l'axe & paralleleles à la baſe, ou bien faiſant une ſection ſous-contraire ; ce qu'il eſt aiſé de ſe repréſenter & de concevoir ſans le ſecours d'une Figure : cependant pour aider l'imagination, on peut s'exercer ſur une boule & un cylindre en relief coupé, c'eſt-à-dire taillé, avec de la craye, ou autre matiere tendre.

L'uſage de ce Problême eſt indiqué au Théorême X pour les enfourchemens des lunettes pratiquées dans une voute ſphérique.

PROBLEME XXXIX.

Les diametres des deux cylindres inégaux qui ſe pénetrent, & l'inclinaiſon de leurs axes qui ſe rencontrent étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces.

La conſtruction de ce Problême eſt ſi ſemblable à celle du pénultieme, que la ſeule inſpection de la Figure 190, en fera voir la différence, qui ne conſiſte que dans la préparation, où au lieu de deux quarts de cercles, il faut faire deux quarts d'ellipſes : au lieu de les placer à angle droit ſur le côté du grand cylindre, il faut donner à leurs axes l'inclinaiſon qu'ils doivent avoir ſur ce côté.

Soit cependant pour une plus ample explication (*Fig.* 190) la moitié du grand cylindre QB pénetré par un plus petit T *m*, dont l'axe X *x* fait avec l'axe *c* C du grand, l'angle X *x c* ; on prendra la ligne *h x* pour moitié du grand axe d'une ellipſe, & le rayon *e* C du demi-diametre du grand cylindre pour moitié du petit axe, on décrira ſur un plan à part le quart d'ellipſe NDE, dont le centre ſera C; enſuite ayant prolongé la moitié du grand axe CN juſqu'en M, enſorte que NM ſoit égale à *h m*, priſe pour moitié du grand axe d'un autre quart d'ellipſe, on prendra pour moitié du petit axe la ligne NH égale au demi-diametre de la baſe TV du petit cylindre, & l'on décrira le quart d'ellipſe H 2 1 M; enſuite ayant tiré par H la ligne DL parallele à CM, on diviſera le quart d'ellipſe HM en autant *Fig.* 190.

Fig. 190. de parties égales qu'on voudra, par exemple, ici en trois aux points 2 & 1, par leſquelles on menera 1 G, 2 F, paralleles à CM, & ML, 1 K, 2 I, paralleles à HN. Cette préparation étant faite, on diviſera la circonférence du petit cylindre T *m* en quatre, & le quart en autant de parties égales que celui de l'ellipſe HM, par exemple ici en douze, puiſque le quart HM eſt diviſé en trois. 1°. Si l'on veut avoir la projection de cette diviſion ſur la ligne A *m*, on fera *h i* = HI, *h k* = HK, & *h m* = HL, ou NM: enſuite on menera par ces points *h*, *i*, *k*, des paralleles à l'axe X *x* du petit cylindre, prolongées au-delà des points *h*, *i*, *k*, ſur leſquelles on portera les diſtances de la tangente HN au quart d'ellipſe EDN; ſçavoir, HD en *h d*, *p* F en *pf* & *if*, *o* G en *og* & K*g*, & par les points *t*, *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, *m*, on tracera la courbe qui repréſente l'axe courbé de l'ellipſimbre, ou la projection de ſon contour.

2°. Préſentement ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le petit cylindre *t m*, on tracera une ellipſe ſur la ſurface, dont la circonférence coupera les paralleles R*g*, S*f*, L*d*, &c. aux points *o*, *p*, *h*, *i*, *k*, de chacun deſquels, comme d'un terme, on portera les diſtances HD en *hd*, *p* F en *if* & *pf*, *o*G en *og* & en *kg*, & ainſi de même de l'autre côté du cylindre, & par les points trouvés ſur les paralleles à l'axe du cylindre, on tracera à la main la courbe qui ſera l'ellipſimbre propoſée.

3°. Si l'on veut tracer cette courbe ſur le grand cylindre QB, ayant tracé une ligne AB parallele à ſon axe C*c*, on prendra à volonté un point *h* pour celui du milieu, de la ſection duquel on portera de part & d'autre les diſtances HI, HK, HL, pour avoir ſur cette ligne A *m* les points *o*, *p*, *h*, *i*, *k*, par leſquels on tracera, par le Problême XXXV, autant d'ellipſes paralleles entr'elles, ſuivant l'inclinaiſon donnée A*hd*; enſuite on portera de part & d'autre de la ligne A *m* ſur chacune de ces ellipſes, les arcs correſpondans du quart d'ellipſe EDN; ſçavoir, ND ſur *hd*, NF ſur *pf* & *if*, NG ſur *og* & *kg*, & par les points *g*, *f*, *d*, *f*, *g*, qui terminent les arcs des ellipſes tracées ſur le cylindre, on fera paſſer une ligne courbe de chaque côté de la ligne A *m*, qui ſera l'ellipſimbre propoſé.

DEMONSTRATION.

La raiſon de cette conſtruction eſt toujours déduite du même Problême

Problême général que les précédentes. On coupe les deux corps par tranches paralleles, qui ſont dans le petit cylindre des parallelogrammes, parce que les plans coupans ſont paralleles à ſon axe, & dans le grand cylindre les ſections des mêmes plans ſont des ellipſes. Or parce que toutes ces ellipſes ſont égales, elles ſont repréſentées par le quart d'ellipſe EDN, qui a été fait dans la préparation; & parce que tous les parallelogrammes ſont inégaux, on a exprimé la moitié de leurs côtés par les lignes HI, HK, HL qui ſont les diſtances des points 1, 2, H, par leſquels paſſent les plans qui coupent le petit cylindre; car ſi l'on releve, par la penſée, le quart d'ellipſe H 2, 1 M à angle aigu ſur le plan de l'ellipſe EDN, enſorte que les demi-axes CN & NM faſſent un angle égal à l'angle *x h m*, c'eſt-à-dire, dans la Figure, que NM ſoit poſée ſur NA; il eſt clair que la projection de la ligne HN ſe réduira à un point N, placé au milieu du petit cylindre, comme eſt le point *h*, la projection du point 2 ſe fera ſur NA à une diſtance égale à HI qui eſt, par la conſtruction, *hi* pour un côté, & *hp* pour l'autre, & tout le quart d'ellipſe M 1 2 H ſera dans un plan tangent au grand cylindre QB, ſuivant la ligne *h m*, partie de ſon côté A*m*, & les intervalles des diviſions H, 2, 1, M à l'ellipſe qui eſt la ſection du même plan dans le cylindre, ſeront exprimés par les lignes HD, *p* F, *o* G, qui ſont perpendiculaires à la tangente HN, & paralleles à l'axe NC. Ces diſtances ſont entr'elles comme les ſinus verſes, ou les fleches du double des arcs DN, FN, GN, leſquelles ſont auſſi entr'elles comme les ſinus verſes des arcs de cercle correſpondans à la baſe du cylindre, comme nous l'avons démontré ailleurs; ce que nous avons repréſenté à la Figure 191, qui eſt la vûe de la précédente par le bout du gros cylindre, comme il ſera facile de le reconnoître par les mêmes Lettres placées aux points correſpondans, mais doubles, parce qu'elle fait voir les deux côtés, & par conſéquent les parallelogrammes des ſections du petit cylindre. Mais, par la conſtruction, les longueurs de ces fleches, ou ce qui eſt la même choſe, des longueurs qui leur ſont égales, ont été portées de *h* en *d*, de *i* en *f*, &c. donc la courbe *t d m* eſt l'axe courbe de l'ellipſimbre, & marque ſa profondeur dans le cylindre QB; & parce que l'on a porté les intervalles des arcs de l'ellipſe DE, qui eſt égale à toutes les autres ſections paralleles ſur chacune

Fig. 190.

Fig. 191.

des ſections correſpondantes, on aura la rencontre des parallelogrammes du petit cylindre avec les ellipſes du grand, où ſont les points communs à leurs deux ſurfaces; donc ils ſont à la circonférence de l'ellipſimbre, & cette courbe paſſera par tous ceux qui ont été ainſi déterminés; *ce qu'il falloit faire.*

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Théorême XIX; il ſert pour les enfourchemens des berceaux, ou parties de berceaux ſurhauſſés ou ſurbaiſſés, ou qui ſont biais, c'eſt-à-dire, inclinés entr'eux, ſuppoſant que leurs axes ſe rencontrent.

PROBLEME XL.

Les diametres de deux cylindres qui ſe pénetrent de toute leur circonférence, ſans que leurs axes ſe rencontrent, & l'inclinaiſon de leurs côtés entr'eux étant donnés, tracer l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces.

La Figure 192 eſt faite pour mettre ſous les yeux la différence de ce Problême avec le précédent, qui ne conſiſte qu'en ce que les axes des cylindres ne ſe rencontrent pas, & la Figure 193 pour la conſtruction.

On peut diſtinguer deux cas dans cette propoſition; le premier, lorſque le petit cylindre tombe perpendiculairement ſur le côté du grand, c'eſt-à-dire, ſur des lignes paralleles à ſon axe; le ſecond, lorſque les lignes paralleles à l'axe du petit cylindre tombent obliquement ſur celles qui ſont auſſi paralleles à l'axe du grand cylindre. Si leurs côtés ſont perpendiculaires entr'eux, on fera pour la préparation des quarts de cercles ou demi-cercles égaux à leurs baſes, comme on a fait au Problême XXXVII pour le cicloïmbre; & ſi leurs côtés ſont obliques, on fera pour la préparation des demie-ellipſes & quarts d'ellipſes, comme à la Figure 193.

Fig. 193. & 194. Soit E a *b* D un quart d'ellipſe de la ſection oblique d'un plan coupant le cylindre DEGF, parallelement à l'axe du petit cylindre qui pénetre le grand, comme on voit à la Figure 192; ſoit auſſi KH*b* la moitié de l'ellipſe faite dans le petit cylindre par la ſection d'un plan tangent au grand; on diviſera à volonté ſa circonférence aux points 1, 2, 3, 4, & par ces diviſions on menera des paralleles à l'axe H*x*, qui coupe le quart d'ellipſe du grand cylindre en *m* & *x*, plus ou moins loin.

du centre C, par où paſſe l'axe du grand cylindre ; ſuppoſant que la poſition du petit cylindre dans le grand eſt donnée en *a b* GF, ces lignes 1 O, 2 N, *m* M, 3 *n*, 4 *o*, étant prolongées vers le quart d'ellipſe E *a b* D, le rencontreront aux points 1, 2, *m*, 3, 4 ; on menera auſſi par le point H la ligne H *d*, parallele au diametre K *b*, de même que 3 *e* & 4 *f*, qui rencontrent le côté du cylindre G *b* prolongé en *d* aux points *e* & *f*, cette préparation étant faite. *Fig.* 193. & 194.

Pour décrire l'ellipſimbre ſur la ſurface du grand cylindre DEGF, on commencera par tirer une ligne *d d* parallele à ſon axe par le Problême XXX, ſur laquelle ayant pris le point M pour le milieu de la ſection, on prendra de part & d'autre de ce point ſur la ligne *d d*, les diſtances *b f* de la Figure 193 de la préparation, que l'on portera en M *f* ; *b e* que l'on portera en M *e*, & *b d* que l'on portera en M *d*, auſſi de part & d'autre du point M : enſuite on ſera paſſer par tous ces points des ellipſes qu'on tracera ſur la ſurface du grand cylindre, ſuivant l'angle de l'inclinaiſon du côté du petit cylindre ſur le grand ; par exemple, IKL (*Fig.* 192) ou des cercles, ſi le petit cylindre tombe à angle droit ſur les côtés du grand.

Sur chacun de ces cercles ou ellipſes, on portera de part & d'autre de la ligne *d d*, les arcs de cercle ou d'ellipſe déterminés par les paralleles à l'axe du petit cylindre, qui paſſent par les diviſions de la ſection elliptique ; ſçavoir, *m a* de la Fig. de la préparation ſur MA, & *m b* ſur MB, l'arc *m* 1 en *f* 1 d'un côté & de l'autre du milieu M, & l'arc *m* 4 ſur *f* 4 auſſi de part & d'autre ; enfin l'arc *m* 2 ſur *e* 2, & *m* 3 ſur *e* 3, & par les points *d*, 3, 4, B, 4, 3, *d*, 2, 1, A, 1, 2, on fera paſſer une courbe qui ſera l'ellipſimbre propoſée ſur la ſurface du gros cylindre.

Pour tracer cette courbe ſur le petit cylindre, on fera la même choſe qu'au Problême précédent ; ce qu'il eſt inutile de répeter, la ſeule difficulté qu'il y aura, c'eſt qu'ici les deux côtés de la courbe n'étant pas égaux, le quart du petit cilindre ne ſuffit pas pour donner les points des quatre parties, comme aux Figures 187 & 190 ; il faut avoir toutes les diſtances d'une moitié de la courbe à la tangente K *b* : ainſi ayant décrit une ellipſe autour du petit cylindre, telle que la feroit la ſection d'un plan tangent au grand, on la diviſera en deux depuis le point d'attouchement repréſenté dans la pré-

Fig. 193. & 194. paration par le point *b*, & ayant diviſé ſa demie-circonférence en parties égales à celles de la demie-ellipſe *b* HK; ſçavoir, *b* 4, 4 3, 3 H, &c. on menera par chacune de ſes diviſions des paralleles à l'axe du petit cylindre, ſur leſquelles on portera ſucceſſivement d'un côté & de l'autre les diſtances de la tangente K *b* à l'arc de l'ellipſe a *b*; ſçavoir, *o* 4, *n* 3, M *m*, N 2, O 1, K a, leſquelles donneront des points par leſquels on tracera l'ellipſimbre propoſée.

Si l'on vouloit avoir la projection de cette courbe ſur un plan, au lieu des arcs que l'on a tracés dans la Figure 194, en maniere de perſpective ſur le grand cylindre, il faudroit en prendre les cordes ou demi-cordes, & la conſtruction, à cela près, ſeroit toujours la même.

DEMONSTRATION.

Cette conſtruction émane du même principe que les précédentes. On ſuppoſe les deux cylindres coupés en tranches par des plans paralleles entr'eux & à l'axe du petit cylindre, dans lequel ils ſont pour ſection des parallelogrammes, dont les intervalles ſont marqués par ceux des lignes 4 *f*, 3 *e*, H *d* qui dépendent de la diviſion qu'on a voulu faire du contour du petit cylindre pris ſur un cercle, s'il eſt perpendiculaire au côté du grand, ou ſur une ellipſe s'il eſt oblique, comme dans le cas préſent, parce qu'on ſuppoſe ce petit cylindre coupé par un plan tangent au grand, afin d'avoir un terme d'où l'on puiſſe compter de combien chaque ligne parallele à l'axe s'avance au-deſſous de ce plan, pour atteindre à la ſurface du grand cylindre; c'eſt-à-dire, à la courbe que ce plan fait dans ce grand cylindre. Or cette courbe eſt un cercle, lorſque le petit cylindre eſt perpendiculaire au côté du grand, & une ellipſe, lorſqu'il lui eſt oblique, & parce que tous les plans des tranches ſont paralleles, toutes les ellipſes qu'ils font, ſont auſſi égales entr'elles, de ſorte que dans la préparation on fait ſervir une ellipſe pour toutes, ainſi l'ellipſe E a *b* repréſente celle qui eſt faite par le plan paſſant par les points 2 3 *e*, par 1 4 *f* & K *b*; or dans chaque interſection des parallelogrammes du petit cylindre & des ellipſes du grand, il n'y a que deux points communs; ſçavoir, a *b* pour celle du milieu, 1, 4, pour l'interſection de la tranche ſuivante, & 2, 3, pour la troiſiéme, leſquel-

les étant eſpacées de part & d'autre de la ligne AB, donnent les points du contour de l'ellipſimbre, *qu'il falloit trouver.*

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Théorême XX.

PROBLEME XLI.

La poſition d'un cylindre dans un cone qu'il pénetre étant donnée, décrire l'ellipſimbre formée par la rencontre de leurs ſurfaces.

Ce Problême comprend pluſieurs cas qui peuvent tous ſe réſoudre de la même maniere; car 1°. ou les axes du cylindre & du cone ſont paralleles entr'eux, 2°. ou ils ſe coupent, 3°. ou perpendiculairement ou obliquement, 4°. où ils ne ſont pas paralleles & ne ſe coupent pas, 5°. & alors l'axe du cylindre eſt perpendiculaire au plan paſſant par l'axe du cone, 6°. ou il lui eſt incliné, 7°. ou il n'entre pas totalement dans ce plan, lorſqu'il lui eſt perpendiculaire, 8°. ou il n'y entre pas auſſi, lorſqu'il lui eſt incliné. *Fig. 195.*

Tous ces différens cas ſe peuvent réſoudre par la même pratique qui a été expliquée au Problême général, en coupant le cone & le cylindre en pluſieurs tranches par des plans paralleles entr'eux, dont la ſituation à l'égard des axes du cone & du cylindre eſt arbitraire: il y a cependant en cela du choix pour la commodité de l'exécution; car il convient de les ſituer de maniere qu'ils donnent toujours les ſections les plus ſimples, nous les avons mis dans la Figure 195, perpendiculairement à l'axe du cone, pour avoir l'interſection de deux cercles, l'un dans le cone, l'autre dans le cylindre, lorſque les axes SC & X*x* ſont paralleles entr'eux. Si l'on avoit diſpoſé les tranches parallelement aux axes, on auroit eu pour interſection celle d'un parallelogramme & d'une hyperbole, qui eſt moins facile à tracer que le cercle.

Si les axes ſont inclinés entr'eux comme SC & Q*q*, le plan *y*G coupant les deux corps, donnera dans le cone un cercle, & dans le cylindre une ellipſe, dont *y*K ſera la moitié du grand axe, & le diametre de la baſe du cylindre, le petit axe; ainſi il ne s'agit que de décrire cette ellipſe, & la couper par un cercle qui ait pour rayon 1*i*, & parce que toutes les ellipſes qui ſeront faites par les ſections des autres plans paralleles à *y y* ſont égales, on peut ne décrire qu'une ellipſe, & la couper par

les cercles inégaux qui ſeront les ſections des plans paralleles dans le cone, en mettant leurs centres dans la diſtance où ils doivent être de celui de l'ellipſe. Par ce moyen on aura une ſuite d'arcs de cercles & d'ellipſes, leſquels étant tranſportés ſur les ſurfaces du cone & du cylindre, comme nous l'avons dit aux Problêmes précédens, donneront autant de points à la circonférence de l'ellipſimbre, qu'on voudra multiplier le nombre des tranches par des ſections paralleles; cela eſt clair après les exemples des Problêmes précédens; cependant pour ne pas devenir obſcur en voulant être concis, nous en feront l'application à la pratique.

Fig. 195. Soient pour le premier cas où les axes ſont paralleles, les plans *y* G, Y *n* paralleles entr'eux & perpendiculaires aux axes SC du cone, & X*x* du cylindre; du point 1 pour centre & pour rayon 1 *i*, on décrira un quart de cercle 1 *di*, & du point H pour centre, & pour rayon le demi-diametre HG du cylindre, on décrira un autre quart de cercle qui coupera le précédent au point Z, duquel ſi on abaiſſe une perpendiculaire ſur *y* G, on aura le point 5 pour projection du point Z, & un de ceux de l'axe courbe *b* 5 a de l'ellipſimbre; on trouvera de même un autre point *f* des cet axe par l'interſection des deux cercles *o e m* du cone, & N *z n* du cylindre; cette préparation étant faite.

Pour tracer l'ellipſimbre ſur le cone, ayant tiré du ſommet S une ligne à ſa baſe, qu'on prendra pour le milieu de l'ellipſimbre, on placera ſur cette ligne les points *b a* de ſes deux extrêmités dans leur diſtance du ſommet S, & enſuite les points *i* & *m*, par leſquels on fera paſſer deux cercles, ſur leſquels on portera de part & d'autre de la ligne droite les arcs *i* Z & *m z*, qui donneront les points z & Z, par leſquels on fera paſſer à la main la courbe qui ſera l'ellipſimbre demandée; on n'a pas fait de Figure pour cette tranſpoſition des arcs trouvés, parce qu'elle eſt à peu près la même qu'à la Figure 182 ou 185 de la Planche 16.

Pour le ſecond cas, où l'axe du cylindre tombe obliquement ſur celui du cône, on agira de même qu'au précédent, excepté que ſur le cylindre AVTB, où il ſe fait des ellipſes par la ſection oblique des plans *y* G, Y *n*, on tracera des ellipſes égales qui auront pour grand axe la ligne *y y* ou YY, & pour petit axe le demi-diametre de la baſe VT du cylindre; ainſi le

point P qui eſt à la rencontre des deux ſurfaces ſe trouvera par l'interſection du cercle du cone, dont 1 I ſera le rayon, & de l'ellipſe *y* P *y*; de même que le point O, par l'interſection du cercle du cone qui a pour rayon 2 L, & de l'ellipſe YOY. Fig. 195.

Si des points O & P, on abaiſſe les perpendiculaires O *o* & P *p* ſur les lignes *y* G, Y *n*, on aura les points *p* & *o*, qui ſeront la projection des rencontres des ſurfaces O & P, & ſur l'axe courbe de l'ellipſimbre qui ſera la courbe B *p o* A; cette préparation étant faite.

Si l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le cone, on tirera par ſon ſommet une ligne droite, ſur laquelle ayant placé les points B & A ſommets de la courbe, on y marquera auſſi les points I & L, par où on fera paſſer des cercles, ſur leſquels on prendra de part & d'autre de la droite du milieu les arcs IP, LO, & l'on aura les points P & O, par leſquels & par le point A & B on tracera à la main l'ellipſimbre demandée, comme au cas précédent.

Pour tracer la même courbe ſur le cylindre, on commencera par tracer les lignes R a, & FN diamétralement oppoſées & paralleles à ſon axe, ſur leſquelles on portera les points *b* & *a* pour les extrêmités de la courbe, & les points *g* & N, dans leur diſtance à ces points; on fera paſſer par les points *g*, N & *a* des cercles paralleles à ſa baſe pour le premier cas, & des ellipſes pour le ſecond cas, & l'on portera ſur ces cercles les arcs *g z*, NZ pour le premier, & *y* P & YO pour le ſecond, pour les points a ou A on prendra la demi-circonférence pour avoir les points *b z*, Z a d'un côté de la parallele à l'axe, & autant de l'autre, ou B *p* OA d'un côté, & de même de l'autre de la ligne qui paſſe par le ſommet du cone & le milieu de la ſection; par ces points ainſi trouvés on tracera l'ellipſimbre demandée.

Mais ſi le cylindre étoit perpendiculaire au plan du triangle par l'axe du cone, on ne pourroit plus faire uſage de la même conſtruction, parce que les plans coupant le cone perpendiculairement à ſon axe, couperoient le cylindre parallelement à ſon axe, & y feroient pour ſection des parallelogrammes, dont les côtés ne détermineroient point la rencontre des deux ſurfaces, alors il faut avoir recours aux tangentes des ſections du cone.

Soit donc (*Fig.* 196) le cylindre DO *p d* qui eſt perpendiculaire à l'axe SC du cone, lequel eſt coupé par un plan paſſant Fig. 196.

Fig. 196. par l'axe X *m* du cylindre, & SC du cone; on coupera l'un & l'autre de ces corps par des lignes H *n*, F *m*, IN qui donneront ſur l'axe SC les points *n*, *m*, N, deſquels comme centres & pour rayons *ng*, *m*M, N *k*, on décrira des arcs de cercle *gy*, M *z*, *kx*, auſquels on tirera les tangentes *gh*, M*f*, *ki*, égales aux ordonnées de la baſe du cylindre GH, XF, KI, & par les points *h*, *f*, *i*, on menera des paralleles à l'axe du cylindre, juſqu'à la rencontre des arcs, comme *hy*, *fz*, *ix*, leſquelles ſerviront à tracer la courbe, comme nous le dirons ci-après.

Ayant tracé ſur le cylindre une ellipſe par les points donnés
Fig. 199. E & L par le Problême XXXIII, comme *e*, *h*, *f*, *i l*, (*Fig.* 199) on menera par les points *h*, *f*, *i*, donnés à la circonférence de cette ellipſe des paralleles à ſon axe G*y*, F *z*, I *x*, ſur leſquelles on portera les longueurs trouvées *hy*, *fz*, *ix*, qui donneront ſur ces paralleles les points *y*, *z* & *x*, par leſquels & par les points *e* & *l* on tracera à la main une courbe, qui ſera celle qu'on demande.

Si l'on veut tracer la même ellipſimbre ſur le cone, dont le
Fig. 197. triangle SBA de la Figure 196 eſt la ſection par l'axe, on opérera comme aux cas précédens; ainſi ſuppoſant celui de la Figure 197 (qui eſt plus petit faute de place dans la Planche) égal à celui de la Figure 196, on commencera par tirer du ſommet S à la baſe une ligne droite quelconque SB, ſur laquelle on portera les diſtances SE, S*g*, SM, S*k*, SL de la Figure 196, & ayant tracé ſur la ſurface de ce cone des cercles paſſant par les points *g*, *m*, *k*, on prendra de part & d'autre de ces points, les arcs *gy*, M*z*, *kx*, de la Figure 196, qu'on portera de part & d'autre de la ligne SB, & l'on aura des points *e*, *y*, *z*, *x*, L, *x*, *z*, *y*, *e*, par leſquels on tracera à la main la courbe propoſée, ſuppoſant, comme je viens de le dire, un rapport entre les Figures 196 & 197 qu'on n'a pû obſerver faute de place; mais comme il ne s'agit ici que d'une explication, on peut ſuppoſer égales des Figures inégales.

Lorſque le cylindre qui pénetre le cone eſt perpendiculaire à ſon triangle par l'axe, & que les axes ne ſe rencontrent pas, les tangentes aux arcs de cercle des ſections faites par les plans coupant les cones par tranches paralleles, ne ſont pas égales de part & d'autre des côtés du cylindre prolongés comme dans le cas précédent; c'eſt pourquoi il faut diſpoſer la Figure comme on le voit à la Figure 200.

Ayant

Ayant placé le centre C de la baſe du cylindre, par lequel paſſe l'axe qui tombe perpendiculairement au triangle BSA par l'axe du cone ; on décrira de ce centre un cercle *or* DRO que l'on coupera auſſi bien que le cone par des plans paralleles entr'eux, & à l'axe du cylindre & perpendiculaires à celui du cone ; leſquels plans ſont repréſentés par les lignes 1 4, 2 5, 3 6, qui coupent le cercle de la baſe du cylindre aux points *o r*, *d* D, OR, par leſquels on tirera à ces lignes des perpendiculaires indéfinies *o* T, RG, *d* E, DF ; enſuite ayant décrit des demi-cercles 1 *h* 4, 2 F 5, 3 G 6, on leur menera des tangentes L *h*, EF, TG paralleles à leurs diametres 1 4, 2 5, 3 6, leſquelles détermineront les longueurs des côtés du cylindre hors du cone, pour les paralleles à l'axe qui paſſent par les points *o d* O, *r* DR ; ainſi le côté du cylindre qui paſſe par le point *d* ſort du cone de la longueur *y* E, celui qui paſſe par le point O ſort du cone de l'intervalle *x* T, & ainſi des autres ; & parce que les points G & F ſont très-près du point d'attouchement des tangentes, ils ſortent très-peu du cone. Pl. 17. Fig. 200.

Préſentement pour tracer cette courbe ſur le cylindre, on opérera de même qu'à la Figure 199, excepté qu'en celle-là nous avons ſuppoſé les diſtances de l'ellipſe qui coupe le cylindre égales de part & d'autre de ſon axe, & qu'ici elles ſont inégales.

Pour tracer la même courbe ſur le cone, on ſuivra auſſi la même méthode qu'à la Figure 197, excepté que l'on ne portera pas les meſures des arcs paralleles ſur les deux côtés de la ligne SB, mais tous d'un côté.

Ou bien on tracera ſur le cone une hyperbole HY tangente au cercle de la baſe du cylindre pour ſervir de terme, d'où on meſurera les arcs qui coupent les côtés du cylindre ; car les points de la courbe ſeront toûjours dans l'interſection des cercles des tranches du cone paralleles à la baſe, & des côtés du cylindre paralleles à ſon axe.

La même opération ſert pour les cas où le cylindre n'entre dans le cone que d'une partie de la circonférence, comme on le voit dans la même Figure 200 au cercle D *g* 6.

Secondement, ſi au lieu de faire les tranches paralleles par des plans perpendiculaires à l'axe du cone, on veut les faire paralleles à l'axe du cylindre, la ſolution du Problême ſera également Géométrique, mais un peu plus difficile, parce

qu'au lieu de cercles dans le cone, on aura pour ſection des ellipſes, des paraboles ou des hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon de l'axe du cylindre à celui du cone; mais auſſi on n'aura dans le cylindre que des parallelogrammes.

Afin qu'on puiſſe choiſir la maniere qui convient le mieux, nous allons donner un exemple de la courbe formée par la pénétration d'un cylindre à l'axe du cone.

Fig. 201. Soit (*Fig.* 201) le triangle par l'axe du cone *b*S*a*, l'axe de ce cone SC, celui du cylindre X*c* qui le rencontre, ou qui ne le rencontre pas; ſuppoſons premierement qu'il le rencontre; la ſection plane de ce cylindre par un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par ſon axe, & ſuivant la rencontre avec l'axe SC ſera une ellipſe, dont EL ſera le grand axe, & le petit axe ſera le diametre DF de la baſe du cylindre. Soit la moitié de cette ellipſe E*d*L que l'on traverſera par autant de lignes droites paralleles que l'on voudra avoir de doubles points de la courbe comme 4 1, 5 2, 6 3, qui couperont l'axe au point *o c* O, par leſquels on menera des paralleles à l'axe du cylindre juſqu'à la rencontre du côté S*b* du cone, comme O*g*, *c*I, *o*H; chacune de ces lignes ſera une partie de l'axe de la courbe qui ſera faite dans le cone par la ſection d'un plan parallele à l'axe du cylindre, & les points *g*, I, H en ſeront les ſommets; dans l'exemple préſent ces courbes ſeront des ellipſes, parce que les lignes *g* O, I*c*, H*o* prolongées, rencontreront en dedans les deux côtés du cone S*b* & S*a* prolongés; mais ſi le cylindre avoit été incliné ſuivant la ligne E*e*, parallele à SA, ces courbes ſeroient des paraboles. Quelles que puiſſent être ces ſections, elles ſeront toujours ſemblables entr'elles, quoique inégales; on a donc l'axe & le ſommet de ces ſections, & l'on a auſſi deux points à leur contour que donne une double ordonnée 4 1, 5 2, 6 3, car à cauſe de l'uniformité du cone on peut concevoir le côté SO du cone en l'air ſur le côté SC dans un plan perpendiculaire au plan SC*a*, comme on le voit repréſenté en perſpective dans la Figure 198; mais parce qu'on ne peut pas faire cette préparation ſur le ſolide, on décrira ces courbes ſur le plan du triangle *b*S*a*, en portant les longueurs des axes O*g*, *c*I, *o*H ſur l'axe SC en OG, *c*C & *o*K, & par les points 4 G 1, 5 C 2, 6 K 3, on décrira les ellipſes ou les paraboles, ou hyperboles que les plans des tranches font dans le cone, & par les points R *d r* des ordonnées de la demi-ellipſe E*d*L, on menera des paralleles à l'axe SC

juſqu'à la rencontre des courbes 4G1, 5C2, 6K3, aux points *p*, *q*, *v*.

Cette préparation étant faite, on pourra tracer l'ellipſimbre ſur le cone, en traçant une ligne SB (*Fig.* 198) de ſon ſommet S à la baſe pour ſervir de milieu à la courbe, ſur laquelle ayant porté les longueurs S*e*, S*g*, SI, SH, S*l* de la Figure 201, & ſur les côtés S*b*, S*a* de la Figure 198 des longueurs égales à, S4 S1, S5, S2, S6, S3: on tracera ſur la ſurface du cone les ellipſes, paraboles ou hyperboles qui doivent paſſer par ces trois points, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne SB, les arcs K*u*, C*q*, G*p*, leſquels donneront les points par leſquels & les deux ſommets *e* & L, on tracera à la main l'ellipſimbre demandée. *Fig.* 198.

Pour tracer la même courbe ſur le cylindre, il faut ajouter à la préparation des tangentes à ces arcs, comme KT pour avoir la diſtance de ces tangentes aux arcs des courbes formées par les plans des tranches ſur les côtés du cone, & alors on s'en ſervira pour décrire l'ellipſimbre ſur le cylindre, comme on a fait à la Figure 197; il faut encore remarquer ici que les Figures 201, 198, n'ont pas été faites d'une grandeur rélative, quoiqu'on les ſuppoſe telles, faute de place dans la Planche.

Si l'axe du cylindre ne rencontroit pas celui du cone, comme à la Figure 200, mais que l'ellipſe faite par le plan du triangle par l'axe coupant le cylindre fût à côté, il faut en prolonger les ordonnées juſqu'à l'axe & chercher les ſommets des ſections, & tranſporter la ligne du milieu à côté de celle qui paſſe par les ſommets des ſections coniques de la quantité dont elle doit être éloignée du plan paſſant par l'axe de l'ellipſe, qui fera dans le cone une hyperbole, prenant cet intervalle ſur l'arc de la ſection conique qui coupe cette hyperbole; ce qui n'eſt pas difficile à concevoir par les exemples que nous avons donné pour trouver les points des ellipſimbres ſur les arcs des ſections coniques formées par les tranches paralleles à l'axe du cylindre: de ſorte que la préparation peut ſervir à tracer les ſections ſolides, où le cylindre n'entre pas dans le cone de toute ſa circonférence.

DEMONSTRATION.

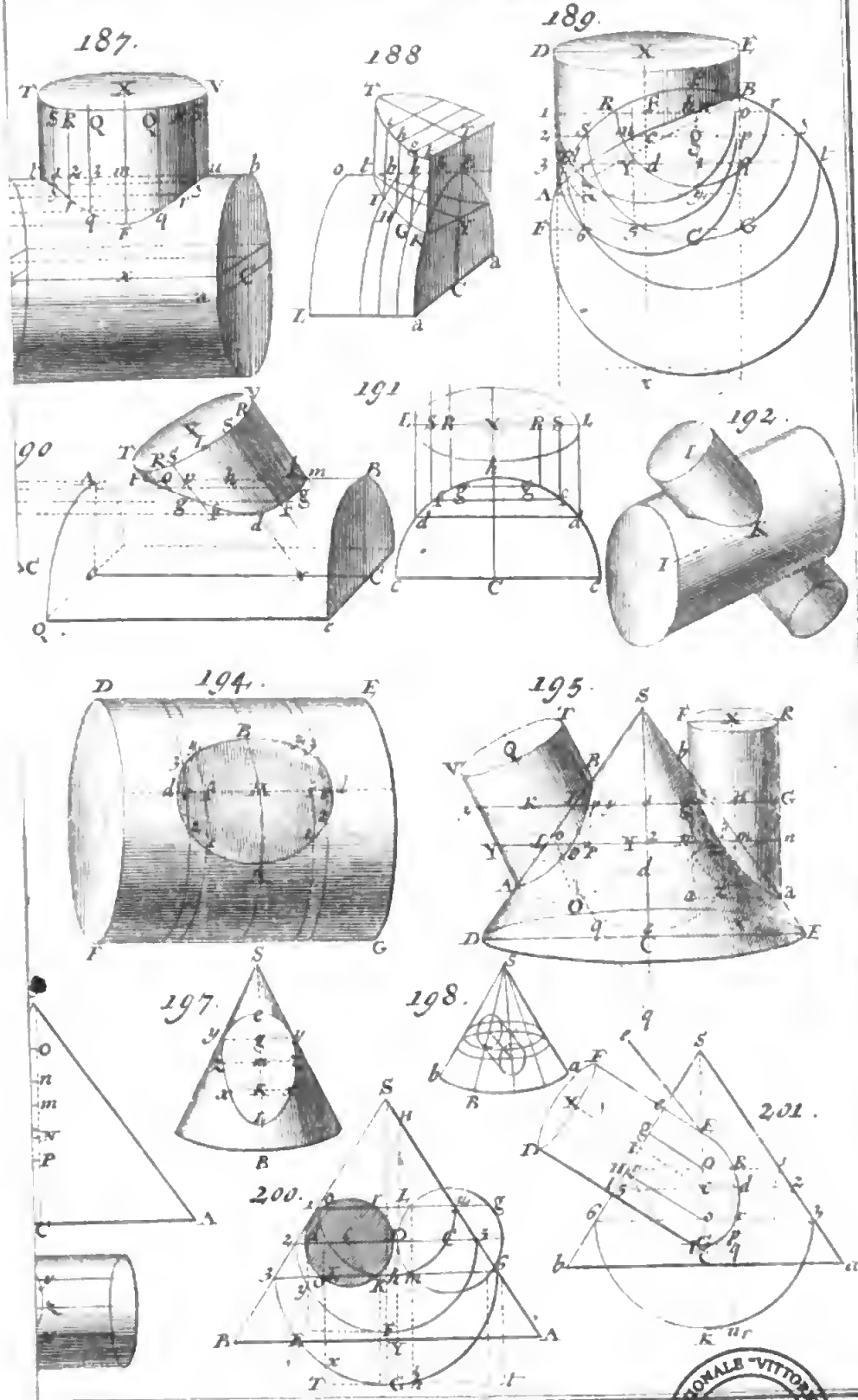
Le même principe qui a ſervi de baſe aux démonſtrations des Problêmes précédens, s'applique ſi naturellement à celui-ci,

Fig. 196. qu'il ne demande qu'une médiocre attention.

Premierement, pour la Figure 196, il faut ſe repréſenter que les lignes *g h*, M*f*, *k i*, qui ſont repréſentées dans le plan du triangle BSA lui doivent être perpendiculaires, de même que les lignes GH, XF, KI qui ſont les ordonnées au diametre D*d* de la baſe du cylindre, & les correſpondantes, que l'on a fait égales, doivent auſſi être cenſées paralleles, & dans le même plan que les arcs de cercle *g y*, M*z*, *k x*; de ſorte que ſi l'on imagine des lignes paralleles à l'axe X*m* du cylindre paſſant par les points *hfi* qui ſont à la ſurface, ces lignes, qui en ſeront des côtés, rencontreront les arcs en certains points, comme *y*, *z x*, qui ſeront ceux de l'immerſion du côté du cylindre dans le cone, par conſéquent communs aux deux ſurfaces & à la circonférence de la courbe formée par leur interſection, donc les arcs *g y*, M*z*, *k x* ſont la meſure de la diſtance des points de l'ellipſimbre à ſon axe droit EL ſur la ſurface du cone.

Mais parce qu'on ne peut pas prendre les mêmes meſures dans le cylindre, lorſqu'on veut tracer la même courbe à la ſurface, on a recours à la ſuppoſition d'un plan tangent au cone, & perpendiculaire à celui qui paſſe par l'axe du cylindre, & le côté EL du cone, lequel plan tangent fait dans le cylindre une ellipſe, parce qu'il le coupe obliquement ſuivant la ligne EL, qui eſt inclinée à l'axe X*m*: or cette ellipſe eſt toute hors du cone, & les lignes *g h*, M*f*, *k i* ſont des ordonnées à ſon axe EL, puiſqu'elles lui ſont ſuppoſées perpendiculaires, & qu'elles ont été faites égales à celle du cercle de la baſe du cylindre; donc la diſtance des extrêmités de ces ordonnées aux arcs de cercle du cone, priſes ſur des paralleles à l'axe du cylindre, donne exactement les points d'immerſion des côtés paſſant par les points *h*, *f*, *i* de la circonférence de l'ellipſe plane, tangente au cone; donc ces diſtances ont dû être portées, comme il a été dit à la Fig. 199, pour avoir les points de l'ellipſimbre *qu'il falloit décrire*.

Ce que nous pouvons ajouter touchant les pratiques indiquées par les Figures 200 & 201, ne ſera qu'une plus ample explication de la premiere: il faut toujours ſe repréſenter que par le moyen des plans paralleles coupant la baſe du cylindre & le cone en même-tems, on s'eſt donné des points à la ſurface du cylindre, comme *o*, *r*, D, &c. (*Fig.* 200) & R*d r* (*Fig.* 201) par leſquels on doit faire paſſer des paralleles à l'axe du cylindre pour avoir des côtés marqués à la ſurface; & parce que



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

ces côtés, dans la ſuppoſition de la Figure 196, ſont perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, ils n'y ſont exprimés ſuivant les regles de la projection que par un point; il faut donc les coucher ſur le même plan de ce triangle, auſſi-bien que les arcs des ſections circulaires du cone, qui n'y ſont exprimées ſuivant les mêmes regles de la projection 1 4, 2 5, 3 6, & par ce moyen on trouve les interſections de ces arcs avec les côtés du cylindre, leſquelles donnent des points communs aux deux ſurfaces, c'eſt-à-dire, des points de la courbe que l'on doit tracer; & par conſéquent on eſt obligé de ſuppoſer des plans tangens au cone, comme nous venons de le dire. Il faut tirer des tangentes à chacun des arcs des ſections du cone, leſquelles ſeront toutes dans le même plan qui eſt ſuppoſé couper le cylindre & faire une ellipſe.

La derniere pratique a été ſuffiſamment expliquée par la conſtruction, & par ce qui a été dit ci-devant.

L'uſage de ce Problême a été indiqué au Théorême XXVI, il ſe préſente aſſez ſouvent dans les fortifications où les murs ſont preſque toujours en talud, & où il y a des arrondiſſemens qui ſont par conſéquent des portions de cones tronqués, dont les ſommets ſont quelquefois en bas, comme aux arrondiſſemens des contreſcarpes & des flancs concaves, & quelquefois en haut, comme aux tours en talud & arrondiſſemens des orillons; dans l'Architecture civile il eſt plus rare.

Des ellipſimbres compoſées.

PROBLEME XLII.

Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration d'une ſphere & d'un cylindre, dont la circonférence n'entre qu'en partie dans la ſphere.

CE Problême ſe réſoudra comme tous les précédens par notre méthode générale, en traçant des perpendiculaires à l'axe du cylindre (*Fig.* 202) qui traverſent auſſi la ſphere, par leſquelles on ſuppoſe autant de plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires au plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, dont les ſections ſeront des cercles dans l'un & l'autre de ces corps. Pl. 18. Fig. 202.

Fig. 102. Soit donc la ſphere AB *k b* A pénetrée par le cylindre DEGF, dont l'axe eſt XX, par lequel & par le centre C de la ſphere, ces deux corps ſont coupés par un même plan : on menera par le centre C un diametre PC*p* parallele à cet axe, & ayant tiré à ces deux lignes autant de perpendiculaires qu'on voudra *a* 1, *b* 2, *d* 3, *e* 4, &c. des points *a b d e*, &c. pour centres & pour rayons *a h*, *b i*, *d k*, &c. on décrira autant d'arcs de cercles (les quarts ſuffiſent) & des points *o*, *p*, *q*, *r*, &c. pris ſur l'axe du cylindre pour centres, & pour rayons les demi-diametres de la baſe *o* 1, *p* 2 &c. on tracera autant d'autres arcs de cercle juſqu'à la rencontre des précédens faits dans la ſphere ſur les mêmes diametres prolongés. Les points de leurs interſections *x* & *x* ſeront communs aux deux ſurfaces ; & ſi de ces points on abaiſſe des perpendiculaires aux mêmes diametres, on aura leur projection ſur le plan paſſant par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, ſur lequel ils donneront autant de points de l'axe courbe de la ſection P *y y x p*.

Cette préparation étant faite, on s'en ſervira pour tracer l'ellipſimbre compoſée, comme on a fait pour les ellipſimbres ſimples, en traçant autant de cercles ſur la ſphere & ſur le cylindre, commençant à compter la meſure des arcs *h x*, *i x*, K *x*, depuis un cercle majeur, dans lequel ſeront les deux poles P & *p* de tous ces arcs ; & ſur le cylindre par tracer un côté EG ou DF, d'où l'on meſurera à droite & à gauche les arcs 1 *x*, 2 *x*, 3 *x*, 4 *x*, ou leur ſupplément, comme il conviendra le mieux, parce qu'il eſt toujours plus commode de prendre & de porter les meſures des arcs qui ſont au-deſſous de 90 degrés, que ceux qui ſont plus grands, à cauſe de la rondeur du cylindre.

La démonſtration de ce Problême eſt trop ſemblable à celle des précédens pour s'y arrêter ; chaque arc de cercle qu'on a fait ici dans le plan du papier, qui eſt celui qui paſſe par l'axe du cylindre & le centre de la ſphere, peut être relevé à angle droit ſur ce plan ſur les lignes qui en ſont les diametres ou les rayons, ſans qu'il arrive aucun changement à leur interſection *x*, & à leur projection *y* qui eſt dans le même plan, & dans celui de l'arc.

L'uſage de ce Problême a auſſi été indiqué au Théorême XI, il eſt inutile d'en répeter l'explication.

PROBLEME XLIII.

Tracer une ellipſimbre compoſée, formée par la pénétration de deux cylindres, dont la circonférence de l'un n'entre qu'en partie dans l'autre.

Il y a deux cas dans ce Problême qui n'en changent point la conſtruction; car les cylindres ſe coupent à angles droits ou obliquement. De quelque façon qu'ils ſe croiſent, il faut toujours ſuppoſer qu'ils ſont coupés par des plans tangens à chacun des cylindres qui les coupent réciproquement, & perpendiculairement aux plans paſſans par chacun de leurs axes; de ſorte que ſi les cylindres ſe croiſent à angle droit, les ſections de ces plans tangens à un des cylindres ſeront dans l'autre des cercles; & s'ils ſe traverſent obliquement, les ſections faites par les mêmes plans ſeront des ellipſes dans l'un & l'autre cylindre; cela ſuppoſé, nous choiſiſſons à la Figure 203, le cas où ils ſont perpendiculaires pour plus grande facilité. *Fig.* 203.

Soit le cylindre YLNI vû par la baſe repréſenté par le cercle AE*a*B, lequel eſt pénétré par un autre cylindre *d*A*a*D, qui n'entre pas dans le premier de toute la circonférence; en ſorte qu'il reſte une partie FB de ſon diametre au dehors, laquelle répond au double de l'arc D*g* de la baſe D*g a*, étendue ici par ſuppoſition ſur le plan du parallelogramme DA paſſant par ſon axe *ll*.

Ayant tiré un diametre A*a* ſur la baſe du premier cylindre BAE*a*, lequel eſt ici confondu avec le côté du ſecond, quoiqu'il puiſſe paſſer entre C & B, ou entre C & E; on tirera ſur une des extrêmités de ce diametre la perpendiculaire *d*A, ou *a*D qui repréſentera le plan tangent au grand cylindre, & le diametre de la baſe du petit, ſur lequel on tracera le demi-cercle D*m a* qui repréſentera la moitié de cette baſe, laquelle doit cependant être à angle droit ſur le plan du parallelogramme *d*A*a*D, mais dont le changement de ſituation n'en fait aucun aux interſections des lignes qu'on en doit tirer.

On diviſera enſuite l'une des deux baſes des cylindres, en parties égales ou inégales; nous diviſerons par exemple ici l'arc du demi-cercle *a*BA, ou ſeulement le quart du cercle BA en parties égales ou inégales B*r*, *rq*, *qp*, *pn*, *n*A, & par ces

Fig. 203. points *n*, *p*, *q*, *r*, on tirera des paralleles à l'axe *ll* du cylindre DA prolongées juſqu'à l'arc de la baſe *d m* A, ou D *m a*, qu'elles rencontreront aux points *g* K *m o*.

Cette préparation étant faite, ſi l'on veut tracer l'ellipſimbre ſur le grand cylindre YN, on commencera par faire à ſa ſurface un cercle parallele à ſa baſe, n'importe où, ſi les cylindres ſe coupent à angle droit, ou une ellipſe, ſuivant l'obliquité de la direction des côtés du ſecond cylindre qui le pénetre. On tranſportera ſur ce cercle les diviſions B *r*, B *q*, B *p*, B *n*, en *b* R, *b* Q, *b P*, *b* N de part & d'autre du point *b*, qui a été pris à volonté à la ſurface du cylindre, ſi la ſection eſt un cercle, ou un point correſpondant au point B, s'il eſt une ellipſe; & par les points *b*, R, Q, P, N, *a* on menera autant de paralleles à l'axe du grand cylindre; puis ayant tracé un cercle pour le milieu de la ſection, ſi on ne l'a pas fait du premier coup, on portera ſur ces paralleles à l'axe toutes les ordonnées de la baſe du petit cylindre de part & d'autre du cercle pris pour le milieu, comme ici a *a* ſuivant l'ordre de leur poſition à l'égard du point B, milieu de la diviſion; ainſi on portera l'ordonnée *cf* provenant du point B en *cf* ſur le gros cylindre de part & d'autre du point *c*, *g h* quatre fois en *g h*, ſur les deux paralleles R *h*, R *h*; on continuera de même en portant *i* K deux fois ſur chaque parallele QK de part & d'autre des points *i* & *i*, & ainſi de ſuite; & l'on aura les points *o*, *m*, K, *h*, *f*, *h*, K, &c. par leſquels on tracera à la main l'ellipſimbre demandée.

Si l'on veut tracer la même courbe ſur le cylindre DA, on tracera un cercle à la ſurface par un point pris à volonté, ou une ellipſe, ſi les deux cylindres ſe coupent obliquement, on diviſera la circonférence de ce cercle en parties égales à celles de la baſe *d m* A au haut de la Figure, en portant de ſuite les arcs *d f*, *f h*, *h* K, K *m*, *m o*, & recommençant à l'autre demi-cercle; & par tous ces points de diviſions ayant tracé autant de paralleles à l'axe du cylindre, on portera de part & d'autre du cercle pris pour le milieu des longueurs des demi-cordes 1 *r*, 2 *q*, 3 *p*, 4 *n*, qui donneront des points *r*, *q*, *p*, *n*, par leſquels on tracera la courbe qui eſt l'ellipſimbre demandée, laquelle ſera égale à la précédente, quoique ſur un cylindre différent.

DEMONS-

DEMONSTRATION.

Pour démontrer ce Problême, il ſuffit de repréſenter les différens effets des ſections des plans qui coupent les deux cylindres par tranches, ſuivant notre principe général; car ſi l'on imagine les deux cylindres coupés par des plans paralleles entr'eux & à un des deux axes, il eſt évident qu'ils feront des parallelogrammes dans celui où les tranches ſont paralleles à ſon axe, & des cercles dans l'autre, ſi les cylindres ſe pénetrent à angle droit, ou des ellipſes égales s'ils ſe coupent obliquement; mais comme l'on peut ſuppoſer les ſections des plans ſucceſſivement paralleles aux deux axes, on aura des parallelogrammes & des cercles dans chaque cylindre qui donneront par différens moyens les mêmes points de la courbe, ce que nous avons fait dans cette conſtruction pour abreger; car nous pouvions également diviſer le ſecond cylindre DA en cercles paralleles à *d*A, & prendre ſur chacun, à commencer du côté *d*D, les arcs correſpondans à chacun de ces cercles, raſſemblés ſur la baſe *d m* A, c'eſt-à-dire, qu'au cercle du milieu paſſant par F & B, on auroit porté deux fois l'arc *df*, enſuite aux deux collatéraux deux fois l'arc *dh*, & ainſi de ſuite; mais comme l'uſage des lignes droites eſt plus commode & plus exact dans l'exécution, que celui des courbes tracées ſur des ſurfaces courbes, on a choiſi les unes préférablement aux autres, puiſque l'une & l'autre maniere doit également donner les points du contour de l'ellipſimbre *qu'il falloit trouver.* Pl. 18. Fig. 203.

USAGE.

Nous avons fait remarquer au Théorême XXI que l'uſage de cette courbe étoit aſſez fréquent dans les ceintres des voutes, parce que la plupart ſont cylindriques, & que ſouvent une voute n'eſt percée que par une portion de cylindre, comme il arrive aux abajours & aux deſcentes de cave.

Des ellipſoïdimbres.

PROBLEME XLIV.

Tracer une ellipſoïdimbre formée par la pénétration de la ſphere & du cone, dont l'axe ne paſſe pas par le centre de la ſphere.

LA ſolution de ce Problême étant toujours la même, c'eſt-à-dire, fondée ſur le même principe, il ne s'agit que de tracer des lignes paralleles entr'elles ſur le plan qui paſſe par l'axe du cone & le centre de la ſphere, & qui ſoient perpendiculaires à cet axe, leſquelles ſeront les diametres des cercles que les plans paſſans par ces lignes perpendiculairement au triangle par l'axe du cone, feroient dans le cone & dans la ſphere; les interſections des cercles du cone avec ceux de la ſphere, qui ſont ſur le même plan, donneront les points de la courbe ſur les ſurfaces des deux corps auſquelles ils ſeront communs, & les perpendiculaires abaiſſées des points d'interſection des arcs ſur leurs diametres communs donneront leur projection & les points de l'axe courbe d'ellipſoïdimbre. La Figure 204 fait voir que c'eſt ainſi qu'on a tracé l'axe courbe A *d* B par une pratique tout-à-fait ſemblable aux précédentes, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y ajouter une plus longue explication, qui ne pourroit être utile qu'à ceux qui liroient ce Problême ſans avoir lû auparavant quelques-uns des précédens; il ſuffit de dire en leur faveur que le point *y* eſt trouvé par l'interſection des arcs de cercle *d*E *x* & *gfx*, ayant abaiſſé du point *x* la perpendiculaire *xy* ſur le diametre commun E*f* des arcs faits, l'un du centre *d* pris ſur le diametre de la ſphere ID, & l'autre du centre *g* pris ſur l'axe du cone S*h*.

Fig. 204.

Quand nous diſons que les plans qui forment les tranches des deux corps doivent être perpendiculaires à l'axe du cone, on conçoit bien que ce n'eſt que pour plus de commodité dans l'exécution, comme nous en avons déja prévenu le Lecteur ci-devant, parce qu'alors toutes les ſections dans le cone étant des cercles, ſont les Figures les plus ſimples & les plus faciles à décrire; car rien n'empêche qu'on ne faſſe les tranches paralleles à l'axe; mais alors leurs plans formeroient des hyper-

boles dans le cone; de ſorte que les points de l'ellipſoïdimbre ſeroient à l'interſection de différentes hyperboles avec différens cercles, j'entends de différentes grandeurs; car les hyperboles ſeroient toujours ſemblables, étant formées par des plans paralleles entr'eux. Rien n'empêcheroit de même qu'on ne fit les tranches inclinées à l'axe du cone, mais alors les points de la courbe pourroient être à l'interſection des cercles de la ſphere & des trois autres ſections coniques, ellipſes, paraboles ou hyperboles, ſuivant l'inclinaiſon des plans coupans à l'égard de l'axe du cone; car le centre de la ſphere étant donné dans le triangle par l'axe du cone, on parviendroit toujours au même but, mais par des voyes plus embarraſſantes; ce qu'il faut éviter.

L'uſage de ce Problême eſt indiqué au Theorême XIV pour les enfourchemens des lunettes ébraſées, ou voutes en canoniere, qui rachetent une voute ſphérique, ou d'une trompe conique qui rachete un cul-de-four.

PROBLEME XLV.

Décrire une ellipſoïdimbre formée par la pénétration du cone dans le Cylindre, à la rencontre de leurs ſurfaces.

Soit (*Fig.* 205) le cercle *k* BA *i*, qui repréſente la baſe du cylindre, & le triangle SD *d*, celui qui eſt la ſection du cone par ſon axe SC, lequel paſſe ou ne paſſe pas par le centre X de la baſe du cylindre: les interſections de ce cercle avec le triangle donnent les points communs aux deux ſurfaces du cone & du cylindre; ſçavoir, deux points dans ſon immerſion AB, & deux autres dans ſon émerſion *i* K, leſquels ſont par conſéquent à l'ellipſoïdimbre. *Fig.* 205.

On diviſera l'arc BA en autant de parties égales ou inégales que l'on voudra, par leſquelles on tirera des perpendiculaires à l'axe SC du cone, comme *g n* 1, *e o* 2 ou *e m* 3, & des points *g* & *e* pour centres & pour rayon la partie qui eſt compriſe dans le cone *g* 1, *e* 2 ou *e* 3, on décrira des arcs de cercle 1 R, 2 *u*, 3 *x*, & par les points *n o m* des diviſions, on menera des paralleles à l'axe SC juſqu'à la rencontre de ces arcs, qu'elles couperont aux points R, *u*, *x*, leſquels ſeront au contour de la courbe, ſi l'on ſuppoſe ces arcs relevés en l'air perpendiculairement au triangle par l'axe ſur leurs diametres.

Fig. 105. Pour faire uſage de cette préparation dans la deſcription de l'ellipſoïdimbre ſur le cylindre, on tracera un cercle à ſa ſurface, pour ſervir de milieu à la courbe, par exemple GH ſur lequel ayant tranſporté les diviſions de l'arc BA, à commencer d'un point Q pris pour le point C de la préparation, on portera C*o* & C*p*, en Q*o* & Q*p*, C*n* en Q*n*, & C*m* en Q*m*, & par les points *n*, *o*, *p*, *m* on menera des paralleles à l'axe du cylindre, ſur leſquelles, à commencer du cercle GH, on portera de part & d'autre de ce cercle les ordonnées des arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x*, qui ſont *n* R en *r n*, *o u* en *o u*, *m x* en *m x*, & par les points *r u x*, &c. trouvés à la ſurface du cylindre, on tracera à la main une courbe qui ſera l'ellipſoïdimbre propoſée.

Secondement, ſi on veut tracer la même courbe ſur le cone, on tirera du ſommet S deux côtés à ſa ſurface diamétralement oppoſés, comme SD, S *d*; on prendra ſur chacun d'eux, les diſtances SB, SA, & S *k*, S *i*, ſi l'on veut tracer la petite ſection, & ſur le côté SD ayant porté les intervalles B 1, B 2, on tracera par les points 1 & 2 des cercles paralleles à la baſe, ſur leſquels on portera de part & d'autre de ce côté, les arcs 1 R, 2 *u*, & dans l'autre côté, auſſi de part & d'autre, l'arc 3 *x*, & par les points R, *u*, *x*, on tracera ſur le cone à la main, ou avec une regle ou baguette ronde & pliante, la courbe qui ſera l'ellipſoïdimbre demandée.

Si l'axe du cone étoit incliné au côté du cylindre, il eſt clair qu'au lieu de cercles, il faudroit tracer des ellipſes.

La Figure fait voir auſſi d'un coup d'œil, comment on doit faire la projection de cette courbe, en tirant par les points donnés *n*, *o*, *m* des paralleles à l'axe du cone, leſquelles étant traverſées par une perpendiculaire GH ſur le même plan, ſi l'on porte de part & d'autre de cette ligne ſur chaque parallele l'ordonnée correſpondante du cercle fait par chaque tranche, on aura les points T, *r*, *u*, *x*, *t*, &c. par leſquels menant une courbe, on aura la projection de l'ellipſoïdimbre demandée.

La démonſtration de ce Problême eſt facile à appercevoir, ſi l'on ſe repréſente les arcs 1 R, 2 *u*, 3 *x* élevés perpendiculairement ſur leurs diametres, & ſur le plan du triangle par l'axe du cone; car alors les ordonnées *n* R, ou *m x* repréſentent les côtés du cylindre qui paſſent par les points R, *u*, *x*, de la ſurface du cone, où ſont leurs interſections; & par conſé-

quent les points communs aux deux ſurfaces qui ſont au contour de l'ellipſoïdimbre; *ce qu'il falloit trouver.*

Nous avons indiqué au Théorême XXVI l'uſage de cette courbe; nos *embraſures* dans les tours, ou dans les *flancs concaves* ſans talud, ou des portes ébraſées dans les murs arrondis par leurs plans ſans talud, ſont des portions de cones qui pénetrent des cylindres.

PROBLEME XLVI.

Décrire une ellipſoïdimbre formée par l'interſection des ſurfaces de deux cones, dont les axes ſe coupent.

Cette courbe ſe décrira par notre méthode générale, en coupant les deux cones par des plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe de l'un des deux; la courbe ſera à l'interſection des cercles & des ellipſes, dont on a les centres & les diametres ou rayons, & les axes des ellipſes que l'on trouvera dans le plan qui paſſera par les deux axes; la Figure 207, & ce que nous avons dit tant de fois en pareilles conſtructions ſuffiſent pour mettre cette pratique ſous les yeux. *Fig. 207.*

L'uſage de ce Problême eſt principalement pour les embraſures ou portes ébraſées en tour creuſe ou ronde & en talud, ſuppoſant qu'elles ſoient droites, c'eſt-à-dire, que leur axe ou ligne de direction, ſoit perpendiculaire à la tangente du mur arrondi, ou à la corde qui eſt le diametre de la porte ou embraſure; ſi la direction eſt rampante, ce ſont deux cones dont les axes ſe coupent obliquement.

Des ellipſoïdimbres compoſées.

PROBLEME XLVII.

Tracer une ellipſoïdimbre compoſée ſur les ſurfaces du cone & de la ſphere qui ſe pénetrent.

LA ſolution de ce Problême n'a rien de particulier, que la maniere de trouver les axes droits des deux parties des courbes qui ſe croiſent pour n'en faire qu'une des deux; ce qui détermine leurs points d'infléxion dans le plan paſſant par l'in-

terſection de ces deux axes, perpendiculairement à celui qui paſſe par l'axe du cone.

Fig. 206. Soit la Figure 206, la ſection d'un cone par ſon axe, & d'une ſphere par ſon centre; ſi l'on tire du ſommet S une tangente STD au cercle de la ſphere PTH, les lignes tirées des points E & H, où la ſphere coupe le cone au point d'attouchement T, ſeront celles que l'on cherche, & le point *y*, projection du point *x*, interſection des arcs T *x* de la ſphere faite du centre F, & G *x* du cone du centre *m*, ſera celui de l'inflexion formée par la rencontre de deux portions d'ellipſoïdimbre de la partie ſupérieure & de l'inférieure du cone; les autres points ſe trouveront à l'ordinaire par l'interſection des arcs de la ſphere, dont les centres ſont ſur ſon diametre P *p* parallele à l'axe du cone, & des arcs des ſections du cone, dont les centres ſont ſur ſon axe S *m*.

Application des pratiques précédentes aux courbes quelconques formées par les interſections des cylindres, & les cones.

Puiſque l'on connoît que les ſections des ſpheres, ſphéroïdes, cones & cylindres faites par des plans, ſont toûjours du nombres de celles qu'on appelle coniques qui ne ſortent jamais du ſecond degré, & que lorſqu'ils ſont paralleles, elles ſont toûjours ſemblables: quelle que puiſſe être la ſection de ces corps qui ſe pénetrent, ſoit à l'égard de leurs axes ou de leurs côtés, on trouvera toujours ſur chaque tranche l'interſection de deux de ces courbes, qui donnera deux points de la courbe plane ou à double courbure, qui ſe forme par la rencontre des deux ſurfaces; ce qui ſuffit pour ſuppléer dans la pratique à ce qui peut manquer à notre Théorie, concernant les paraboloïdimbres, hyperboloïdimbres ou autres poſſibles, comme on voit aux Figures 207 & 208.

Fig. 207. & 208.

De la deſcription des hélices & limaces.

QUoique les hélices ne ſoient pas du nombre de ces courbes qui ſont produites par la ſection des corps, auſquelles nous nous ſommes bornés: elles ſont ſi uſuelles en Architecture, qu'on a beſoin très-ſouvent de les tracer.

Le mot d'*hélice* vient du Grec *heliſſo*, c'eſt-à-dire, *circumvolvo*, je tourne autour; quelques Mathématiciens ont appliqué ce nom à la ſpirale, qui eſt une courbe plane, c'eſt-à-dire, décrite ſur un plan; mais la plupart l'ont réſervé pour celles qui s'élevent au-deſſus d'un plan en tournant autour d'un corps, come le lierre, les liſerons & les *convolvulus* autour d'un arbre. Pour moi, qui tache d'éviter les périphraſes, j'en reſſerre la ſignification à celles qui tournent autour d'un corps cylindrique ſans s'approcher de leur axe, pour les diſtinguer de celles qui en approchent, que j'appelle *limaces*, en quoi je la diſtingue encore d'une autre courbe qui eſt dans un plan, que l'on appelle le *limaçon de M. Paſcal*, laquelle eſt une eſpece de ſpirale.

Je diviſe encore les hélices en régulieres & irrégulieres; les régulieres ſont celles qui montent autour d'un corps cylindrique d'un mouvement uniforme, comme ſont les vis, dont l'intervalle de chaque révolution, qu'on appelle le *pas de la vis*, eſt toujours égal; les irrégulieres ſont celles dont les pas de chaque révolution augmentent ou diminuent ſuivant une certaine proportion que l'on s'eſt fixée.

PROBLEME XLVIII.

Tracer une hélice ſur un corps cylindrique.

Pour décrire cette courbe, on tracera un cercle autour du cylindre, s'il eſt droit ſur une baſe circulaire, ou une ellipſe s'il eſt ſcalene, mais droit ſur une baſe elliptique, & l'on en diviſera la circonférence en autant de parties égales qu'on voudra, comme (Figure 209) en ſept pour la moitié qui paroît, c'eſt-à-dire, 14 pour le circuit entier; & par ces diviſions on menera autant de paralleles à l'axe du cylindre; enſuite on réglera l'intervalle des révolutions à volonté, & l'on en diviſera un comme OA ou à ſon égal BD, en autant de parties égales qu'on a diviſé la circonférence de la baſe du cylindre (dans l'exemple préſent en 14 parties) & l'on en portera ſur chaque parallele à l'axe une de plus qu'à la précédente. Ainſi commençant à rien au point O, on portera une de ces diviſions ſur la parallele *ag* au point 1, ſur la ſeconde *bh* deux, au point 2, ſur la troiſieme *c i* trois au point 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on

Fig. 209.

Fig. 109. ſoit parvenu à la moitié au point 7; alors on retournera vers le point A en faiſant la même augmentation, & continuant ainſi juſqu'au ſommet du cylindre.

Si l'hélice eſt irréguliere, que les diviſions de D à B ſoient dans le rapport des tangentes ou des ſécantes, ou d'autres progreſſions; la conſtruction ſera toujours la même, & la même proportion regnera entre les pas de la vis, qu'on a fait régner dans l'intervalle d'un ſeul.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que ſi deux hélices de baſes différentes, c'eſt-à-dire, de différens diametres, font un même nombre de révolutions autour d'un axe commun, les intervalles des pas auront plus grande raiſon à leur baſe, plus elles ſeront petites, & au contraire plus petite raiſon à l'égard des plus grandes; c'eſt-à-dire, que les pas de la vis, quoiqu'également diſtans, ſeront plus inclinés, & les autres plus couchés.

USAGE.

Ce Problême ſert à pluſieurs Ouvrages. Premierement à tracer les grandes vis, les colonnes torſes, les naiſſances des voutes tournantes & rampantes, comme la vis Saint-Giles, & les joints de doële des mêmes vis, les limons tournans, que les appareilleurs appellent *la courbe rampante*, le deſſous des marches tournantes des vis, les appuis des fenêtres & baluſtres dans les tours rondes ou creuſes, &c. comme nous l'expliquerons au IVe. Livre.

Des limaces.

Les limaces ſont, comme nous l'avons dit, des hélices qui s'approchent continuellement de leur axe. Or elles peuvent en approcher en telle raiſon qu'on voudra faire régner entre les lignes droites tirées des points de la courbe perpendiculairement à leur axe; ainſi on peut décrire cette courbe ſur tous les corps coniques, ſphériques, ou conoïdes & ſphéroïdes, ellipſoïdes, paraboloïdes, ou hyperboloïdes; ou tout autre corps formé par la révolution de quelque courbe ſur ſon axe; nous

nous donnons ici pour exemple le cone & la ſphere (*Fig.* 210 & 211.) *Fig.* 210. & 211.

On peut encore faire régner une certaine progreſſion entre les intervalles de chaque révolution de cette courbe, ou les faire égaux ſuivant le deſſein qu'on ſe propoſe.

PROBLEME XLIX.

Tracer une limace ſur un cone ou ſur une ſphere, ou ſphéroïde.

On diviſera la baſe du cone (*Fig.* 210) ou la baſe circulaire ou elliptique d'une hémiſphere ou hémiſphéroïde en autant de parties égales que l'on voudra, par leſquels on tirera autant de lignes droites au ſommet du cone, ou autant de cercles ou ellipſes au pole P de la ſphere ou du ſphéroïde. Enſuite on diviſera le côté du cone en un même nombre de parties, ſi l'on ne veut qu'une révolution, ou ſi l'on en veut pluſieurs en un plus grand nombre, comme du double, triple ou quadruple, & l'on fera ces parties égales ſi l'on veut, ou diminuant ſuivant un certain rapport; par exemple pour le cone, on peut les faire diminuer ſuivant le rapport des paralleles à la baſe d'un triangle iſoſcele formé par deux des côtés du cone & par la premiere diviſion priſe à volonté, & pour l'hémiſphere, par les arcs paralleles à la baſe d'un triangle ſphérique, comme *c d* P (*Fig.* 211) dont la baſe *c d* ſera priſe à volonté pour le premier intervalle; ce qui donnera une échelle de diviſions inégales, qu'on portera ſur chaque ligne du cone tendant au ſommet, comme ſur *a* S (*Fig.* 210) une diviſion, ſur *b* S deux, ſur *c* S trois, & ainſi de ſuite. *Fig.* 210. & 211.

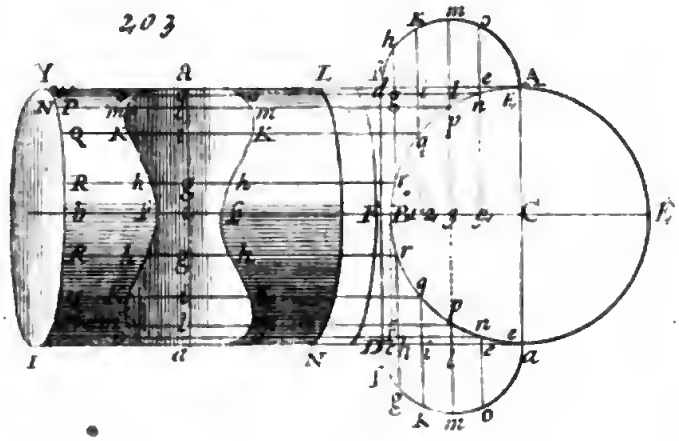
Pour la ſphere, on portera ſur les cercles tendant au pole, les meſures ſuivies de même avec leur augmentation d'une partie ſur chacune.

USAGE.

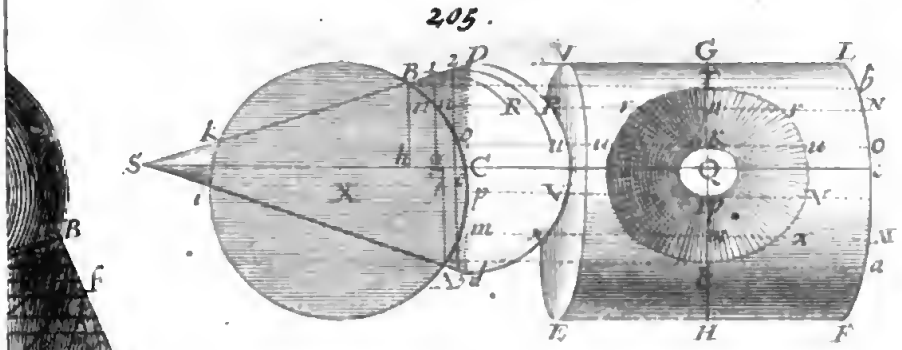
Il n'eſt pas ſans exemple que l'on ait fait des édifices en limaces. On a gravé une eſtampe que j'ai du projet d'une Chapelle pour le milieu du Louvre, dont le ſommet ſe terminoit en limace; on croit que la Tour de Babel étoit de même, comme on le voit dans le Traité qu'en a fait le P. *Kirker*;

le Cavalier *Borromini* a fait ainſi le chapiteau qui couronne toute la voute de l'Egliſe de Saint Leon de la Sapience, à Rome ; mais ſans avoir recours à l'application de ce Problême dans les Edifices en grand, on la peut trouver aſſez ſouvent dans le petit, pour de certains ornemens de volutes ſaillantes ou rentrantes. La nature nous donne de merveilleux exemples des variétés de cette courbe dans une infinité de coquillages de Mer & de terre ; j'en ai vû (voyez mon voyage de la Mer du Sud en 1716) au Chili de coniques gravés de canelures à côtes entre chaque *pas* ou intervalles de l'hélice qui diminuoient de longueur, de largeur & de profondeur dans une merveilleuſe proportion juſqu'à la pointe, où elles devenoient imperceptibles à la vûe ; ce que le plus habile Artiſan aidé des ſecours de la Géométrie auroit bien de la peine à imiter.

203

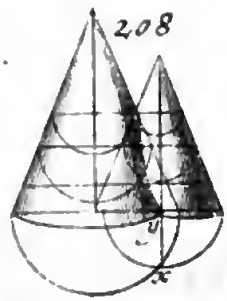


205.

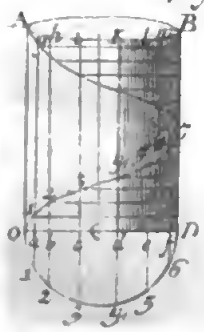


207.

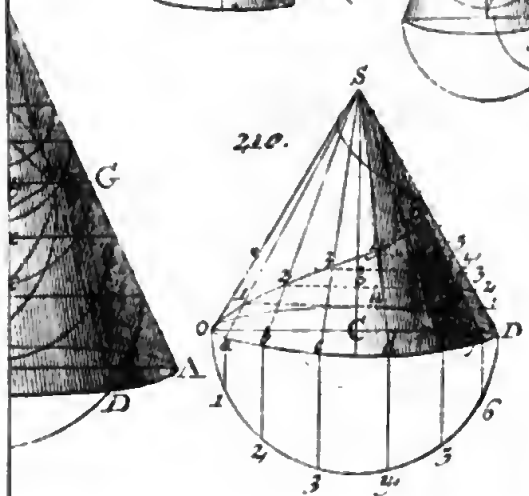
208



209.



210.



211.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

TRAITÉ
DE
STEREOTOMIE.

LIVRE TROISIEME.

De la deſcription des diviſions des ſolides.

DANS les deux Livres précédens nous n'avons eu pour objet que la Figure des lignes & des ſurfaces formées par les ſections des corps, & l'art de les décrire. Préſentement nous embraſſons l'eſpace compris entre une, deux ou pluſieurs ſections; c'eſt-à-dire, les parties ſolides qui réſultent de la diviſion des corps coupés par des ſurfaces planes ou courbes, & nous nous propoſons de chercher les moyens de les repréſenter ſur un plan autant exactement qu'il eſt poſſible, afin de trouver les longueurs de leurs côtés, & leurs angles plans & ſolides, tant rectilignes que mixtes.

Pour m'expliquer en termes de l'art, il s'agit ici de cette eſpece de *deſſein* que les Architectes appellent le *trait* & l'*épure*, dans lequel conſiſte toute la difficulté de la coupe des pierres.

Je vais tâcher d'éclaircir cette matiere, & d'en donner les

principes en la réduiſant à un petit nombre de regles appuyées de leurs raiſons, & dont l'application ſera d'autant plus facile, que le Lecteur eſt déja pleinement inſtruit de la maniere de décrire toutes les eſpeces de courbes qui peuvent y être mêlées.

On ſçait qu'il eſt impoſſible de repréſenter exactement un ſolide ſur une ſurface plane : non-ſeulement celui qui en a de courbes, mais encore celui qui n'eſt compris que par des planes, puiſqu'elle ne peut jamais en repréſenter qu'une, & un ſolide en a au moins quatre, ordinairement dans l'uſage de l'Architecture ſix, & quelquefois davantage. On a donc été obligé de conſidérer les ſolides dans les différentes rélations & ſituations de leurs parties, par le moyen deſquelles on parvient à les repréſenter à différentes repriſes.

Tantôt pour connoître la diſtance horiſontale de leurs angles, on les a ſuppoſé comme applatis ſur un plan horiſontal; tantôt pour connoître leur hauteur, on les a conçû comme applatis ſur un plan vertical ; quelquefois pour connoître d'un coup d'œil toutes leurs ſurfaces & en voir le rapport, on les a rangé de ſuite ſur une ſurface plane. Enfin pour ſçavoir quels ſont les angles que ces ſurfaces font entr'elles, on en a meſuré les angles mixtes, curvilignes & rectilignes par le moyen des cordes des côtés courbes, ou avec des inſtrumens; juſqu'ici on n'a rien imaginé de mieux.

On peut donc réduire tout l'art de tracer une *épure* à quatre ſortes de deſcriptions : la premiere a pour objet les meſures horiſontales ; on l'appelle en termes d'Architecture le *plan*, en langage de Mathématique l'*Ichnographie*, ou la *projection horiſontale*. Nous ſommes obligés d'adopter ce dernier pour éviter les équivoques dans les raiſonnemens Géométriques, où le mot de *plan* ſignifie en général une ſurface plane quelconque ; ſecondement, pour éviter les manieres de parler qui renferment une eſpece de contradiction, comme le dire *le plan d'un point, ou d'une ligne* pour ſignifier ſa projection : troiſiemement, pour éviter la cacophonie, lorſqu'il faudra dire *le plan d'un plan*, au lieu de ſa projection.

La ſeconde eſpece de deſcription des ſolides a pour objet les meſures verticales ; on l'appelle dans le langage des ſciences *Ortographie*, & en termes d'Architecture elle a différens noms. Celle qui repréſente les faces des édifices, ou de leurs parties,

s'appelle *élévation* : celle qui en fait voir les dedans, ſuivant une ſection faite par leur largeur, s'appelle *profil*, & celle qui repréſente auſſi les dedans ſuivant leurs longueurs, s'appelle *coupe* & profil.

La troiſiéme eſpece de deſcription des ſolides, qui fait partie du deſſein de l'épure, a pour objet l'étendue des ſurfaces ; on l'appelle en termes de l'Art le *développement*, parce qu'elle raſſemble & étend ſur une ſurface plane, celles dont le ſolide eſt comme enveloppé ; celle-ci n'a pas de nom particulier uſité dans les Livres ; mais puiſque les précédentes en ont qui ſont dérivés du Grec, rien n'empêche qu'on l'appelle avec feu M. de LAGNY, de l'Académie des Sciences, *l'épipedrographie*. *Mémoires de l'Acad. 1727.*

La quatrieme eſpece de deſcription néceſſaire à l'épure a pour objet les ouvertures des angles rectilignes, curvilignes & mixtes, formés par les termes des ſurfaces planes & courbes, & par l'inclinaiſon qu'elles ont entr'elles. Celle-ci n'a pas de nom propre, on l'appelle la maniere de trouver les *buveaux*, quelques-uns beuveaux ou bevaux, mais plutôt ſuivant l'étimologie du Latin *bivium*, les *biveaux* ; on peut avec le même M. de LAGNY l'appeller la *Goniographie* : ces quatre eſpeces de deſſeins ſont eſſentiels à l'épure, & les ſeules néceſſaires ; car quoiqu'il y ait une cinquieme maniere de repréſenter les ſolides par la *Scénographie*, c'eſt-à-dire, la perſpective, on n'en peut tirer aucun ſecours pour la coupe des pierres, parce qu'elle change les meſures des ſolides repréſentés, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau.

De l'arrangement des deſſeins dans l'épure.

La confuſion que l'on trouve dans les deſſeins des Livres qui traitent de la coupe des Pierres, vient ſouvent de la multiplicité des eſpeces de repréſentations que l'on raſſemble dans la même épure ; car ſouvent on y joint le plan au profil, quelquefois encore à l'élévation, & l'on mêle les uns avec les autres ſans diviſions ; ce qui demande une grande attention pour démêler ce qui appartient à chacune ; en effet ſouvent la même ligne fait partie du plan & de l'élévation, & ſert encore au profil.

Souvent les objets verticaux ſont renverſés, comme ſi au lieu de monter ils tomboient du haut en bas ; quelquefois ils

ſont placés de côté, quoiqu'ils doivent être verticaux; ſouvent on fait des lignes & des arcs de cercle inutiles à la conſtruction, qui ne ſervent qu'à indiquer les alignemens, les égalités des lignes tranſpoſées, ou l'ouverture de leurs angles : il arrive auſſi, ſuivant les circonſtances, que pour analiſer une projection, on ſe ſert pour plus de commodité & abréger l'opération d'un angle droit qu'on a trouvé fait, quoique pour un ſujet différent. Ce double emploi de lignes trouble l'attention des Lecteurs, ou exige une fatiguante contention d'eſprit pour démêler ces différentes conſidérations.

La néceſſité de raſſembler pluſieurs objets dans une petite Planche rend cet embarras preſque inévitable; d'autant plus qu'il a ſon utilité pour indiquer plus ſenſiblement leurs rapports.

Malgré les ſoins qu'on a pris pour éviter la confuſion, il eſt bon d'avertir le Lecteur qu'il ne doit compter de connéxité néceſſaire entre les lignes des deſſeins, que celle qui eſt annoncée ou indiquée par le diſcours qu'on y a joint, dans lequel on aura ſoin de dire que cette ligne qui étoit de l'élévation ou du *plan* doit être conſidérée, par une autre ſuppoſition, comme étant du profil; mais lorſqu'on aura omis cet avertiſſement, & qu'il ſera queſtion de profil, il faut abandonner l'idée qu'on attachoit à une ligne, comme faiſant partie du plan, & prendre celle qui convient au profil dont on a parlé.

Quoiqu'il ſoit plus naturel de mettre chaque eſpece de deſſein à part; il eſt cependant vrai que cette ſimplicité d'objet indique moins ſenſiblement les rapports des lignes, & que l'on trouve en cela moins de commodité qu'à raſſembler, & même quelquefois à mêler les *plan*, *profil* & *élévation* : on tiendra cependant pour arbitraire l'arrangement de leurs ſituations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au-deſſus, au-deſſous, ou à côté; pourvû que les parties en ſoient diſtinctement décrites.

CHAPITRE I.

De la projection en général.

NOus avons déja expliqué dans la ſeconde partie du II. Livre, ce que nous entendons par le mot de projection; il ſuffit de répeter ici que c'eſt la deſcription d'un corps faite par

des lignes perpendiculaires à un plan, tirées de chacun des angles & diviſions réelles ou imaginaires de ce corps; telle eſt la trace de la goutiere d'un comble qui décrit la Figure de ſon contour ſur la terre. PL. 19.

On conçoit aiſément, ſuivant cette définition, que le même corps poſé de différentes manieres donne différentes Figures de projection; ainſi un dez poſé à plat ſur une de ſes ſurfaces, (*Fig.* 212) aura pour projection le quarré ſur lequel il eſt appuyé, parce que les perpendiculaires tirées des quatre angles ſolides qui ſont hors du plan de deſcription, ſont les mêmes que celles qui ſont à la jonction des quarrés perpendiculaires entr'eux; mais ſi le dez eſt ſuppoſé n'être appuyé que ſur un de ſes angles, les perpendiculaires tirées des ſix ſommets des autres angles formeront ſur ce plan le contour d'un exagone qui ſera régulier, ſi le huitieme angle ſe trouve dans la même perpendiculaire au plan que le premier, comme on voit (*Fig.* 223).

D'où il ſuit: 1°. Que pour faire la projection d'un corps, il ne ſuffit pas d'en concevoir parfaitement la Figure; mais il faut connoître ou déterminer la poſition de ſes angles; parce que la variation de cette poſition change les meſures des diſtances horiſontales ou verticales, que l'on cherche dans ce genre de deſſein; car les perpendiculaires tirées des angles ſolides s'approchent ou s'éloignent, ſuivant l'inclinaiſon des ſurfaces des ſolides, & ſe confondent quelquefois; de ſorte que deux points différens ne ſont repréſentés que par un ſeul ſur le plan de deſcription.

2°. Qu'une ſeule projection verticale ou horiſontale ne ſuffit pas pour exprimer ſur un plan la Figure, ou la ſituation d'un ſolide à l'égard de ce plan, mais qu'elles ſont néceſſaires toutes les deux; parce que les mêmes corps en différentes poſitions peuvent avoir la même projection. Ainſi une piramide quadrilatere droite, ou un cone droit, par exemple (*Fig.* 215 & 218) appuyée ſur ſon ſommet, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire au plan de deſcription, a pour projection un quarré, & le cone un cercle, comme s'il étoit appuyé ſur ſa baſe, (*Fig.* 214 & 217).

3°. Parce que les corps différens peuvent avoir la même projection; ainſi un cone, un cylindre, une vis & une ſphere donnent également un cercle pour projection (*Fig.* 216 217.

Pl. 19. 218, 219 & 220); de même qu'un cube, un parallelepipede & une pyramide quadrangulaire donnent auſſi un quarré pour projection (*Fig.* 212, 213, 214 & 215); un anneau & une hélice ont également chacun une couronne de cercle ou d'ellipſe pour projection (*Fig.* 221 & 222); ou ſi nous prenons des exemples dans l'Architecture, nous trouverons que le *plan* d'une voute ſur le noyau & celui d'une vis Saint-Giles de même diametre ne différent en rien; celui d'une voute en plein ceintre droit ſurmontée & ſurbaiſſée, ou inclinée en deſcente, donnent auſſi le même parallelogramme dans leur projection, ainſi que les voutes cylindriques & les ſphériques donnent le même *profil*.

4°. Parce que des corps ronds ont des projections rectilignes égales ou ſemblables à celles des corps terminés par des ſurfaces planes, ainſi (*Fig.* 224) un cone couché a pour projection un triangle rectiligne, de même qu'une piramide (*Fig.* 225) & un cylindre ou une vis donne un parallelogramme, auſſi-bien qu'un priſme rectiligne (*Fig.* 226, 227 & 228) & même un mixte (*Fig.* 229).

5°. Parce que la projection change ſouvent la nature des choſes, la projection d'une ligne perpendiculaire au plan de deſcription n'eſt qu'un point; celle d'un plan en pareille ſituation n'eſt qu'une ligne; celle d'une ligne courbe qui ſeroit dans ce plan devient une ligne droite, ou ſi elle eſt inclinée à ce plan, elle peut changer d'eſpece, comme nous l'avons dit au Livre précédent; de cercle, elle peut devenir ellipſe, ou d'ellipſe elle peut devenir un cercle.

6°. Enfin, parce que de la projection des ſolides, il en réſulte quelquefois des Figures ſi différentes de celles de leurs ſurfaces, qu'on ne peut les prévoir qu'avec une grande attention, comme nous l'avons fait remarquer de celle du cube poſé ſur un de ſes angles, lorſque le diametre qui paſſe par les oppoſés, eſt perpendiculaire au plan de deſcription, ſa projection eſt un exagone régulier; pour qu'on n'en doute pas, je vais en donner la démonſtration.

Fig. 223. Soit (*Fig.* 223) le cube AE poſé ſur ſon angle B; en ſorte que ſa diagonale SB ſoit perpendiculaire au plan PL: ayant diviſé les trois ſurfaces quarrées qui comprennent l'angle ſolide S par des diagonales, comme le quarré ASDG par la diagonale AD, à cauſe de l'égalité des quarrés, ces diagonales ſeront égales

égales entr'elles, & formeront un triangle équilatéral parallele au plan de deſcription, parce que ce triangle eſt la baſe d'une piramide triangulaire droite, dont l'axe, qui eſt partie du diamêtre, eſt perpendiculaire au plan de deſcription (par la ſuppoſition), donc la projection de ce triangle ſera auſſi un triangle égal à la baſe de cette piramide. La même choſe arrivera à l'égard des trois autres ſurfaces du cube, qui comprennent l'angle ſolide oppoſé B, dont les diviſions des quarrés par des diagonales retrancheront une piramide égale à la précédente, mais renverſée & tournée différemment, en ſorte que les angles de l'une ſeront au-devant des faces de l'autre, & à diſtances égales; puiſque, par la ſuppoſition, les côtés & leurs inclinaiſons ſont égaux. Ces deux triangles équilatéraux donneront donc la poſition de ſix des angles du cube, & les deux autres qui ſont aux extrêmités du diametre, réunis par la projection dans un même point, tomberont au milieu des deux triangles équilatéraux, & ſeront le centre de l'exagone; donc la projection du cube ainſi poſé, eſt un exagone régulier. *Fig.* 223.

Pour faire connoître les angles élevés & ceux de la projection, on a marqué les uns & les autres des mêmes lettres différenciées par des majuſcules.

Il ſuit de ces remarques, que pour ſçavoir ſi un ſolide eſt contenu dans un autre, par exemple, un tétraedre dans un cube, ou un autre ſolide dans un parallelepide, tels que ſont ordinairement les quartiers de pierres de taille; il faut faire autant de projections de ce ſolide, que le parallelepipede a de ſurfaces qui ne ſont pas répetées dans leurs oppoſées, c'eſt-à-dire trois, parce qu'il en a ſix, & appliquer chacune de ſes projections à la face qui lui convient, pour ſçavoir ſi elle n'excéde point.

Dans l'Architecture, ces projections ne ſe ſont que ſur des plans horiſontaux & verticaux, parce qu'on ne s'y conduit que par l'*aplomb* & le *niveau*. Ainſi des trois, il y en a toujours une horiſontale, qui eſt appellée le *plan*, & deux verticales, dont l'une eſt *le profil*, pour ce qui eſt vû de côté, & la troiſiéme eſt l'*élévation*, pour ce qui eſt vû de face. Mais parce qu'un ſolide peut-être compris par des ſurfaces inégales de tous côtés, le cas peut arriver qu'on ait beſoin de ſix projections; ſçavoir de deux horiſontales, & de quatre verticales, c'eſt-à-dire, une

pour chaque face du parallelepipede dans lequel on doit former le ſolide.

CHAPITRE II.

De l'Ichnographie, ou Projection horiſontale, *En termes de l'Art*, DU PLAN.

DAns le deſſein que nous avons de conduire le Lecteur par des principes généraux à la connoiſſance des propriétés particulieres des ſections des corps, pour trouver les modeles des parties qui compoſent différentes eſpeces de voutes, il auroit ſuffi de ne faire mention que de celles des ſpheres, cones & cylindres, comme nous avons fait juſqu'à préſent; mais à cauſe que ce IIIe. Livre eſt une préparation à la pratique de la coupe des pierres, il nous a ſemblé a propos d'entrer dans le détail de l'Architecture, & d'en parler le langage, dont nous avons joint ici une explication, à laquelle on pourra avoir recours pour en entendre les termes uſités; mais comme elle n'eſt pas aſſez ample pour donner une parfaite intelligence des rélations des ceintres, nous commencerons par y ſuppléer.

Des différences reſpectives des ceintres.

On ſçait que les différentes ſections des corps ronds, tels que ſont les voutes, produiſent différentes lignes à leur ſurface courbes ou droites, leſquelles ont chacune un nom pour les déſigner; les ſections tranſverſales & *continues*, ſont ſouvent appellées *ceintres*, les parties de ces ſections interrompues par la liaiſon des vouſſoirs, s'appellent *joints de doële*. Les ſections longitudinales s'appellent *joints de lit*: celles-ci ſont droites dans les cones & cylindres, & courbes dans les ſpheres & les anneaux & hélices; les parties de ces ſections qui ſont dans l'épaiſſeur de la voute, s'appellent *joints de tête*.

Les intervales ou diviſions des joints de lit doivent être con-

tinués avec une certaine régularité, tantôt en lignes droites paralleles, quelquefois en ſe rapprochant avec une certaine uniformité, comme concourant à un point fort éloigné; ſouvent en lignes courbes paralleles, ou concourant à un même point, comme aux voutes ſphériques.

Lorſque les joints de lit ſont paralleles entr'eux, comme aux voutes cylindriques, il eſt clair que les ceintres circulaires & elliptiques qui les traverſent, doivent être diviſés en un même nombre de parties proportionnelles; de ſorte que ſi deux ceintres ne ſont pas paralleles entr'eux, dans les voutes en berceau, l'un étant circulaire, l'autre ſera néceſſairement elliptique, ou tous les deux ſeront elliptiques, & les diviſions de l'un déterminent néceſſairement celles de l'autre pour la quantité & la grandeur des *vouſſoirs*, qui ſont les pierres qui la compoſent. Cette dépendance reſpective oblige l'Architecte à ſe déterminer ſur la courbe qu'il veut former à une face de la voute plutôt qu'à l'autre, ou à celle qui réſulte de la ſection d'un plan perpendiculaire à ſon axe. Celui de ces ceintres, auquel il fait le plus d'attention, & qu'il choiſit pour faire la diviſion la plus réguliere de ſes vouſſoirs, s'appelle le *ceintre primitif*; l'autre dont la courbure & les diviſions dépendent de la ſuite des joints de lit, & de la différence de poſition à l'égard de celui-ci, s'appelle *ceintre ſecondaire*.

Le ceintre primitif eſt quelquefois réel comme en ABD (*Fig.* 230) où l'on ſuppoſe une face biaiſe, qui doit paroître & ſubſiſter; ou ſimplement imaginaire & ſuppoſé comme I *m a*, (*Fig.* 231) où l'on ſuppoſe un plan tangent à une tour, dans laquelle on veut faire une porte, dont le ceintre réel, qui ne peut être décrit ſur une ſurface plane, ne peut ſervir à régler les diviſions des vouſſoirs, de ſorte qu'on eſt obligé, ou de les développer pour l'étendre ſur une ſurface plane, & alors il devient primitif, ou de ſuppoſer un ceintre dans un plan tangent à la tour qui eſt un primitif ſuppoſé, parce qu'il ne doit pas ſubſiſter, ne ſervant qu'à déterminer les diviſions du réel, qui eſt le *ſecondaire*. Fig. 230.

Mais ſi l'on développe le ceintre réel R *m* D ſur un plan, pour en faire le ceintre primif, comme lorſqu'on veut que les têtes des vouſſoirs ſoient égales, le même ceintre, conſidéré comme appliqué à la ſurface courbe de la tour, eſt un ſecondaire, ſoit que la ſurface ſoit convexe, comme à la Figure 231,

ſoit qu'elle ſoit concave, comme à la Figure 232, où le ceintre ASD eſt ſuppoſé comme primitif, pour régler les diviſions du réel AMD dans le deſſein de l'épure ſeulement. Il faut remarquer que ſoit que ce ceintre primitif ſoit pris ſur la corde de l'arc concave d'une tour, ou ſur un plan tangent à la tour, parallele à cette corde, il n'en réſulte aucun changement au ceintre réel I *m a* (*Fig.* 231) ou AMD (*Fig.* 232), & que ce ceintre primitif ſuppoſé, eſt le même que celui de l'arc droit; de ſorte qu'on peut dire alors que l'arc droit eſt le ceintre primitif; mais ſi la diviſion ſe fait ſur un développement, il devient le ſecondaire, en ce que ſes diviſions en dépendent & deviennent inégales, lorſque celles du développé ſont égales.

Fig. 231. *Fig.* 232.

Si le ceintre primitif ſuppoſé n'étoit pas dans un plan parallele à la corde RD qui eſt perpendiculaire à la direction de la porte, comme L *b* qui lui eſt incliné, alors il y auroit trois ceintres à conſidérer, dont les diviſions ſeroient toutes inégales; ſçavoir, 1°. celles du ceintre primitif imaginaire; 2°. du ceintre réel à la ſurface de la tour; 3°. & du ceintre de l'arc droit dans l'épaiſſeur de la tour, & chacun de ces ceintres ſeroit d'une coubure différente; ſçavoir, circulaire ou elliptique & ellipſimbre: il faut expliquer ce que nous entendons par l'arc droit.

De l'arc droit.

Le ceintre qui eſt la ſection d'un plan coupant l'axe d'une voute en berceau à angle droit, s'appelle l'*arc droit*; tel eſt l'arc RED (*Fig.* 230) ou ROI (*Fig.* 235 *&* 237) ou ABD (*Fig.* 239). Ce genre de ceintres peut être *primitif* ou *ſecondaire*, ſuivant l'attention principale que l'on a aux faces, ou à l'intérieur d'une voute. Dans les Figures 230 & 235, il ſemble être naturellement le ſecondaire, ſi l'on a principalement en vûe la régularité du ceintre de face apparente ABD. Dans la Figure 239 il eſt primitif, ſi ABD eſt la face apparente, parce qu'elle eſt perpendiculaire à la direction du berceau.

D'où il ſuit, 1°. que l'arc-droit n'eſt à plomb que dans les voutes horiſontales, & qu'il eſt en talud & ſurplomb dans les inclinées, comme ROI, (*Fig.* 235).

Secondement, qu'il n'eſt jamais parallele aux arcs de faces biaiſes à la direction des berceaux, ſoit qu'ils ſoient de niveau, ou en deſcente, comme on voit aux Figures 230 & 235, où l'arc RED, ROI n'eſt pas parallele à ABD.

Troiſiemement, que l'arc droit de toutes les voutes biaiſes & en deſcente, n'eſt pas d'une courbure ni d'une largeur ou hauteur égale à celle de l'arc de face. Ainſi (*Fig.* 230) ſuppoſant l'arc de face circulaire, l'arc droit RED ſera ſurmonté elliptique, dont le petit axe RD ſera plus court que le diametre AD; & au contraire (à la Figure 235) ſi ABD eſt circulaire ROI ſera elliptique ſurbaiſſé, dont le demi axe O*c* ſera plus petit que le rayon BC. Pl. 19.

Quatriemement, qu'il ne peut y avoir d'arc droit, proprement dit, dans une voute conique, comme dans les trompes, (*Fig.* 236) parce que la ſurface de ſa doële ne peut être à angle droit ſur aucun plan, que ſuivant une ligne tirée de ſa baſe au ſommet du cone, dont les côtés ſont convergens.

Cependant le P. DERAND appelle *arcs droits* les *biveaux*, c'eſt-à-dire, les angles de la doële & des lits.

Quelques-uns ont auſſi appellé arc droit le ceintre primitif perpendiculaire à l'axe du cone, parce qu'on s'en ſert comme de l'arc-droit pour la diviſion des vouſſoirs.

Il ſemble par ce que je viens de dire, qu'il n'y a point d'arc droit dans les voutes courbes par leur projection horiſontale; mais ſi l'on fait attention que l'angle que fait un rayon avec un arc au point d'attouchement de ſa tangente eſt réputé droit, ou infiniment peu différent du droit, on reconnoîtra facilement quels ſont les arcs droits des voutes ſphériques, ſphéroïdes & annullaires.

1°. Que tout cercle majeur d'une ſphere ABD (*Fig.* 233) eſt un arc droit. *Fig.* 233.

2°. Que dans les ſphéroïdes il y en a deux; ſçavoir, *a S b* qui eſt perpendiculaire à l'axe qui paſſe par les poles du premier, perpendiculairement au plan de la baſe ou projection du ſphéroïde, comme P, *b*, *p*, *a* (*Fig.* 234) & le ſecond ſera PS*p*. *Fig.* 234.

3°. Que l'arc-droit d'une voute *annullaire* eſt celui dont le diametre tend au centre de l'anneau, s'il eſt circulaire, comme RI (*Fig.* 238), lequel eſt perpendiculaire à la tangente TN, & au plan de la projection ADFE, ſoit que la voute ſoit horiſontale, comme la *voute ſur le noyau*, ou qu'elle ſoit inclinée à l'horiſon, comme la vis-Saint-Giles. *Fig.* 238.

Si l'anneau eſt elliptique, comme la voute ſur un noyau ovale, ſon arc droit ſera la ſection verticale, perpendiculaire à la tangente au point de diviſion de l'ellipſe, qui eſt la projection

d'un joint de lit ; il en ſera de même pour la vis-Saint-Giles ſur un plan ovale ; alors la direction du diametre de l'arc droit ne tend plus au centre du noyau.

USAGE.

On connoîtra dans la ſuite que l'arcdroit eſt indiſpenſablement néceſſaire pour trouver les biveaux & faire les panneaux ; c'eſt lui ſeul qui détermine les angles mixtes des doëles & des joints, & qui ſert à faire les développemens des ſurfaces courbes des cylindres, parce qu'étant perpendiculaire à toutes les paralleles à l'axe, dont le nombre infini forme la ſurface des berceaux, il donne ſeul les meſures des largeurs de ces ſurfaces, & par conſéquent les intervalles des joints de lit, qui ſont patalleles à l'axe du cylindre : il en eſt de même à l'égard des cylindres pliés ſur leurs axes, d'une courbe circulaire ou elliptique, comme dans les voutes ſur le noyau.

REGLES DU DESSEIN DE L'ÉPURE.

I.

Du plan, ou de la projection horiſontale.

DAns toutes les voutes où l'arc droit & l'arc de face ſont inégaux, il faut commencer par *ſe déterminer ſur le choix d'un des deux pour en faire le ceintre primitif.*

La ſimétrie, la beauté, ou la ſolidité étant les motifs de ce choix, il ne ſera pas difficile de ſçavoir lequel il convient de préferer. Lorſqu'une face eſt apparente, il en faut faire le ceintre primitif, afin que les têtes des vouſſoirs ſoient égales, & que leurs joints ſoient dirigés ſuivant les perpendiculaires à leurs tangentes aux points de diviſion, ſi le ceintre eſt circulaire, elliptique ou de quelqu'autre courbe ; mais ſi les faces ſont cachées, comme lorſqu'une voute eſt terminée par deux murs, il eſt plus commode de prendre l'arc-droit pour le primitif ; car il faut remarquer que ſi l'un eſt circulaire & l'autre elliptique, celui qui ſera pris pour primitif réglera les joints de l'autre en fauſſe coupe, à moins que l'on ne faſſe les lits gauches, parce

que les joints de tête du circulaire tendent à l'axe du berceau, & les joints de tête du ceintre elliptique ne tendent pas au centre de l'ellipſe par où paſſe l'axe du cylindre ; de ſorte que les lits changeroient d'inclinaiſon inſenſiblement, ce qui donneroit un lit gauche, & que l'on doit éviter dans la pratique, à cauſe de la difficulté de l'exécution.

Remarque ſur le choix du ceintre primitif aux voutes extradoſſées.

Un Architecte eſt aſſez le maître de choiſir pour ceintre primitif l'art de face, ou l'arc droit, lorſqu'une voute n'eſt pas extradoſſée ; mais lorſqu'elle l'eſt, il ne convient pas toujours qu'il choiſiſſe l'arc de face ; car s'il s'agit d'un berceau ou d'une voute conique biaiſe, dont l'arc de face ſoit circulaire, il eſt évident (par le Théorême II. du Ier. Livre que) l'épaiſſeur deviendra plus grande à la clef qu'aux impoſtes ; de ſorte que les vouſſoirs y deviendront plus peſans qu'aux impoſtes, ce qui eſt contre la bonne conſtruction, & ce que cependant aucun Auteur de la coupe des pierres n'a remarqué ; il convient donc alors de choiſir l'arc droit pour centre primitif, le faiſant circulaire, ou ſi l'on veut un peu ſurmonté. *Fig.* 203.

SECONDE REGLE.

Diviſer le ceintre primitif en autant de parties égales qu'on veut avoir de rangs de pierres ou vouſſoirs, & régulierement en nombre impair.

Cette opération conſidérée géométriquement, eſt preſque toujours impoſſible, parce qu'elle dépend de la triſection de l'angle qu'on n'a pas encore trouvée ; mais cette préciſion eſt inutile dans les Arts, il ſuffit de chercher ces diviſions en tâtonnant, d'autant plus qu'elles ſont arbitraires, puiſqu'on peut faire ſans difformité des voutes de pierres d'une largeur inégale, pourvû que chaque rang ſoit exactement parallele, & que la différence des largeurs ſoit peu ſenſible.

Nous ajoutons que les diviſions doivent être en *nombre impair*, afin qu'il ne ſe trouve point de joint au milieu du ceintre ; mais une pierre également appuyée ſur les deux côtés de la

voute qu'elle doit fermer dans l'exécution, on l'appelle pour cette raiſon *la clef*, nom qui n'eſt pas affecté à une ſeule pierre, mais au rang de vouſſoirs qui eſt le plus élevé: ce n'eſt pas qu'un joint ſur le milieu d'un ceintre tirât beaucoup à conſéquence pour la ſolidité; mais il choqueroit la vûe & la bonne ordonnance.

Il en faut cependant excepter les pans des voutes ſphériques établies ſur un quarré; on doit leur tracer un joint au milieu dans l'épure ſeulement, mais non pas dans l'exécution, parce que ce joint n'eſt que l'angle d'un vouſſoir qui fait enfourchechement, dont les branches ſe réuniſſent à cette ligne du ſommet; c'eſt pourquoi on diviſe le nombre des vouſſoirs de chaque côté en parties égales.

Par la même raiſon de ſimétrie, il ne convient pas de diviſer le côté d'un ceintre, depuis la clef juſqu'à l'impoſte, en plus grand nombre de vouſſoirs que l'autre, à moins que les impoſtes ne ſoient pas de niveau entr'elles, comme dans les arcs rampans, ou que la quantité des vouſſoirs ſoit aſſez grande de chaque côté, pour qu'on ne s'apperçoive pas d'un rang de plus ou de moins; c'eſt pourquoi les arcs rampans peuvent être diviſés en nombre pair.

La raiſon pour laquelle il faut commencer par la diviſion du ceintre primitif, eſt qu'il faut avoir la projection horiſontale des joints de lit de chaque rang de vouſſoir, qu'on ne peut tailler qu'après en avoir déterminé les largeurs par le nombre qu'en doit contenir le contour du ceintre, & que lorſque les voutes ſont biaiſes, ces largeurs de tête deviennent inégales, ſoit dans les arcs de face, ſoit dans les arcs-droits qui ne ſont pas paralleles entr'eux; de ſorte qu'il faut prévoir ce que la largeur d'une tête biaiſe doit donner à l'arc droit, ou ce que celle de l'arc droit donnera d'augmentation à l'arc de face biaiſe.

TROISIEME REGLE.

Diviſer les arcs extérieur & intérieur du ceintre primitif, qui comprennent l'épaiſſeur de la voute, en parties proportionelles par des perpendiculaires à ces arcs aux points de leurs diviſions, pour régler l'inclinaiſon des joints de tête.

Nous avons donné au II Livre, Problêmes 26, 27 & 28, la

la maniere de tirer ces lignes, qu'on appelle les *joints de tête*, comme 1 1, 2 2, 3 3, 4 4 (*Fig.* 237, 238, 239 & 240) non-seulement pour les ceintres circulaires, mais aussi pour toutes sortes de courbes des sections coniques, & nous avons fait voir que la pratique des ouvriers n'est pas exacte pour d'autre courbe que pour le cercle. Pl. 19.

Sur quoi il y a trois choses à remarquer. La premiere, que l'on doit tirer les joints de tête perpendiculairement aux tangentes des courbes des ceintres, aux points de leur division, dans les arcs de face seulement, où l'on a la liberté de les incliner comme l'on veut; mais non pas aux ceintres elliptiques des arcs-droits lorsqu'ils sont secondaires, parce que les lits des voussoirs ne seroient pas continués dans un même plan, comme nous l'avons dit ci-devant.

La deuxieme, que lorsque le ceintre primitif est circulaire, les joints du secondaire elliptique, doivent être tirés au centre de l'ellipse, plutôt que perpendiculairement à la tangente sur la division, parce que les plans des lits doivent tous s'entrecouper dans l'axe du berceau cylindrique, comme on l'enseignera au IVe. Livre de différentes manieres.

La troisieme, qu'aux arcs de face elliptiques, il faut se contenter de faire les joints de tête perpendiculaires aux arrêtes de doële, parce qu'on ne peut les faire en même-tems perpendiculaires à celle de l'extrados d'une ellipse concentrique semblable, que par le moyen d'une courbe qui ne convient ni au joint de tête ni au lit, qu'il faut affecter de faire toujours plan. La raison est que les arcs des ellipses asymptotiques, c'est-à-dire, concentriques & semblables, ne sont pas paralleles comme ceux de deux cercles, par conséquent la perpendiculaire à la tangente de l'une ne peut se réunir avec celle de l'arc proportionnel de l'autre.

La premiere raison sur laquelle est fondée cette division proportionelle de l'arc extérieur & de l'intérieur, qui comprennent l'épaisseur de la voute, concerne la solidité, parce que les têtes des voussoirs deviennent par cette construction en forme de coin plus large du côté extétieur que de l'intérieur; la circonférence de l'un étant plus grande que celle de l'autre, les parties aliquotes en sont aussi plus grandes, de sorte que la pierre ne peut passer par l'ouverture inférieure de l'intervalle de deux voussoirs, qui est plus étroit à la doële qu'à l'extrados;

ainſi étant preſſée par ſa peſanteur contre les vouſſoirs collatéraux, qui ſe ſervent mutuellement d'appui les uns aux autres, elle eſt ſoutenue en l'air par la réſiſtance des derniers appuis, qui ſont les piédroits, leſquels doivent avoir aſſez de force pour contrebalancer l'effort que ces vouſſoirs ou eſpeces de coins font pour les écarter.

Nous avons encore deux autres raiſons de cette conſtruction; la premiere concerne la ſimétrie, afin de conſerver toujours une inclinaiſon uniforme des joints de tête ſur la courbe du ceintre; car quand même les parties de l'arc extérieur & de l'intérieur ne ſeroient pas proportionnelles, la voute n'en ſubſiſteroit pas moins, pourvû que celles de l'intérieur ſoient toujours plus petites que celles de l'extérieur; il n'en réſulteroit d'inconvénient que de la difformité, & une inégale impulſion des vouſſoirs contre leurs collatéraux.

La ſeconde raiſon eſt pour une plus grande ſolidité, parce que les plans qui paſſent par les joints de tête, qu'on appelle les lits, étant perpendiculaires à la tangente de l'arc au point de ſa diviſion, ſont avec la doële de part & d'autre le plus grand angle qu'ils puiſſent faire, qui eſt le droit, ou infiniment peu différent du droit; car ſi on le faiſoit obtus d'un côté, il rendroit l'autre aigu.

Or il importe que les réſiſtances des *arrêtes*, c'eſt-à-dire des angles des pierres, ſoient égales pour porter également la charge, car il eſt clair que la plus forte feroit caſſer la plus foible, comme l'expérience le fait voir aux platebandes, où l'on eſt forcé d'en agir autrement; ce que nous ferons remarquer au Livre ſuivant, en donnant les moyens d'y remédier.

QUATRIEME REGLE.

Abaiſſer des perpendiculaires de chacun des points de diviſion de l'arc extérieur & de l'intérieur ſur le diametre commun prolongé où il le faut, pour en avoir la projection ſur une ligne droite.

Fig. 237. 238 & 239. Soient (*Fig.* 237, 238 & 239) les arcs ABD extérieur, & *a b d* intérieur, diviſés en parties proportionnelles A 1, 1 2, 3 4, & *a* 1, &c. par les lignes 1 1, 2 2, 3 3, 4 4, on abaiſſera ſur le diametre commun *a d*, & ſur ſon prolongement AD des perpendiculaires de chaque point de diviſion 1, 2, 3, 4, leſquel-

les pour l'arc extérieur (*Fig.* 239) ſeroient 1 E, 2 F, 3 G, 4 H, & pour l'intérieur 1 *e*, 2 *f*, 3 *g*, 4 *h*, pour avoir les projections des diviſions de l'arc extérieur aux point E, F, G, H, & de l'intérieur aux points *e*, *f*, *g*, *h*. Pl. 19. *Fig.* 239.

Les perpendiculaires dont il eſt ici queſtion, ſont ordinairement en œuvre des verticales, c'eſt-à-dire, en termes de l'art des *à-plombs*; & lorſque le diametre du ceintre n'eſt pas horiſontal, comme il arrive aux arcs rampans, au lieu du diametre on ſubſtituera une ligne horiſontale, juſqu'à laquelle on prolongera ces perpendiculaires au-deſſous du diametre incliné.

La raiſon de cette opération eſt qu'elle fournit une maniere commode de trouver l'inclinaiſon de chaque corde des arcs du ceintre diviſé en vouſſoirs, en ce que chacune de ces cordes devient l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection donne la longueur de la jambe horiſontale *a e* pour le premier de l'intérieur a *e* 1 (*Fig.* 239) & *ef*, ou ſon égale 1 *K* pour le ſecond triangle 1 K 2; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à trouver la hauteur de l'autre jambe du triangle rectangle *e* 1 ou K 2, pour avoir les deux extrêmités de l'arc, ou de ſa corde, *a* & 1, ou 1 & 2 pour avoir ſa poſition à l'égard de l'horiſon; ce que la différence des perpendiculaires ſur le diametre donne facilement, en retranchant de la hauteur 2 *f* la premiere hauteur *e* 1.

Il eſt viſible que ces différences de hauteurs ou ces hauteurs à l'impoſte *a* ſont les ſinus droits de l'inclinaiſon des cordes des diviſions des ceintres, & que les lignes horiſontales trouvées par la projection *a e*, *ef* ſont leur ſinus de complément.

Or, avant que de creuſer les arcs dans la pierre, on commence toujours par en trouver les cordes, pour pluſieurs raiſons, qu'on verra dans la ſuite. Cette pratique eſt la fondamentale de toutes les projections, on la trouvera répetée à chaque trait de la coupe des Pierres au IVe. Livre; *c'eſt pourquoi il eſt bon d'y faire attention.*

Il faut remarquer que quoique les lignes qui font la projection des arcs ſoient verticales dans l'exécution, il n'importe dans le deſſein de l'épure en quelle ſituation on les trace, pourvû qu'elles ſoient toujours perpendiculaires à une ligne ſuppoſée horiſontale.

Cet avertiſſement n'eſt pas inutile pour les Commençans qui trouvent étrange que dans l'épure on place les ceintres quel-

Fig. 239. quefois dans une ſituation renverſée, ou pour la commodité de l'arrangement de la Figure, à laquelle on joint le plus ſouvent les parties contigues, ou pour éviter la confuſion des lignes qui ſe croiſent, ou pour s'accommoder à la place du papier ou du mur ſur lequel on fait le trait.

L'imagination doit redreſſer les plans couchés ſur d'autres plans, avec leſquels ils doivent faire des angles droits, aigus ou obtus; or en quelque ſituation qu'on les ſuppoſe, les perpendiculaires à leur commune interſection donneront toujours les mêmes points de projection des arcs; ainſi (*Fig.* 239) ſi l'on ſuppoſe les arcs BD, MD & *b d*, *p d* égaux entr'eux, & également diviſés aux points 3, 4, *o* & *n*, il eſt évident que les perpendiculaires tirées à leur interſection commune CD, donneront les mêmes points de projection *g* & *h* pour les points *o* & *n*, comme pour les points 3 & 4; ainſi dans les traits, on trouvera des ceintres placés indifféremment en tout ſens, ſuivant la commodité de la figure & du papier.

CINQUIEME REGLE.

Mener par les points de projection des diviſions des ceintres, des lignes droites ou courbes, comme il convient à la direction des joints de lit de chaque eſpece de voute, qui en expriment la projection.

Fig. 237. & 238. Soit (*Fig.* 237 & 238) la ligne *a d*, le diametre d'un ceintre ſur lequel on a trouvé par la projection les points *e*, *f*, *g*, *h*, qui expriment les diviſions des joints 1, 2, 3, 4, ſi la voute eſt cylindrique comme à la Figure 237; pour trouver la direction des joints de lit, & la tracer, il ne s'agit que de mener des paralleles à l'axe, ou aux côtés du berceau par les points *e*, *f*, *g*, *h*, comme *e k*, *f l*, *g m*, *h n*, & ſi le berceau n'eſt pas droit, mais tournant, comme une voute ſur le noyau circulaire (*Fig.* 238) au lieu de lignes droites, on tirera des arcs de cercles concentriques à ſes côtés, ou des arcs d'ellipſes, ſi cette voute tourne en ellipſe, & l'on aura la direction des joints de lit, comme *e k p*, *f L q*, *g m r*, *h n s*.

Fig. 233. Si la voute eſt ſphérique, comme à la Figure 233, du point C pour centre, il faut décrire autant de cercles concentriques par les points de projection des joints; on aura de même la direction de ces joints, qui eſt encore parallele aux piédroits de la voute.

Enfin ſi la voute eſt conique, comme à la Figure 240, ayant trouvé la projection des diviſions du ceintre primitif AMB, aux points F, D, N, O, on tirera par ces points & par le ſommet intérieur du cône S les lignes SF, SD, SN, SO, qui ſeront les directions des joints de lit. *Fig. 240.*

On voit par là que dès qu'on a la projection des diviſions du ceintre primitif, on a auſſi la direction des joints de lit exprimée ſur le plan horiſontal.

Il faut ſeulement excepter de cette remarque les voutes ſphériques ou ſphéroïdes, dont les joints de lit ſont dirigés à des poles horiſontaux, parce que leurs projections ſont des ellipſes qui ſe croiſent aux poles, comme les ſommets de deux cônes égaux tournés en ſens contraire ſur un axe commun, qu'on pourroit inſcrire dans le ſphéroïde.

La raiſon de cette opération eſt que les vouſſoirs doivent être couchés ſuivant leur plus grande longueur dans une ſituation horiſontale, ou qui en approche autant qu'il eſt poſſible, pour leur donner une meilleure aſſiette; or lorſqu'ils ſont rangés ſuivant la direction d'un berceau horiſontal, où ils ſont toujours horiſontaux dans un ſens, ils s'appuyent totalement ſur leurs lits; mais dans les voutes inclinées, ils appuyent ſur leurs têtes, quelquefois autant que ſur leurs lits.

Secondement, on prolonge la direction des joints de lits dans la longueur, ou dans le circuit de la voute, afin de leur donner la grace d'une ſimétrie de lignes droites ou courbes paralleles aux impoſtes, leſquelles font une eſpece d'ornement dans les voutes ſphériques; & ſi on s'écarte de cette diſpoſition en inclinant les joints, c'eſt encore pour en faire un ornement plus ſingulier par un arrangement d'arcs.

On pourroit obſerver une pareille ſimétrie à l'égard des joints montans, qu'on appelle joints de doële, qui les traverſent, comme je l'ai vû exécuté au Pont d'Avignon ſur le Rhône, dans la partie qui ſubſiſtoit ſur le petit bras de la Riviere; mais il en réſulte deux inconvéniens, l'un pour la conſtruction, en ce que l'on n'a pas la liberté d'y employer des pierres de longueurs inégales, l'autre pour la ſolidité, parce que les parties ne ſont pas liées enſemble; de ſorte que, dans l'exemple que je viens de citer, le quart, la moitié & même les deux tiers du Pont pouvoient tomber ſans entraîner le reſte, ce que l'Architecte avoit peut être fait à deſſein.

Il peut encore arriver qu'une partie de voute s'affaiſſe davantage en ôtant les ceintres que les voiſines, dont l'appareil a pu être mieux exécuté, & que cela faſſe ainſi des inégalités dans la doële ; enfin l'uſage eſt de prolonger par une ſuite réguliere les joints de lit, & non pas ceux de doële, qui ne doivent faire aucune ſuite que lorſqu'on veut affecter de la déliaiſon.

Les lignes de la projection des joints de lit, quoique ſimples dans l'épure, ſont la repréſentation de trois lignes de la voute ; ſçavoir, de l'intervalle vuide qui reſte entre deux vouſſoirs, que l'on remplit quelquefois de mortier, & des deux angles ou arrêtes de ces deux vouſſoirs, qui ſe touchent à la ſurface de la doële ; c'eſt pourquoi ou les appelle en termes de l'art *le plan des arrêtes des joints de lit* : diction impropre qu'on ne peut adopter, puiſqu'on ne peut dire le plan d'une ligne, mais bien la *projection* d'une ligne.

L'on verra au Livre ſuivant de quel uſage ſont les projections des joints de lit ; nous dirons ſeulement à l'égard des voutes cylindriques, qu'elles ſervent à couper proportionnellement les diametres des différens ceintres, ſur leſquels élevant des perpendiculaires égales à celles qui tombent des diviſions du ceintre primitif, on trouve les hauteurs & les diviſions des joints de chaque ceintre ; ainſi (*Fig.* 239) à cauſe des paralleles *ap*, *ee*, *ff*, &c. les diametres *ad* & *pq* ſont diviſés proportionellement, de même que *pq* & *rs* ; de ſorte que le diametre *ad*, projection de l'arc primitif *a*, *b*, *d*, eſt diviſé proportionellement, au diametre *rs* ; & parce que les hauteurs du berceau ſont ſuppoſées égales par tout, en faiſant *yt*, *zu* égales à *e*1, *f*2, on aura les diviſions du troiſieme ceintre ; ce qui ſera expliqué plus au long dans la ſuite.

Fig. 239.

Si après avoir fait la projection des joints de lit de la doële ou intrados, on en fait autant pour ceux de l'extrados ; on trouvera les points des diviſions des ceintres extérieurs, leſquels étant joints par une ligne aux intérieurs, donneront l'inclinaiſon des plans des lits. Mais pour ne pas multiplier les lignes, on ne tire ces projections que dans le beſoin ; nous les omettons preſque toujours dans cet Ouvrage, pour éviter la confuſion dans les traits de l'épure, où elles cauſent un embarras qui n'eſt pas un petit obſtacle à l'intelligence des traits de la coupe des pierres.

Pour faire la projection des joints de lit des voutes coniques,

dont les ſommets ſont loin, ou ſeulement hors de l'étendue de la ſurface ſur laquelle on la veut tracer, il ne ſuffit pas d'avoir la projection des joints d'un ceintre primitif, il en faut un ſecond, parce que ces lignes n'étant pas paralleles entr'elles, doivent tendre à un point qui eſt le ſommet du cone; & ſi le ſecond ceintre n'étoit pas parallele ou ſemblable au primitif, on pourroit être embaraſſé pour alligner ces joints, dont il n'y a qu'un ſeul point donné par la projection ſur le diametre du ceintre primitif; voici un moyen aiſé de le faire.

PROBLEME I.

Par un point donné auprès de deux lignes convergentes, en mener une troiſieme qui tende au même ſommet de l'angle qu'elles feroient ſi elles étoient prolongées.

Soient (*Fig.* 241 *&* 242) les lignes AB & CE inclinées entr'elles, & le point D entre les deux ou au-dehors; on tirera à volonté par ce point la ligne DAC (*Fig.* 242) ou ADC (*Fig.* 241) qui coupe les deux lignes données en A & en C; on lui menera enſuite une parallele BE, à telle diſtance qu'on voudra, & les diagonales AE, BC par les points où cette parallele coupe les lignes données. Du point D par H, ſection des diagonales, on tirera DG, & tranſportant la grandeur GE, de B en X, on tirera DX qui ſera la ligne cherchée. *Fig.* 241 & 242.

DEMONSTRATION.

A cauſe des triangles ſemblables ADH, EGH, on a AD: EG:: AH: EH, & les triangles ſemblables ACH, EBH donnent AH : EH :: AC : BE; donc auſſi AD : EG ou BX :: AC : BE; *ce qu'il falloit faire.*

SIXIEME REGLE.

Les lits des voutes cylindriques & coniques doivent être, autant qu'il eſt poſſible, des ſurfaces planes.

La raiſon eſt, que la ſurface plane étant la plus ſimple, elle eſt par conſéquent la plus facile à exécuter, & la plus propre à

s'adapter ſur une ſemblable ; en ſorte que l'intervalle des joints devienne le moindre qu'il eſt poſſible dans l'exécution. On éprouve en effet que lorſque les ſurfaces ſont courbes aux lits & aux joints, elles ſont rarement aſſez bien exécutées dans leur concavité ou leur convéxité pour que l'une s'ajuſte bien dans l'autre ; on eſt toujours obligé d'y retoucher, & de les préſenter ſouvent pluſieurs fois avant que l'une & l'autre ſurface s'ajuſtent bien enſemble. C'eſt par cette raiſon, que plutôt que de faire des lits gauches, on aime mieux les faire en fauſſe coupe, comme dans les deſcentes biaiſes, & dans ce trait qu'on appelle *la corne de vache*, où l'on tire les joints du centre du petit ceintre, lequel étant excentrique au grand, ne peut avoir pour joint la même ligne, puiſque le rayon du petit ne peut pas être perpendiculaire aux arcs du grand, dont les rayons partent d'un autre point.

On pourroit cependant excepter certaines voutes irrégulieres, comme des berceaux elliptiques par un bout, & circulaires par l'autre, dont les faces ſont apparentes ; parce qu'outre la difformité qui en réſulteroit ſur chaque face, où les joints de tête ſeroient en fauſſe coupe, les lits plans pourroient couper les doëles à angles trop aigus, qui ſeroient ſujets à faire caſſer les arrêtes des vouſſoirs en les taillant, en les poſant, ou à la ſeule charge.

SEPTIEME REGLE.

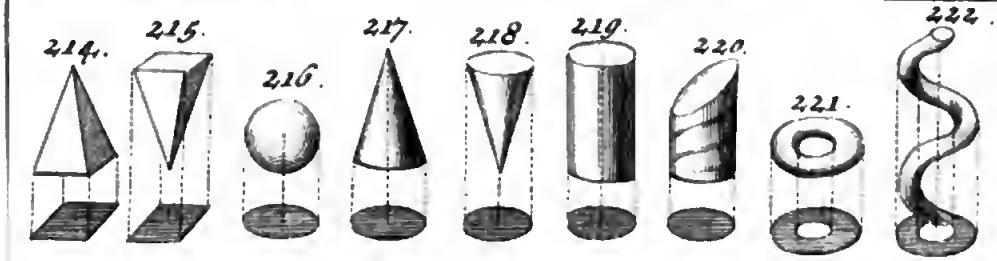
Les lits des voutes ſphériques ou ſphéroïdes ſont des ſurfaces courbes.

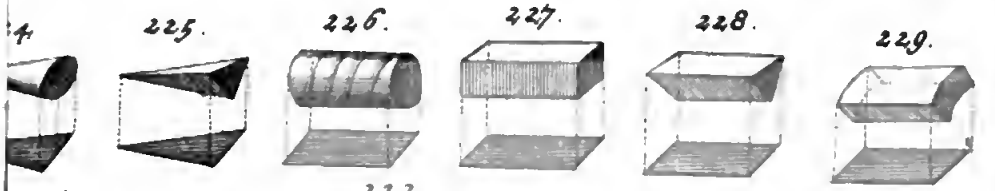
Fig. 233. La raiſon eſt, qu'ils ſont formés par la révolution des joints de tête *e* 1, *f* 2, *g* 3, autour de leur axe BC auquel ils ſont inclinés ; d'où il ſuit qu'ils ſont alternativement concaves & convexes pour s'adapter les uns dans les autres, comme des cornets.

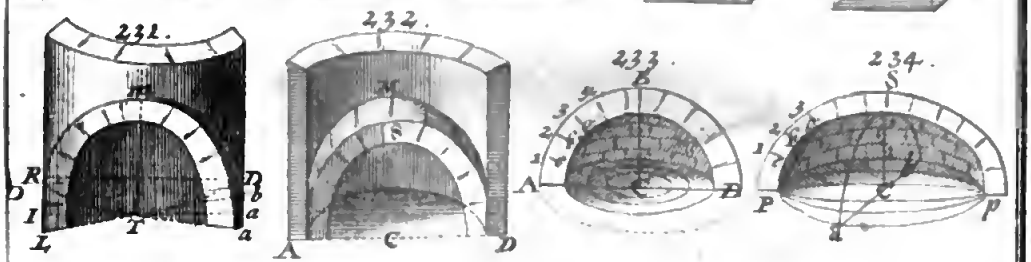
REMARQUE.

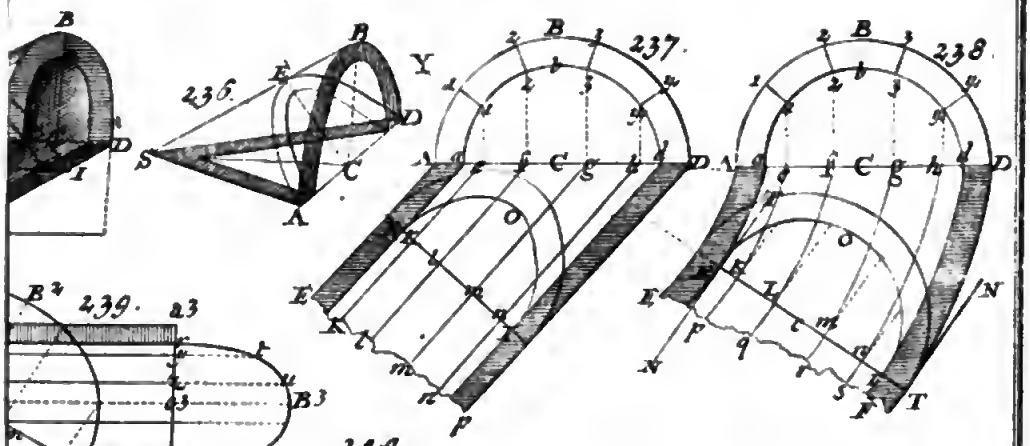
Les lits des voutes cylindriques, ſphériques, & coniques régulieres ſont des ſurfaces qui ont toujours deux côtés paralleles, ſoit qu'elles ſoient planes, ou qu'elles ſoient courbes.

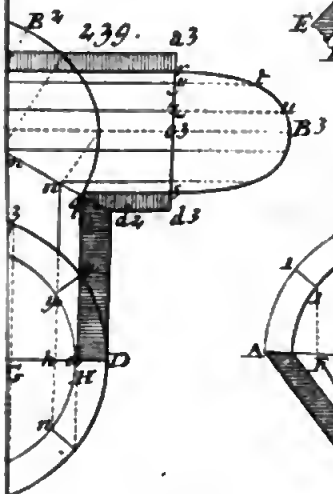
La raiſon eſt, que les voutes ſont ordinairement d'une même épaiſſeur ; or comme les lits s'étendent du dedans au dehors, ils

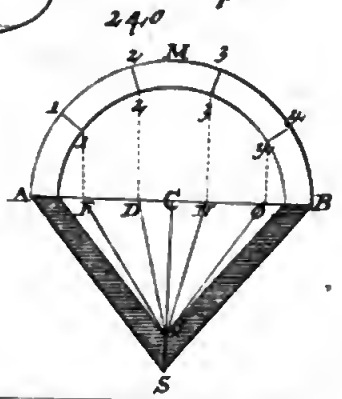


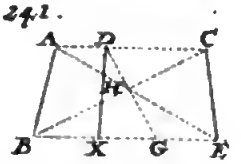


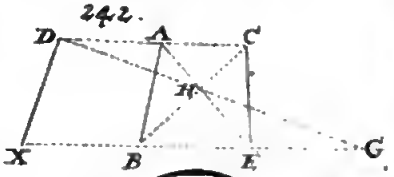












BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

ils ſont terminés d'un côté par la doële, & de l'autre par l'extrados, qui ſont paralleles, au moins horiſontalement.

Et quoique la voute ne ſoit pas extradoſſée d'une égale épaiſſeur, ſi elle eſt cylindrique & qu'elle s'épaiſſiſſe vers les reins, (ſuivant la courbe que M. PARENT a trouvé pour balancer la pouſſée par l'augmentation d'épaiſſeur des vouſſoirs, dont on parlera au IVe. Livre) il ſeroit encore vrai que les lits auroient deux côtés paralleles entr'eux, parce que cette épaiſſeur coupée ſuivant la direction de la voute, ſeroit toujours la même à chaque lit, la différence ne tombant que ſur les ſurfaces des joints de doële ou de tête, & non pas ſur les lits, où la puiſſance qui réſiſte au poids doit toujours être égale, à égale diſtance du point d'appui.

HUITIEME REGLE.

Pour connoître ſi l'on peut prendre des meſures ſur une projection, il faut examiner ſi l'objet qui eſt projetté, étoit parallele au plan de deſcription.

Nous avons donné la raiſon de cette regle, lorſque nous avons démontré que la projection faite par des lignes perpendiculaires à un plan, racourciſſoit toujours l'objet projetté, qui n'étoit pas parallele à ce plan, parce que ſa longueur étoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont la projection n'eſt que le côté. C'eſt par cette raiſon, que pour avoir les meſures des vouſſoirs des deſcentes biaiſes, il en faut faire deux projections, l'une horiſontale qui donne des meſures trop courtes, & l'autre ſuivant la rampe ſur un plan qui lui ſoit ſuppoſé parallele. Ainſi l'on verra dans le IVe. Livre, que quoique la maniere de tracer une voute en deſcente biaiſe rachetant un berceau par équariſſement, ſoit la même que celle de tracer une porte biaiſe en ſurplomb, il faut meſurer le biais de la porte ſur le plan de niveau, & celui de la deſcente ſur le plan incliné, appellé *plan ſuivant la rampe*, parce que le plan de niveau eſt trop court; ce qui fait voir la néceſſité de faire un profil des rampes, ou ce qui eſt la même choſe, leur projection ſur un plan vertical, pour faire enſuite une nouvelle projection ſur un plan incliné, par le moyen duquel on puiſſe trouver les meſures des vouſſoirs, dont les joints de lit ſont paralleles à la rampe.

CHAPITRE III.

De l'Ortographie, ou de la projection ſur un plan vertical.

I°.

DU PROFIL.

ON ne peut trouver par le moyen de la projection horiſontale ou *plan* ichnographique, que des meſures horiſontales, comme nous venons de le dire; mais parce qu'on a auſſi beſoin des meſures verticales, & quelquefois des projections ſur un plan incliné, qu'il faut rapporter à un plan vertical, cette maniere de deſſein, qu'on appelle *profil*, n'eſt pas moins néceſſaire que la précédente, qu'on appelle *le plan*.

La projection verticale change de nom, ſuivant la ſituation dans laquelle on repréſente les objets; s'ils ſont repréſentés par le côté, ſuivant leur profondeur on l'appelle *profil*; s'ils ſont repréſentés dans leur intérieur, ſuivant une longueur parallele à leur ſurface qu'on ſuppoſe ôtée, on l'appelle *coupe*; & s'il ſont vûs en face, on l'appelle *élévation*.

Cette différence qui ne conſiſte que dans la dénomination, n'en fait aucune dans la maniere de faire les repréſentations. C'eſt toûjours une projection ſur un plan vertical, & à bien prendre la choſe, c'eſt encore la même que pour faire la projection horiſontale; car il n'y a qu'à ſuppoſer une poſition de plan vertical, au lieu d'un plan horiſontal, & mener ſur ce plan des lignes horiſontales au lieu de verticales, par les angles ou diviſions de l'objet. S'il ne s'agiſſoit ici d'introduire le Lecteur dans les principes d'un art, dont il faut lui donner des idées diſtinctes, nous aurions confondu le plan, le profil & l'élévation ſous le même nom de *projection*; car les regles qui en conſtituent la différence ne ſont purement qu'accidentelles.

PREMIERE REGLE.

Pour les voutes cylindriques.

Un ceintre ſuppoſé en ſituation verticale étant donné, il faut mener par tous les points de ſa diviſion en vouſſoirs des lignes horiſontales, juſqu'à la rencontre d'une ligne verticale ou ſuppoſée telle, pour en faire le profil.

Cette regle ne differe de la quatrieme du Chapitre précédent, qu'en ce que ces lignes ne ſont pas menées ſur le diametre horiſontal, mais ſur une ligne qui lui eſt perpendiculaire, comme AE (*Fig.* 243) ſur le rayon CA, ſur laquelle on a mené les paralleles à l'horiſon BE, $4f$, $3g$, $2h$, $1i$, pour avoir les hauteurs des points 4, 3, 2, 1, raſſemblées ſur cette ligne AE. Pl. 10. *Fig.* 243.

On pouvoit au lieu des horiſontales BE, $4f$, $3g$, &c. abaiſſer des perpendiculaires $4p$, $3q$, $2r$, $1s$, comme l'on a fait ci-devant pour la projection horiſontale, & tranſporter avec le compas la longueur de chacune de ces lignes ſur AE, à commencer du point A; ſçavoir, $p4$ en Af, $q3$ en Ag, &c. & l'on auroit eu les mêmes points E, f, g, h; mais il convient pour la pratique de les chercher par des perpendiculaires ſur AE, parce qu'elles en font connoître les origines, & le point de diviſion qu'on a voulu repréſenter. Cette méthode empêche la confuſion, d'autant plus que chaque point de la ligne AE en repréſente toujours deux, lorſque les ceintres ſont également diviſés dans chacune de leurs moitiés, comme ils le ſont ordinairement, ou doivent l'être pour plus de régularité; ce qui fait que dans nos Figures de profil, 243 & 244, nous ne mettons qu'un quart de cercle, qui eſt une moitié de ceintre, au lieu du demi-cercle qui fait un ceintre tout entier. On peut remarquer qu'il eſt indifférent de placer la verticale du profil hors du cercle, comme AE, à la Figure 243, ou dans le cercle, comme hR, à la Figure 245.

La raiſon pour laquelle on raſſemble ainſi toutes les hauteurs des diviſions d'un ceintre ſur une ſeule ligne, eſt premierement pour faire voir l'effet d'une voute vûe de côté, où les directions des joints de lit ſe reſſerrent à meſure qu'ils approchent du ſommet, quoiqu'en effet ils ſoient diſtribués autour du ceintre à diſtances égales.

Pl. 20. Secondement, pour changer la direction de ces joints, lorſque les berceaux ſont inclinés, comme à la Fig. 245, ou ſe rencontrent ſous quelque angle que ce ſoit, comme on voit à la Figure 244, ce qui détermine les hauteurs inégales des berceaux de même largeur, qui ſont inclinés entr'eux.

Troiſiemement, pour trouver les hauteurs des diviſions des ceintres des faces inclinées à l'horiſon; car en les ſuppoſant ſur un plan vertical, comme CBA (*Fig.* 244) & les raſſemblant ſur une ligne auſſi verticale CB; il ne s'agit plus que d'incliner cette ligne, comme en C *b*, dans la ſituation où elle doit être à l'égard de l'horiſon, c'eſt-à-dire, ſuivant ſon talud, & par des arcs de cercle B *b*, *f n*, *g m*, &c. on aura toutes les hauteurs de ces diviſions *b* V, *n u*, *m t* 1 *x*, *k y*, leſqu'elles ſont différentes des premiers BC, 4 *p*, 3 *q*, 2 *r*, 1 *s*, qui étoient plus grandes.

SECONDE REGLE.

Mener des paralleles à la direction des voutes en berceaux, par les points de leur projection ſur une ligne verticale, pour y marquer les joints de lit, & lorſque ces paralleles rencontrent une ligne de jonction de deux berceaux, reproduire ces mêmes lignes parallelement à la direction du ſecond berceau, & ainſi d'un troiſieme.

Fig. 244. & 245. Cette regle ſe comprendra facilement par l'exemple de la Fig. 245, où l'on a repréſenté une deſcente *h n p* R, & à la Figure 244, une autre HD, qui aboutit à deux berceaux horiſontaux EDC *b* dans le bas, & HG, c^3, b^3 dans le haut.

Ayant trouvé par la regle précédente les diviſions de la ligne C *b*, égales à CB, on tirera par les points trouvés *n*, *m*, *l*, *k*, les paralleles *n x*, *m y*, *l* Y, *k z*, juſqu'à la rencontre de la ligne ED, qui repréſente le plan de l'ellipſe commune aux deux cylindres EDC *b* & HD, & par les points *x*, *y*, Y, *z*, on tirera autant de paralleles à la ligne EH ou DG, qui donneront les intervalles des joints de lit du ſecond berceau, plus reſſerrés juſqu'à la ſeconde ligne HG, d'où on les reproduira parallelement à H b^3, direction du troiſieme berceau, où ils le ſeront encore plus. On continueroit de même pour les directions des lits d'un quatrieme, s'il y en avoit.

La raiſon de cette opération eſt que les joints de lit doivent être continués en ligne droite, parallelement à la direction des

piédroits des voutes & à leurs impoſtes : c'eſt pourquoi ils ſont repréſentés par des lignes paralleles dans le *profil*, comme nous l'avons dit du *plan* ; la ſeule différence eſt que les paralleles de la projection horiſontale ſe reſſerrent vers les impoſtes, & que dans le profil elles ſe reſſerrent vers la clef, & les intervalles de ces paralleles, meſurés perpendiculairement, ſont les ſinus droits de l'inclinaiſon des cordes des arcs de chaque vouſſoir, comme les intervalles des paralleles de la projection horiſontale, ſont les ſinus de leurs complémens. Ainſi ayant trouvé les uns & les autres par ces deux ſortes de projection, on a les deux jambes du triangle rectangle, dont l'hypotenuſe eſt la corde de l'arc du ceintre que comprennent les diviſions de chaque vouſſoir ; par conſéquent on a la poſition de cette corde à l'égard de l'horiſon, & l'angle qu'elle doit faire avec la corde de l'arc ſuivant, ſoit qu'il ſoit portion de cercle ou d'ellipſe.

TROISIEME REGLE.

Tranſporter toutes les perpendiculaires tirées des diviſions du ceintre primitif au rayon vertical, ſur le demi-diametre de chaque berceau, pour avoir la courbe des ceintres ſecondaires, tant des arcs-droits, que des inclinés.

Soit (*Fig.* 244) le quart de cercle CBA, moitié du ceintre primitif, diviſé à ſa circonférence aux points 1, 2, 3, 4 ; ayant tiré par ces points des perpendiculaires à ſon demi-diametre vertical, comme $1i$, $2h$, $3g$, $4f$, on les tranſportera ſur tous les différens demi-diametres des berceaux. 1°. Comme l'incliné en talud Cb. 2°. le vertical bV, qui eſt l'arc-droit. Fig. 244.

3°. L'incliné de rencontre ED.

4°. Le perpendiculaire à la direction c^2, b^2, qui eſt l'arc-droit de la deſcente HD.

5°. L'incliné de rencontre HG.

6°. Le vertical de ſortie c^3, b^3, qui eſt auſſi un arc-droit, en un mot par-tout où l'on voudra avoir le changement des ceintres que donnent les différentes ſections des plans paſſans par ces demi-diametres. Ainſi pour former le ceintre de l'arc-droit du berceau rampant HD ; ayant tiré à volonté la perpendiculaire b^2, c^2, qui coupera les paralleles originaires des points 1, 2, 3, 4, aux points d, d, d, on portera ſur chacune de

Fig. 144. ces paralleles les longueurs coreſpondantes au ceintre primitif AB, des ordonnées $1i$, $2h$, $3g$, $4f$, en $d1$, $d2$, $d3$, $d4$, & l'on aura l'arc-droit ſurbaiſſé b^2, a^2. On tranſportera auſſi les mêmes ordonnées perpendiculairement ſur les diviſions de la ligne HG, pour avoir l'arc de rencontre H, 3, i, g; enfin ſur la ligne c^3, b^3, comme le marquent les mêmes chiffres, pour avoir le dernier ceintre de face ſupérieure b^3, a^3. On obſervera la même conſtruction à l'égard de la ligne DE, ſi l'on vouloit avoir le ceintre de rencontre des différens berceaux, avec cette ſeule différence; qu'au lieu des lignes obliques qui les coupent au profil, il faut leur mener des perpendiculaires ſur chacune des diviſions que donnent ces lignes, comme on voit en en Gg, $u1$, V 2, V 3; ce qu'on n'a pas fait dans cette Figure, pour éviter la confuſion.

La raiſon de cette opération, eſt que les largeurs des berceaux étant par tout égales, leur différence ne peut être que dans les hauteurs. Quoique les berceaux ſoient inclinés à l'horiſon, les ordonnées paralleles au plan qui paſſe par les impoſtes ſeront des horiſontales, & par conſéquent égales à celles qui étoient paralleles au rayon AC, leſquelles déterminent les largeurs, & coupent les demi-diametres, qui ſont dans des plans verticaux en parties proportionnelles, telles que doivent l'être les abſciſſes des ellipſes.

Si les berceaux étoient rampans ſuivant les impoſtes, alors la ligne AC deviendroit inclinée au rayon vertical CB, & toutes les autres ordonnées lui ſeroient paralleles.

Sur quoi il eſt aiſé de remarquer qu'il n'eſt pas indifférent de prendre pour ceintre primitif une face couchée en talud, comme Cb, ou ſa hauteur verticale bV, qui eſt l'arc-droit du berceau horiſontal; puiſque ſi l'un eſt en plein ceintre, l'autre ſera ſurbaiſſé ou ſurmonté; c'eſt à l'Architecte à voir ce qui convient le mieux à ſon deſſein.

Des profils des berceaux à double obliquité.

Tous les profils dont nous venons de parler ne ſuppoſent qu'une obliquité, ou de direction à l'égard du plan vertical, comme les deſcentes; ou d'inclinaiſon de face, comme les taluds; mais il en eſt d'autres qu'on ne peut exprimer dans les profils, ſans racourcir ou les faces ou les axes; de ſorte qu'on

ne peut plus y prendre de meſure. Telles ſont les obliquités du biais ſimple, du biais & du talud joints enſemble, ou de la deſcente & du biais; parce qu'alors ſi le plan de deſcription eſt parallele à une des directions, il ne l'eſt pas à l'autre.

On verra dans le IVe. Livre la maniere de faire les profils de ces différentes eſpeces de voutes obliques, & de ſuppléer par le plan horiſontal, & par de ſeconds profils aux racourciſſemens qui ſe trouvent dans les parties du premier, qui n'y peuvent être dans leurs meſures.

Comme nous ne donnons ici que les regles générales, nous n'entrerons point dans le détail de toutes les différentes compoſitions d'obliquité; mais nous ferons voir comment on peut les réduire en une ſeule.

PROBLEME II.

Réduire toutes les différentes obliquités de biais, de talud & biais, de biais & deſcente, de deſcente talud & biais, en une ſeule, pour ne faire qu'un profil, qui exprime toutes ces obliquités & conſerve les meſures que l'on y doit prendre.

Ce Problême, qui eſt le principe ſecret & miſtérieux de la méthode de DESARGUES, ſera détaillé au IVe. Livre pour toutes ſortes de berceaux en particulier, où nous expliquerons ce qu'il a caché ſous des noms impropres, qu'on trouve dans le Livre de BOSSE.

Premierement, il eſt clair que toutes les obliquités qui ne ſont pas de directions différentes, peuvent ſe réduire à une ſeule; ainſi (*Fig.* 244) dans une deſcente HD, le talud HG, ou le ſurplomb ED étant perpendiculaires au plan vertical paſſant par l'axe du cylindre DG, peuvent être exprimés dans le même profil différemment ſitué, ſans aucun changement. Car ſi je prends DG pour une horiſontale, quoiqu'elle ſoit inclinée, il n'en réſultera d'autre changement que celui de nom; ſçavoir, que HG, que j'avois appellé talud à l'égard de l'horiſon G a^3 ou CD, s'appellera ſurplomb à l'égard d'un horiſon DG, & qu'au contraire DE, qui étoit en ſurplomb, deviendra un talud. Ainſi j'ai déja réduit deux obliquités de deſcente & talud en une ſeule de ſurplomb, & celle de deſcente & ſurplomb en une de talud. *Fig.* 244 & 245.

Pl. 10. Fig. 245. Secondement, (*Fig.* 245) je puis changer une obliquité ſimple en une autre obliquité connue ſous un nom différent. Si, par exemple, je conſidere le demi-berceau R, *h*, *n*, *p*, comme incliné à l'horiſon OR, je puis le conſidérer auſſi comme horiſontal ſur R *p*, mais biais à l'égard d'une ligne de face R *h* conſidérée comme étant dans le plan de ſuppoſition horiſontal *h* R *p*; au lieu que dans la premiere ſuppoſition, elle étoit verticale dans le même plan conſidéré en ſituation verticale, ſans qu'il en arrive d'autre changement que celui du *niveau* en *à plomb*. La ſeule différence qui en réſulte, eſt la tranſpoſition de la clef au lieu où étoit l'impoſte, & la diviſion des vouſſoirs qu'on commencera à une extrêmité d'un rayon, au lieu de la commencer à l'autre, ſi l'arc de face eſt circulaire; mais s'il étoit ſurbaiſſé ou ſurhauſſé, il en réſulteroit une tranſpoſition d'axe du grand au lieu du petit, & du petit au lieu du grand; ce qui arrivera à l'arc droit, ſi l'arc de face eſt circulaire.

Au reſte il eſt clair que cet arc droit n'eſt pas ſuſceptible d'aucun autre changement, quand même on augmenteroit ou diminueroit le talud, le biais, la deſcente, ou le ſurplomb.

Si cependant les obliquités des faces ſont doubles de différentes directions, comme de biais & talud tout enſemble, ou deſcente & de biais; alors on ne peut pas les réunir en une par la ſeule tranſpoſition du niveau en à plomb, il faut chercher la poſition du diametre de plus grande obliquité, qui eſt celui de la ſection d'un plan paſſant par l'axe perpendiculairement à la face du berceau.

Figure au-deſſus du 247. Soit AB (dans la Fig. au-deſſus du chiffre 247) le diametre horiſontal d'un berceau, dont la direction horiſontale de ſon piédroit eſt AG, & celle de ſon axe qui lui eſt parallele eſt CX, faiſant avec AB l'angle aigu XCA. Soit auſſi l'inclinaiſon de ſa face en talud, ſuivant un angle donné SCT, ou ſon complément TCB; du point C pour centre & CA pour rayon, ayant décrit un cercle ASBK, qui coupera CT en T, on tirera de ce point T une parallele à ACB, & du point A une perpendiculaire A *x* à l'axe donné CE, qui coupera T *t* en *t*. Si par ce point *t* & le centre C, on tire une ligne DI, on aura l'obliquité ſimple *t* C, compoſée des deux PC du biais, & *t* P du talud, laquelle ſera la projection d'un plan paſſant par l'axe perpendiculairement à la face, & par conſéquent celle d'une partie de l'axe ſur le diametre de la plus grande obliquité. Pour détacher ces

ces deux lignes confondues par cette projection, on menera par le point *t* une perpendiculaire indéfinie *t* F, qui rencontrera la ligne de talud TC prolongée en F : je dis que l'angle *t* CF eſt celui de l'axe avec le diametre de la ſection de la face coupée par un plan paſſant par l'axe & perpendiculairement à cette face. *Fig. au-deſſus du chiffre 247.*

DÉMONSTRATION.

Soit tirée A *x* perpendiculaire à EC qui rencontrera T *t* au point *t* ; ſi l'on ſuppoſe deux cylindres horiſontaux de baſes égales & de différentes directions de biais & de talud, que nous exprimerons par celles de leurs axes EC oblique ſur AB, & SC qui lui eſt perpendiculaire. Si l'on fait mouvoir ces deux cylindres en ſens contraire, chacun autour de ſon axe, il eſt clair que le point T décrira un arc de cercle en l'air, dont la projection eſt la ligne T *t*, & que le point A tournant autour de l'axe XC décrira un autre arc, dont la projection eſt A *x*, qui rencontrera le précédent en un point en l'air, qui ſera exprimé au plan horiſontal par le point *t*, commun aux deux diametres, & la ligne *t* C ſera la projection du rayon CT dans un plan vertical, commun aux deux baſes des cylindres ; lequel rayon eſt auſſi commun à la baſe d'un troiſieme cylindre, qui auroit pour axe DC, & pour inclinaiſon de ſa face l'angle DCF. Car ſi l'on fait mouvoir le diametre TCF autour de cet axe, il eſt clair que le point F décrira en l'air un arc, dont F *t* eſt la projection ; par conſéquent au lieu de conſidérer les deux cylindres précédens, je puis ne conſidérer que le troiſieme, dont l'obliquité FCD ſur ſon axe CD raſſemble celle des deux autres, ſuppoſant toujours des baſes égales.

Il eſt viſible que ſi l'on prolonge la perpendiculaire juſqu'à la circonférence du cercle en H, & qu'on tire HC, on aura un angle DCH égal à DCF, & par conſéquent que le diametre de plus grande obliquité pourra être repréſenté en deſſus en HK, ou en deſſous en FT, & l'axe par HC ou DC, puiſque l'angle de leur rencontre eſt toujours le même en C.

Cela ſuppoſé, ſi l'on prend DI pour diametre de la baſe, il ſera évident qu'il ſera celui de la plus grande obliquité, puiſque le plan *t* HC paſſe par l'axe HC & par la perpendiculaire H *t* qui eſt horiſontale ſur une ligne DI, qui eſt dans un plan incliné coupé par un vertical. Or cette ligne H *t* qui eſt le ſinus droit

de l'angle HCD ; eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H de l'axe au diametre DI ; par conſéquent l'angle HCD eſt le plus petit de tous ceux que l'axe peut faire avec un des diametres de la baſe ; *ce qu'il falloit démontrer.*

Fig au-deſſus du chiffre 247.

COROLLAIRE I.

De la connoiſſance de cet angle, il ſuit qu'on peut faire le profil d'un bereeau à double obliquité, ſuivant les mêmes regles que pour ceux qui n'en ont qu'une, ou deux de même direction, réduites à une ; la différence qu'il y aura, c'eſt qu'au lieu de prendre la baſe horiſontale de la face donnée pour celle de la projection des diviſions de ſon ceintre en vouſſoirs, on prendra le diametre trouvé DI, ſur lequel on abaiſſera des perpendiculaires des points de ces diviſions ; ce qui oblige à la deſcription d'un peu plus de la moitié de la baſe, ajoutant au-deſſous de AB l'arc BI = AD ; ainſi pour faire la projection des impoſtes A & B, on menera de ces points ſur le diametre DI les perpendiculaires A *a*, B *b* qui donneront des points *a* & *b*, leſquels ne ſeront plus aux extrêmités du diametre de la baſe, comme ils étoient auparavant. Cependant il eſt viſible que ſi par ces points *a* & *b*, on mene des paralleles *a* X, *b m*, à l'axe HC, on retombera dans le cas de la pratique ordinaire de la Figure 245, ſuppoſant l'angle AR*p* égal à l'angle DCH de celle ci ; ſoit qu'on réduiſe les deux obliquités au ſimple biais, ou à la ſimple deſcente droite.

COROLLAIRE II.

Puiſque cette conſtruction change l'angle XCA du premier biais en HC*a*, celle du piédroit AG ſera tranſportée en *a* X parallement à l'axe, & les lignes *a r* & *b* R perpendiculaires à l'axe, exprimeront le demi-diametre de l'arc droit, paſſant par les joints de lit des impoſtes. Il en ſera de même pour tous les autres joints de lit ; ce qui fait voir comment on peut revenir à la même pratique de profil qui a été expliquée à la Figure 244, où l'on a fait l'arc droit a^2, b^2, par le moyen du demi diametre c^2, b^2, perpendiculaire à l'axe DG, diviſé en ſes abſciſſes, c'eſt-à-dire, qui ſont des diſtances équivalentes à des hauteurs des rerombées ; ce que nous expliquerons plus au long

dans le cinquieme Chapitre du quatrieme Livre. *Fig. au-dessus du chiffre 247.*

COROLLAIRE III.

Si au lieu de considérer le diametre AB, comme horisontal dans un plan incliné, on le considere comme étant dans un plan vertical, le diametre DI sera incliné à l'horison; & si l'on veut aussi supposer DI horisontal, AB sera incliné à l'horison, & *m* L, perpendiculaire à DI sera une verticale, laquelle sera perpendiculaire à l'axe horisontal HC, quoique tous les autres diametres possibles lui soient inclinés; d'où il suit que quelque biaise que soit une voute, il y aura toujours une tête de lit où il ne se trouvera point du tout de biais, & qui sera parfaitement à l'équerre.

COROLLAIRE IV.

Il suit aussi que tous les angles des têtes des lits des vousſoirs compris entre *m* & D seront obtus, & entre *m* & I ils seront aigus, plus ou moins selon qu'ils approcheront des extrêmités D ou I; ce qui doit s'entendre aussi des côtés opposés au-dessous du diametre DI, parce que les côtés des cylindres étant paralleles à leur axe, l'angle de chacun de ces côtés avec un diametre donné, est égal à celui que fait l'axe avec ce même diametre.

COROLLAIRE V.

Puisque les angles que l'axe fait avec chacun des diametres du cercle de la base du cylindre ou face du berceau, sont tous inégaux, il suit qu'on peut faire une infinité de profils différens d'un même cylindre scalene, dans lesquels il paroîtra plus ou moins incliné; en sorte que s'il est fait par le diametre perpendiculaire à celui de plus grande obliquité, le profil de ce cylindre, ou, ce qui est le même, d'un berceau biais, sera le même que celui d'un droit.

COROLLAIRE VI.

Si l'on tire aussi une perpendiculaire *nu* à l'axe HK, elle représentera un des diametres de l'arc droit, lequel étant supposé

Fig. au-dessus du chiffre 247.

circulaire, la courbe de la face sera une ellipse, dont le grand axe sera dans la plus grande obliquité DI, le petit axe en *m* L, qui lui est perpendiculaire ; ce qui donne une facilité pour en tracer le ceintre.

COROLLAIRE VII.

Au reste, de quelque courbe que soit le ceintre de face, ou celui de l'arc-droit, la maniere de trouver le diametre de la plus grande obliquité sera toujours la même ; car le demi-diametre CT sera égal à FC, quoique l'on substitue une ellipse au lieu du cercle THF, & les perpendiculaires T*t* & A*x* aux directions SC, EC se rencontreront toujours au même point *t*, si sans égard à l'arc de face, on prend sur AC une longueur égale à CF ou CT, ce qui est indépendant du ceintre de face. En effet il est clair que quand même on ne prendroit que la moitié de ces lignes, les perpendiculaires *t* T & A*t*, qu'on peut considérer comme les côtés d'un parallelogramme, ne feroient que se rapprocher parallelement, & par conséquent se couperoient toujours dans la même diagonale *t* C ; ce qui suffit pour donner l'angle DCF de l'axe avec le diametre de plus grande obliquité qu'on cherche.

COROLLAIRE VIII.

Puisque l'inclinaison du diametre DI, de plus grande obliquité, avec la ligne horisontale donnée pour base de la face AB, & l'angle de cette ligne DI, avec celle qui représente l'axe HC, sont les seules choses essentielles à la réduction de l'obliquité ; il est clair que leur transposition au-dessus ou au-dessous de la ligne AB, ne change rien à la construction, & qu'ainsi il importe peu que l'axe soit en HC ou en FC, pourvû que l'une & l'autre de ces lignes fassent le même angle avec la ligne DI, & qu'ainsi il importe peu de faire le profil du talud au-dessus ou au-dessous de la ligne AB ; mais en ce cas il faut changer le côté de la perpendiculaire à l'axe de A en B.

Secondement, il faut observer que le talud & le surplomb, la descente & la montée, à ouvertures d'angles égales avec l'horisontale AB, donneront toujours le même angle de l'axe HC avec le diametre DI, mais en différens sens ; de sorte que les

directions oppoſées donneront des angles de différente nature, l'un aigu & l'autre obtus; mais qui ſeront toujours les ſupplémens à deux droits l'un de l'autre.

Troiſiemement, que les profils des angles d'inclinaiſon perpendiculaires à une même direction, comme la deſcente & le talud, la montée & le talud, doivent être rangés d'un même côté au-deſſous de l'horiſontale AB, lorſque l'un doit être ſouſtrait de l'autre, & des deux côtés, lorſqu'ils doivent être ajoutés; ſçavoir, le talud au-deſſous, & la deſcente au-deſſus, comme nous le ferons voir au IVe. Livre, parce que ſi l'on retranche de l'angle de la montée celui du talud, l'angle de la face avec l'axe, qui étoit déja aigu, le devient encore plus. Et ſi l'on retranche le talud de l'angle de la deſcente, qui eſt équivalent à un ſurplomb à l'égard de l'axe conſidéré en ſituation horiſontale, & par conſéquent obtus, le ſurplomb diminue & approche plus du droit; ce ſera la même choſe ſi l'on ajoute l'angle du talud au complément du ſurplomb ou deſcente; cet angle qui étoit aigu, avec cette addition, approchera plus du droit, par conſéquent l'obliquité de l'axe ſur la face diminuera.

Des profils des voutes coniques.

Les profils des trompes & autres voutes coniques qui ſeroient faits ſuivant les mêmes regles que ceux des cylindriques ou berceaux, ſeroient inutiles pour la conſtruction des traits.

La raiſon eſt, que les projections des joints de lit n'étant pas paralleles entr'elles, ne peuvent l'être auſſi à un même plan vertical; par conſéquent (par le I. Coroll. du Chap. V. du II Livre) ces points ne peuvent y être repréſentés dans leurs juſtes meſures; ils ſeront tous plus courts au profil que dans la réalité, excepté un qui peut être dans un plan vertical. Ainſi ſuppoſant le profil S*h*P (*Fig.* 247) formé ſur la projection SPL, il ne s'y trouvera de meſure juſte, que la longueur du milieu de la clef S*h*, dont SH eſt la projection horiſontale. Car il eſt viſible que l'impoſte SL, ou ſon égale SP, eſt plus courte à ſon profil SP; puiſque SP eſt l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont SH = S*a*P eſt un côté; les autres lignes S*n*, S*o*, qui repréſentent les joints de lit, ſeront un peu moins racourcies, à meſure qu'elles approchent du plan vertical S*h*B. *Fig.* 247.

Où il ſuit, que puiſque tous ces profils racourciſſent inéga-

lement les joints de lit, on ne peut en trouver toutes les valeurs taſſemblées dans un ſeul plan, comme celles des joints des berceaux, excepté aux voutes qui ſont des portions de cones droits ſur une baſe circulaire; parce qu'alors la valeur de tous les joints de lit eſt donnée ſans le ſecours du profil dans le ſeul plan horiſontal, ces lits étant tous égaux à celui d'une des impoſtes.

QUATRIEME REGLE.

Dans les traits des voutes coniques ſcalenes, il faut faire autant de profils qu'il y a de joints de lit dont les hauteurs ou les projections horiſontales ſont inégales, pour en trouver la juſte valeur.

J'entends par le mot *ſcalene*, non-ſeulement la voute dont la projection horiſontale ou verticale eſt un triangle ſcalene, mais auſſi celle dont le plan horiſontal eſt un triangle iſoſcele, & dont l'axe eſt droit ſur ſa baſe, qui n'eſt pas circulaire, mais elliptique ou de quelqu'autre courbe.

Fig. 247. Soit (*Fig.* 247) SAB, le plan horiſontal d'une trompe que nous conſidérons comme biaiſe, quoiqu'elle ſoit droite, pour ne pas multiplier les Figures; ſur AB, comme diametre de la baſe du cone, qui eſt la face de la trompe, ayant décrit la courbe de ſon ceintre, comme le demi-cercle AHB, ou une demi-ellipſe, & l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4; on abaiſſera des perpendiculaires de chacun ſur AB, pour en avoir la projection horiſontale aux points D, E, F, G, d'où par le ſommet S du cone, on tirera les lignes DS, ES, FS, GS, qui ſeront les projections des joints de lit à la doële, dont il faut chercher la valeur par le profil.

Puiſque tous les joints rencontrent le plan horiſontal en S, il eſt viſible qu'ils ſont tous chacun l'hypotenuſe d'un triangle rectangle dont on a les deux côtés donnés; ſçavoir, la hauteur des points 1, 2, 3, 4, ſur le plan horiſontal, & la diſtance de leurs projections D, E, F, G, du ſommet S, dans la projection horiſontale.

Ainſi on peut faire ces profils de différentes façons qui viennent toutes à la même fin.

1°. On peut élever aux points D, E, F, G, des perpendiculaires égales aux hauteurs D 1, E 2, F 3, G 4, & tirer les

hypotenuſes demandées, comme E 2 en E*e*, D 1 en D*d*, les lignes S*e* & S*d*, ſeront les vraies longueurs des joints de lit. Fig. 147.

2°. Pour abréger & profiter des angles droits tout faits, on peut porter les projections ſur la baſe BA prolongée; par exemple, ES en E*x*, & DS en DY, les lignes *x* 2, & Y 1, ſeront les vraies longueurs des joints de lit, auſquels les oppoſés correſpondans aux points 3 & 4, ſeront égaux, parce que le cone eſt droit; il n'en ſeroit pas de même s'il étoit ſcalene, la trompe étant biaiſe.

Ces deux manieres ſont bonnes en elles-mêmes; mais lorſqu'il y a beaucoup de vouſſoirs, elles produiſent une multiplicité de lignes qui cauſe de la confuſion; c'eſt pourquoi je crois qu'il convient mieux de porter tous les profils hors du plan ſur une baſe commune.

3°. On prendra une ligne quelconque qui paſſe par le ſommet S hors du plan, comme, SL ſur laquelle on tranſportera par des arcs de cercle, faits du même point S pour centre, toutes les longueurs des projections SC, SF, SG en K, L, *n*, où l'on élevera des perpendiculaires KH', L 3*f*, *n* 4, les lignes 3*f* S, 4 S ſeront les profils des joints de lit, paſſant par les points 3 & 4, & H S, celui du milieu de la clef, comme il eſt évident par la conſtruction, qui eſt la même que la précédente. Cette méthode débarraſſe le *plan*, & les arcs CK, FL, G*n*, marquent les origines des profils, pour qu'on ne s'y méprenne pas. Le reſte de la Figure ſert pour les diſcours ſuivans.

Les valeurs des joints de lit étant trouvées, il ſera facile de faire les profils des ſurfaces des lits, c'eſt-à-dire, des ſections du cone par des points donnés à la circonférence de ſa baſe, & par ſon ſommet, S perpendiculairement à chaque tangente menée par ces points; parce que ſi la baſe eſt circulaire, on a trois côtés du triangle de cette ſection; ſçavoir, l'axe qui eſt commun à tous, le rayon de la baſe ou face, qui eſt toujours le même, ſi elle eſt circulaire, & le joint de lit trouvé; l'angle de ſupplément à deux droits du rayon avec le joint de lit, eſt le profil de la tête de lit.

Mais ſi la baſe eſt elliptique ou de quelque autre courbe, alors la ſection du lit prolongée ne paſſera plus par l'axe du cone, mais toujours par le ſommet S, & la rencontre du joint de tête avec le plan horiſontal ſera facile à trouver; car ſuppoſant N*e* un joint de tête perpendiculaire à la courbe ondée A*e* H,

Fig. 247. il n'y a qu'à le prolonger jusqu'à la rencontre du diametre de la face AB en E, la ligne SE sera la section qui tient lieu d'axe, E *e* celle du rayon de la face ; ainsi avec le joint de lit, on aura le triangle de la section intérieure du cone, dont l'angle de supplément à deux droits sera le profil de la tête du voussoir.

On voit par ce qui précede qu'on n'a pas la même facilité qu'aux berceaux où cet angle est toujours égal à celui d'un diametre de la base avec l'axe du cylindre, parce que les côtés du cone sont convergens.

Nous n'avons considéré jusqu'ici qu'une seule obliquité dans le cône ; si l'on doit avoir attention à plusieurs, comme lorsqu'une trompe est biaise & en talud, il faut réduire ces deux obliquités en une, de la même maniere que nous l'avons dit pour les berceaux, & ayant trouvé le diametre de plus grande obliquité, & son angle avec l'axe, on fera le profil d'une voute à double ou triple obliquité, comme pour la simple biaise.

PROBLEME III.

Tracer le profil d'une voute conique à double ou triple obliquité, de de biais, talud & descente.

Puisqu'on ne peut exprimer la longueur d'une ligne inclinée à un plan que par sa projection sur un plan qui lui soit parallele, il est clair qu'on ne peut faire un profil d'un cone scalene que dans un plan parallele à celui qui passant par son axe est perpendiculaire à la base, & ce profil ne peut encore servir qu'à trouver les mesures des trois lignes qui sont dans ce plan ; sçavoir, des deux côtés, le plus long & le plus court, & de l'axe du cone ; ainsi il est inutile de vouloir entreprendre un profil d'un cone scalene sur tout autre diametre que celui de la plus grande obliquité.

Nous en avons déja dit autant pour les profils des cylindres scalenes ; mais à cause que les côtés sont paralleles à l'axe, l'obliquité ne leur cause aucun changement comme aux cones, où ils s'alongent & se racourcissent continuellement de part & d'autre de la section perpendiculaire par l'axe.

Ainsi le Problême se réduit à chercher cette section.

Pl. 22. Fig. 265. Soit (Planche 22, *Fig.* 265) le cercle AHBK, la base du cone : ayant tiré par le centre C un diametre quelconque DE prolongé

longé vers G, on portera de C en G la plus grande obliquité, comme celle du biais, & l'autre du talud en GP, perpendiculairement à GE; la ligne PB, menée par le centre C, ſera la ſection d'un plan perpendiculaire à la baſe AHBK, & paſſant par l'axe du cone, laquelle réduit les deux obliquités de biais & de talud en une ſeule de ſimple biais PC, plus grande qu'aucune des deux autres, étant l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont elles ſont les côtés. Pl. 22. Fig. 265.

Préſentement on peut trouver tous les côtés du cone ſans avoir recours à aucune nouvelle projection; on élevera PX perpendiculaire ſur PB, & égale à la hauteur du cone, ou diſtance perpendiculaire de la baſe au ſommet. Puis ayant pris à volonté au contour de la baſe autant de points que l'on voudra 1, C, 3, E, 5, 6, 7, D, on prendra les intervalles de chacun de ces points au point P, & on les portera ſur PB aux points 7° 6° 5° 3°, & par ces points, & le ſommet X, on tirera les lignes XA, X 7°, X 6°, X 5°, X 3° XB qui ſeront les vraies longueurs des côtés du cone, avec leſquels chacun en particulier, la longueur de l'axe XC, & le rayon CA forment autant de triangles, on aura les profils de toutes les ſections du cone, & par conſéquent, en prenant les ſupplémens des angles du côté & du rayon, tous les profils des têtes des lits.

Si l'on compare ce profil avec celui de la projection verticale *Sde*, faite ſur une baſe *de* parallele au diametre donné DE, on reconnoîtra qu'aucune de ſes lignes n'eſt égale ni à la longueur ni à l'inclinaiſon qu'elle doit avoir ſur le plan de la baſe; & par conſéquent qu'elles ſont inutiles pour y prendre aucunes meſures de profil, ce qui eſt aſſez clair ſans démonſtration, puiſque IC = GC eſt plus petit que PC, & la hauteur PX = IS, il ſuit que l'angle ICS eſt plus grand que PCX, par conſéquent le profil de projection n'a pas aſſez d'obliquité.

USAGE.

Ce Problême nous ſervira à faire voir qu'on peut beaucoup abréger les traits des voutes coniques biaiſes, en deſcente, en ſurplomb, ou en talud; lorſque nous parlerons des traits particuliers, dans le IVe. Livre, Chap. VI., puiſqu'on peut réduire toutes ces obliquités différentes en apparence à une ſeule, comme aux berceaux: la montée peut être réduite en talud ſim-

Fig. 165. ple, la deſcente en ſurplomb ſimple, la montée en talud à un talud plus oblique de la quantité du talud, la deſcente en talud, à un ſurplomb moins oblique de la quantité du talud, le biais en talud ou en ſurplomb, à un plus grand biais, comme on le voit dans cet exemple; de ſorte que toutes les obliquités étant réduites en une, il ne reſte plus qu'à voir quel angle le diametre donné DE fait avec celui de la plus grande obliquité AB, pour y rapporter les projections des points de diviſion en vouſſoirs, qu'on a coutume de faire ſur le diametre donné ordinairement horiſontal, ou incliné, s'il s'agiſſoit d'une face rampante.

Si au lieu d'une projection verticale ſur le diametre DE, on avoit voulu la faire ſur le diametre C*6*, au lieu du biais GC, on auroit eu pour toute obliquité de l'axe celle du talud GP, qu'il auroit fallu porter de I en *p* ſur l'horiſontale *d p*, & tirer *p* S qui donne une obliquité d'axe toute différente. Enfin ſi on avoit propoſé le profil ſur le diametre HK perpendiculaire à PC, toute l'obliquité ſe ſeroit évanouie, la ligne SI auroit repréſenté l'axe, alors le profil du cone ſcalene n'auroit en rien différé de celui du cone droit.

D'où il ſuit que d'une infinité de profils poſſibles, il n'y en a qu'un qui puiſſe donner les meſures des côtés & de l'axe d'un cone ſcalene.

Remarque ſur les profils en général.

Les multiplicités des lignes qu'on trouve dans les traits, viennent principalement des profils; or je regarde comme une maxime que

On doit éviter autant qu'il eſt poſſible l'aſſemblage de pluſieurs profils ſur un même plan, & particulierement les lignes inutiles qui n'indiquent que de loin, & par de longs renvoys, leurs origines; c'eſt pourquoi lorſqu'on a un grand nombre de vouſſoirs dans une face, il convient mieux de mettre les profils chacun à part, ou du moins une partie d'un côté, l'autre de l'autre, que de les mettre ſur les baſes de leur projection.

La raiſon de cette maxime eſt toute ſimple; lorſque les objets ſe préſentent en trop grand nombre, ils partagent trop notre attention, & fatiguent l'eſprit occupé à démêler ceux que nous devons choiſir, ce qui arrive particulierement, lorſque les

lignes de doële & d'extrados ſont tirées & comme mêlées ; ſecondement, parce qu'il eſt aiſé de ſe tromper & de prendre les unes pour les autres.

J'ajoute qu'il faut retrancher les lignes inutiles qui ne ſervent qu'à indiquer par de longs circuits les origines des profils, parce qu'on en trouve ſouvent de cette eſpece dans les traits des Auteurs de la Coupe des Pierres, qui embrouillent extrêmement les épures.

Je puis donner pour exemple le profil d'une deſcente à la Figure 248, où le parallelogramme AE eſt la moitié du plan horiſontal d'un berceau avec ſes projections de joints de lit $1^p N$, $2^p n$ provenant des diviſions 1, 2, de la moitié du ceintre de face HA ; le parallelogramme $h e$ eſt le profil de ce berceau, où l'on veut ſituer les joints de lit dans la diſtance qu'il convient. La maniere ordinaire, eſt de les y conduire par de longs circuits des lignes que l'on voit dans la Figure $1\,1^a\,1^d$, $2\,2^a\,2^d$, H $a h$, que l'on peut ſupprimer ſans ſe priver de l'indication de l'origine des profils, comme on voit à la Figure 245 ; car ayant fait à l'ordinaire la projection horiſontale des joints de lit par le moyen du ceintre AHB, diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, on trouvera les profils des mêmes joints de lit, en répetant la moitié de l'arc de face en OL h, & menant par ſes diviſions 1, 2 des horiſontales 1 D, 2 d, qui donneront ſur la ligne de profil AR h les points d & D, par où on menera des paralleles à la rampe R p, leſquelles ſeront les profils demandés ; ce qui ſupprime, comme l'on voit, beaucoup de lignes droites & d'arcs de cercles inutiles, & marque de plus près l'origine de chacune des lignes de profil, ſans offuſquer inutilement le Lecteur.

Fig. 248.

Fig. 245.

De l'élévation.

Il eſt encore une eſpece d'Ortographie, c'eſt-à-dire, de repréſentation des hauteurs, qu'on appelle l'*élévation*, laquelle ne différe du profil, qu'en ce qu'elle a pour objet les parties extérieures & apparentes au-dehors, au lieu que le profil eſt deſtiné pour exprimer les profondeurs auſſi-bien que les hauteurs.

Dans tous les traits il eſt de néceſſité indiſpenſable de faire l'élévation de la face de la voute dont il s'agit, pour trouver les intervalles horiſontaux des joints de lit, & leur hauteur au-deſſus des impoſtes, du moins à leur origine ſur l'arc de fa-

ce ; c'eſt-là le principal uſage que l'on fait de l'élévation : cependant nous ferons voir que cette eſpece de projection verticale d'un corps ou d'une voute quelconque, conduit à ſon exécution, autant que celle du *plan* & du *profil*.

Il eſt clair que lorſqu'on veut faire uſage de cette eſpece de deſſein, il doit être aſſujetti aux loix de la projection verticale, comme le profil ; c'eſt-à-dire, qu'elle doit être faite ſur un plan parallele à l'objet ou à la partie que l'on en veut repréſenter.

D'où il ſuit, 1°. qu'on ne peut faire d'élévation d'un corps cylindrique, ſur laquelle on puiſſe prendre d'autres meſures, que ſuivant ſa longueur, parce qu'il n'y a que les côtés paralleles à ſon axe qui ſoient en ligne droite, par conſéquent qui puiſſent être paralleles au plan de deſcription. Quant aux parties de ſon contour repréſenté en élévation, il eſt clair qu'elles ſont toutes inégales ; ſe racourciſſant d'autant plus qu'elles s'éloignent de l'axe du cylindre.

2°. Qu'on ne peut trouver que trois meſures ſur l'élévation d'un corps conique ; ſçavoir, les trois côtés du triangle par l'axe du cone qui eſt parallele au plan de deſcription, dont deux ſont des côtés du cone, & le troiſieme le diametre de ſa baſe.

3°. Qu'on ne peut prendre qu'une ſeule meſure ſur l'élévation d'un corps ſphérique, concave ou convexe ; ſçavoir, le diametre du cercle parallele au plan de deſcription.

Le peu d'utilité de ces deux dernieres eſpeces d'élévations, nous diſpenſe d'en donner des exemples, il ſuffit de celui d'un corps cylindrique, ſur lequel eſt tracée une ligne quelconque, que nous ſuppoſerons ici une hélice, pour montrer comme on doit faire l'élevation d'un eſcalier à vis dans les deſſeins d'Architecture.

Fig. 249. Soit (*Fig.* 249) la couronne de cercle a D *b d*, le plan horiſontal d'une tour dans laquelle eſt un eſcalier, il ſuffit d'en tracer la moitié, parce que nous la ſuppoſons également diviſée de part & d'autre. Ayant diviſé ſon contour en un certain nombre de marches, s'il s'agit d'un eſcalier, ou en parties égales arbitraires, s'il s'agiſſoit d'une hélice tracée à la ſurface de ce corps, on menera par le centre C une perpendiculaire CE au diametre *a b*, qu'on prolongera autant qu'on le jugera à propos ; puis ſur cette ligne ayant pris à volonté un point D, on lui menera une perpendiculaire qui ſera parallele à *a b*, & par tous les points des diviſions du contour de la couronne de cer-

cle, on menera des paralleles à l'axe CE indéfinies. On marquera enſuite ſucceſſivement chaque hauteur de marche ſur cet axe CE, s'il s'agit d'un eſcalier, ou les parties aliquotes d'une révolûtion, s'il s'agit d'une vis ou d'une colonne torſe, & par toutes ces diviſions on menera des paralleles à la baſe AB, qui rencontreront les paralleles à l'axe CE, en des points 1, 2, 3, *a*, 5, 6, 7, M, &c. par leſquels on tracera à la main la courbe D*a*M*b*E, qui ſera la repréſentation de l'hélice ſur la ſurface extérieure du cylindre ou de la tour. *Fig.* 249.

Il eſt aiſé de voir que celle de la ſurface intérieure *efg* du *plan* ſe tracera de la même maniere. Il faut ſeulement obſerver que quoique les largeurs ſoient moindres, les hauteurs doivent être les mêmes pour l'hélice extérieure & intérieure, parce que s'ils s'agit d'eſcalier, c'eſt la même hauteur de marche; il en ſera de même des autres hélices, qui font leur révolution en même-tems; c'eſt pourquoi les points DME deviennent communs à l'extérieure & à l'intérieure. L'élévation qui doit donner les premieres meſures du plan horiſontal de l'épure, ne contenant d'autre difficulté que celle de tracer le genre de courbe qu'on ſe propoſe pour ceintre de la voute, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit au II. Livre.

CHAPITRE IV.

Des moyens de faire les plans, profils & élévations des Figures irrégulieres.

IL y a deux ſortes d'irrégularités dans les voutes; l'une conſiſte dans leurs contours, qui peuvent n'être ni circulaires ni elliptiques, mais de quelqu'autre courbe de fantaiſie; telles ſont les faces des trompes ondées, comme cette voute conique qu'on appelle trompe D'ANET, (*Fig.* 247).

L'autre conſiſte dans la courbure de leurs ſurfaces qui ne ſont ni cylindriques, ni coniques ni ſphériques, telles ſont celles de la plupart des arrieres-vouſſures.

Le moyen le plus facile de connoître ces irrégularités, eſt de les comparer à des Figures régulieres, ou par *inſcription* ou par *circonſcription*. Les contours peuvent être connus par l'une &

par l'autre maniere; mais les ſurfaces irrégulieres ne peuvent l'être que par le moyen de la circonſcription, dans la pratique de la coupe des pierres, où il ne s'agit que d'ôter & non pas d'ajouter, comme dans les ouvrages de Stuc. On peut donc comparer le contour d'une Figure irréguliere à une réguliere par ſon excès ſur la réguliere inſcritte, ou par ſon défaut à la réguliere circonſcrite.

Fig. 247. Soit, par exemple, une trompe ondée (*Fig.* 247) dont la projection horiſontale eſt la Figure SAHB, on peut en retrancher le cone droit SAB, en tirant la ligne AB perpendiculairement ſur ſon axe SC, & regarder le reſte de la Figure, qui eſt haché, comme un excès de ce cone, que l'on peut trouver en tirant du ſommet S autant de lignes qu'on voudra, comme SE, SD, SC, qu'on prolongera juſqu'aux extrêmités de cet excès, & l'on aura les lignes E*e*, D*d*, CH, qu'il faudra ajouter en ligne droite aux premieres, ſoit en projection pour en avoir le plan horiſontal, ſoit en profil, comme V*h*, $x c^2$, $y d^2$.

Au lieu de comprendre un petit cone dans une plus grande Figure, on peut tirer une perpendiculaire ſur l'axe SH, & former un cone droit SPL qui la renferme toute entiere; & alors ayant tiré des lignes droites SN, SO du ſommet S du cone, on en retranchera les parties *e*N, *d*O pour avoir les points *e* & *d* du contour irrégulier de la face ondée, & autant d'autres que l'on voudra par la même maniere, en cherchant leur défaut au-dedans du cone circonſcrit SLP.

L'une & l'autre méthode peut avoir ſes applications ſuivant les différentes circonſtances; la circonſcription qui donne de plus grandes meſures, peut avoir ſon incommodité dans les grands Ouvrages, & l'inſcription pourroit être plus ſujette à de petites erreurs d'exécution, mais en elles-mêmes, elles ſont également correctes.

Ce que nous diſons ici des contours irréguliers par leurs ondulations, devient plus aiſé pour ceux qui ſont compoſés de lignes droites, parce qu'il ſuffit de tirer des lignes par leurs angles, pour en avoir la poſition & le contour régulierement; c'eſt pourquoi on peut, pour plus grande préciſion, inſcrire les contours ondés dans des poligones.

La voye de l'inſcription & de la circonſcription eſt plus commode dans les berceaux dont les faces ſont irrégulieres, parce qu'il ne s'agit que de tirer des lignes paralleles à leur direction,

& des perpendiculaires aux extrêmités des parties les plus saillantes, pour les inſcrire dans des parallelogrammes.

Soit, par exemple (*Fig.* 250), la projection horiſontale d'une porte ſur le coin AEDPB, dont la face intérieure AMB eſt arrondie; on circonſcrira à cette Figure irréguliere mixte le parallelogramme BAGI, dans lequel on tirera autant de paralleles à AG, comme *g* F, *g* F que l'on voudra avoir de points au profil. *Fig.* 250.

On formera enſuite ſur GI, comme diametre, le demi-cercle GHI pour ceintre de l'arc droit, que ces lignes prolongées couperont aux points 1, 2, H, 3, 4.

La projection horiſontale étant ainſi préparée, on fera pour le profil un ſecond parallelogramme a S *d i* ſur les côtés BA, IG prolongés; enſuite ayant porté les hauteurs *g* 1, *g* 2, DH, en aS, a 2, a 1, on menera par ces points 1, 2, S des paralleles à la baſe a *i*, ſur leſquelles on portera les excès du parallelogramme GABI ſur le plan horiſontal de la porte EAMBPD; ainſi on portera F 1 *q* en 1 K, F 2 *q* en 2 L, CM en S *m*, & par les points *m* LK a, on tracera à la main une courbe qui ſera le profil de la moitié concave de la face intérieure de la porte.

Pour tracer le profil de la moitié de la face extérieure ſaillante, on portera de même l'excès GE du plan horiſontal en *i e* du profil, *g* 1 *p* en *e* 1 *f*, *g* 2 *p* en *e* 2 *f*, & par les points *d*, 2 *f*, *if*, *c*, *d*; 1 *f*, 2 *f*, *c* on tracera à la main une courbe qui ſera la moitié de la face extérieure.

Pour abréger le tranſport des hauteurs, on peut tracer le quart de cercle *i*, 14, 23, *dh* égal à GH du plan horiſontal, & également diviſé, & par ces diviſions 14, 23, mener des paralleles à la baſe *i* a du profil, leſquelles marquent plus ſenſiblement leurs origines.

La raiſon de cette opération de circonſcription, eſt que les lignes droites & les perpendiculaires ſont les termes les plus ſimples d'où l'on puiſſe commencer à meſurer les obliquités & les ſinuoſités des faces; par ce moyen on abrege la réduction des faces courbes en lignes droites & en triangles rectilignes, dont il faudroit chercher en particulier les angles, les côtés, & leur ſituation reſpective.

Cette maniere eſt néceſſaire pour former les profils qui ſont des projections verticales; mais pour lever ceux qui ſont des ſections des corps, on peut la rendre plus facile, & l'abréger comme nous l'allons dire.

PROBLEME IV.

Tracer ſur un plan un contour ſemblable & égal à celui d'un corps quelconque ſuppoſé coupé par ce plan,

En termes de l'art,

LEVER UN PROFIL.

Soit un corps quelconque, (*Fig.* 246) dont le contour ſoit
Fig. 246. de telle irrégularité que l'on voudra ; on donne ici pour exemple un roſon & des moulures ABCDE, il faut imiter exactement le contour de la ſection qui ſeroit faite par ce plan, s'il le coupoit comme pourroit faire une ſcie.

On placera le carton ou la planche ſur laquelle on veut tracer le profil dans la ſituation où l'on veut qu'il ſoit à l'égard du corps dont on veut imiter le contour ; par exemple, d'un plafond ſous lequel on la mettra à plomb, ou contre un mur, de niveau ; on l'arrêtera & on la tiendra ferme en cette ſituation, pour qu'elle ne varie pas, car l'obliquité changeroit l'imitation.

On appuyera cette planche contre les parties les plus ſaillantes, comme en E, enſuite ayant poſé une regle R *r* perpendiculairement ſur un des côtés de ladite planche KL, par le moyen d'une équerre FQG, on prendra avec le compas ou une meſure de bois qui ſervira de jauge le plus grand enfoncement *b* B, qu'on tranſportera ſous la partie la plus ſaillante E *e*, pour voir ſi la planche ſera aſſez large pour le contenir de E en *e*, perpendiculairement au côté KL ou HI, que nous ſuppoſons droit, & parallele ſi l'on veut ; puis on fera couler une branche de l'équerre GQ ſur le côté KL, en ſorte qu'une partie de ſon épaiſſeur déborde aſſez la planche, pour qu'on puiſſe appuyer la regle mobile R *r* contre l'autre branche de l'équerre QF, à laquelle elle doit toujours être appliquée, & couler le long, en la pouſſant dans les creux, & la retirant dans les ſaillies.

On préſentera ainſi la regle ſous chaque enfoncement, comme en B & en D, portant toujours la même ouverture de compas B *b*, ou la même jauge ou meſure de bois, de B en *b*, & de D en *d*, & l'on marquera ſur la planche les points *b* & *d*, de même ſous chaque ſaillie A *m* CE, marquant les points que la meſure

meſure donnera le long de la regle en M *c* & *e*. On continuera de même en faiſant couler l'équerre & la regle pour avoir autant de points que l'on voudra, par leſquels on tracera à la main le contour *a b c* M *c d e* ſur la planche, de laquelle ſi l'on retranche la partie ſupérieure avec la ſcie ou autrement, on aura le profil que les Ouvriers appellent, pour les moulures, un *calibre*, lequel s'ajuſtera parfaitement aux moulures du plafond, ſuivant la même ligne AE; en ſorte que ſi l'on vouloit y faire une cloiſon, il en boucheroit exactement les vuides. *Fig.* 246.

On peut même par ce moyen lever les contours des enfoncemens recouverts comme en S; car tirant avec l'équerre la perpendiculaire RS, & la portant à même diſtance de BR en *b r*, & faiſant *r s* égale à RS, on aura l'enfoncement S; ainſi des autres.

DEMONSTRATION.

Il eſt clair par la conſtruction, que la regle ne change point de ſituation à l'égard de la ligne KL, à laquelle elle eſt toujours perpendiculaire, puiſqu'elle eſt toujours une prolongation d'un côté de l'équerre, & que tous les points du corps ſont également éloignés du contour tracé, donc les deux courbes ſont paralleles & égales, puiſque leurs abſciſſes ſont communes, & les ordonnées ſont égales par la conſtruction.

USAGE.

Ce Problême de pratique eſt d'un fréquent uſage en Architecture, particulierement dans les réparations des vieux édifices, où il faut racorder des ornemens ſaillans & renfoncés, ou des ceintres corrompus, c'eſt-à-dire, de courbure irréguliere, ou par faute de conſtruction, ou par l'affaiſſement qui s'eſt fait. Faute de ſçavoir uſer de ce moyen, les Ouvriers ſont obligés de tâtoner long-tems, en préſentant pluſieurs fois le profil qu'ils ont levé pour voir ce qu'il faut ôter d'un côté, & ajoutei de l'autre; en quoi ils conſomment beaucoup de tems & de peine, qu'ils pourroient s'épargner par la pratique ſimple de ce Problême.

De la ſuppoſition des ſurfaces planes pour parvenir à l'imitation des courbes terminées par des ſections planes.

Et pour la coupe des Pierres, en termes de l'art,

Des doëles plates.

La raiſon qui nous engage à ſuppoſer des lignes droites auprès des courbes pour en connoître les ſinuoſités, nous oblige auſſi à ſuppoſer des ſurfaces planes au-devant des courbes, pour en connoître la concavité ou la convéxité, particuliérement lorſquelle eſt irréguliere; & ſi leur courbure eſt réguliere, & leur ſurface ſuppoſée terminée par des plans, la ſuppoſition d'une ſurface plane au-devant de la courbe ſert à faire connoître la poſition & la diſtance de ſes angles.

Ainſi avant que d'entreprendre de creuſer une portion de cylindre (par exemple) terminée par quatre ou pluſieurs plans, il faut former une ſurface plane pour y ſituer les quatre angles de cette portion de cylindre à leur diſtance reſpective; le modele de cette Figure pour les doëles des vouſſoirs s'appelle le *panneau de doële plate*; c'eſt un plan paſſant par la corde de l'arc du ceintre compris dans le vouſſoir, lequel touche néceſſairement trois des angles du vouſſoir, & ordinairement quatre; & comme les ceintres ſont diviſés en pluſieurs parties dans leur contour, ſuivant le nombre de vouſſoirs qui compoſent la voute, les doëles ſont diviſées en autant de ſurfaces planes ou de doëles plates qui réduiſent le cylindre en priſme, le cone en piramide, & la ſphere en polyedre.

La raiſon de cette ſuppoſition eſt, 1°. que dans des opérations compoſées, il convient pour la facilité & la ſûreté de l'exécution de commencer par des ſimples; ainſi avant que de creuſer une ſurface courbe, on en doit premierement ſituer les bornes dans leur juſte diſtance; ces bornes ſont les angles ſolides des vouſſoirs, deſquels il y en a au moins trois qui peuvent être appliqués à une ſurface plane, & ordinainement quatre. Il arrive de plus, que ſi ces vouſſoirs ſont faits pour une voute conique ou cylindrique, on peut placer ſur la même ſurface plane les côtés oppoſés qui ſont droits; de ſorte qu'ayant formé une ſurface plane, ce qu'on appelle en termes de l'art

dreſſé un parement, on y peut placer une grande partie du contour d'un vouſſoir, qui doit y reſter lors même qu'il ſera achevé ; il ne reſte qu'à creuſer celle qui eſt concave, laquelle eſt compriſe dans ces bornes.

Secondement, cette ſuppoſition eſt néceſſaire pour trouver l'inclinaiſon des ſurfacs planes des joints avec les courbes des doëles ou des têtes, parce que ces inclinaiſons peuvent changer à chaque vouſſoir, comme il eſt viſible dans les voutes de ceintres elliptiques ſurhauſſés ou ſurbaiſſés, où l'angle de la doële avec le lit change continuellement d'ouverture; or il eſt plus aiſé d'appliquer des biveaux ou des récipiangles rectilignes ſur des ſurfaces planes, que des biveaux d'angles mixtes, parce que ceux-là peuvent s'ouvrir & ſe reſſerrer par la conſtruction de l'inſtrument, & s'adapter à tous les angles, au lieu qu'il faut changer de modele d'angle mixte à chaque poſition des joints de la courbe du ceintre elliptique.

Troiſiemement, lorſque les doëles ou autres ſurfaces des vouſſoirs ſont *gauches*, c'eſt-à-dire, dont les angles ne ſont pas dans un même plan, c'eſt une eſpece de néceſſité de ſuppoſer une ſurface plane qui paſſe par trois de ſes angles, pour trouver la poſition du quatrieme ou cinquieme, s'il y en a; car de même qu'on ne peut connoître la nature des lignes courbes, que par les propriétés des lignes droites inſcrites ou circonſcrites, ou ordonnées à quelque diametre, auſſi on ne peut connoître les ſurfaces courbes qui ne ſont pas régulieres, que par leurs diſtances à des ſurfaces planes, en meſurant les longueurs des lignes perpendiculaires à ce plan, ou dont l'inclinaiſon eſt connue, terminées à différens points de la ſurface courbe, à laquelle on la compare. Et parce qu'il n'y a que le ſeul triangle qui ſoit néceſſairement dans un plan, les ſurfaces de plus de trois côtés peuvent avoir leurs angles en différens plans; puiſqu'elles peuvent être diviſées en triangles; ainſi une doële plate de quatre côtés, peut être diviſée en deux triangles; celle de cinq en trois, & ainſi de ſuite. Or les ſurfaces courbes irrégulieres peuvent être coupées par pluſieurs plans, de maniere que leurs angles ſoient dans un même plan; une tuile creuſe, quoique d'une courbure conique, s'adapte ſi bien ſur une planche que ſes quatre angles la touchent. Une portion de cylindre, une portion de ſphere, telles que ſont celles des vouſſoirs des voutes régulieres, a la même propriété. Il n'en eſt pas de même d'une portion d'ar-

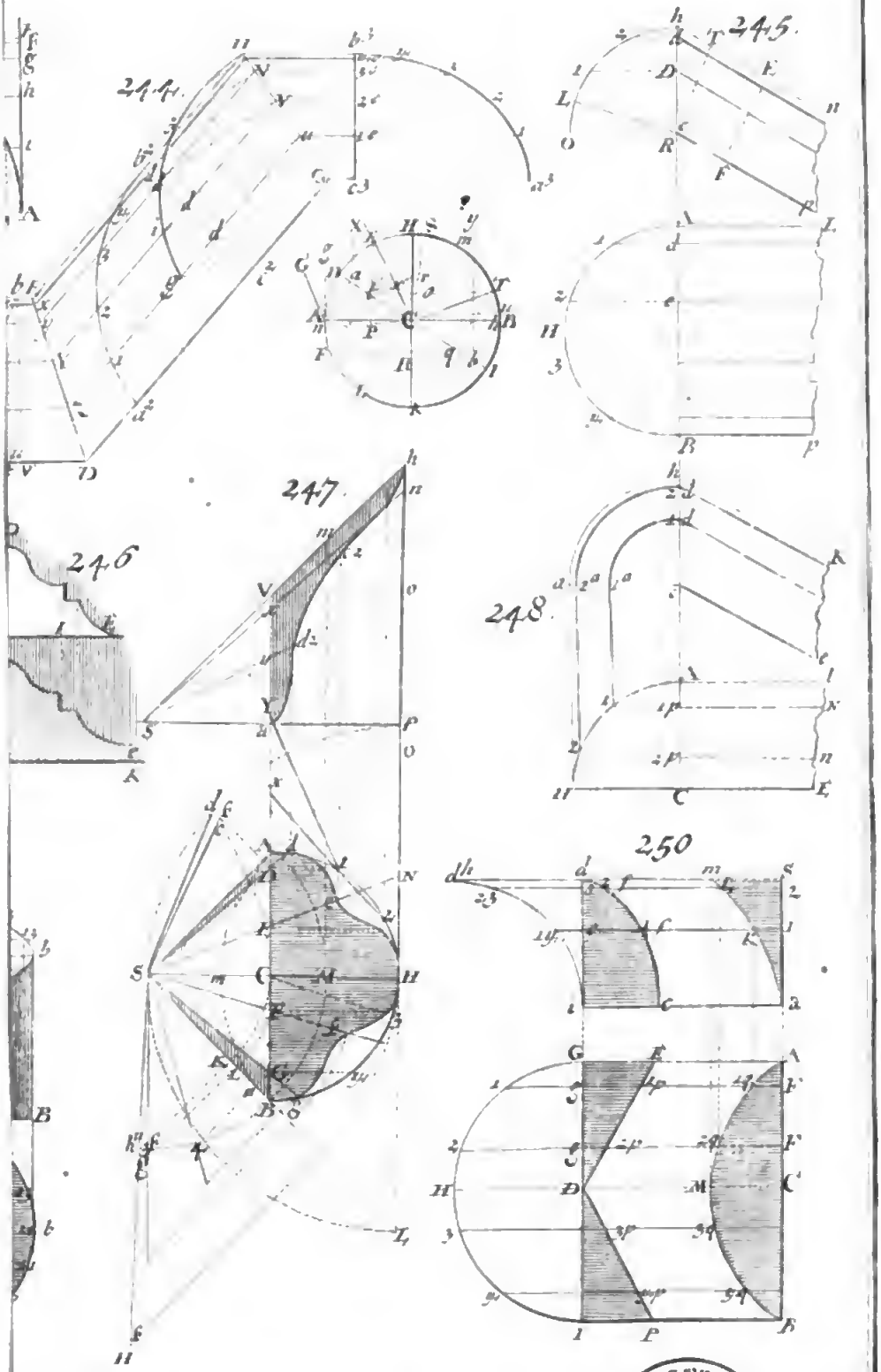
riere-vouſſure de Marſeille ou de Saint-Antoine, &c ; un vouſſoir poſé ſur une planche ne la touchera que par trois de ſes angles, & le quatrieme reſtera en l'air. Pour connoître de combien il s'écarte de ce plan, il faut que la diſtance en ſoit meſurée par une perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur cette ſurface plane; donc il importe de ſuppoſer un plan pour trouver la ſituation des parties des ſurfaces irrégulieres, & les faire avec la préciſion néceſſaire.

De la ſuppoſition des ſurfaces cylindriques ou coniques de baſe quelconque, pour parvenir à la deſcription & formation des ſurfaces courbes terminées par des lignes courbes à double courbure.

Le moyen des doëles plates que nous venons de propoſer, eſt très-avantageux dans la pratique de la coupe des pierres, ſoit pour former avec ſûreté & facilité les vouſſoirs des voutes de ſurfaces régulieres ou gauches, ſoit pour le ménagement des matériaux, mais il devient inutile pour la formation des ſurfaces courbes, cylindriques, coniques, ſphériques ou gauches qui ſont terminées par des lignes courbes à double courbure; c'eſt pourquoi il faut avoir recours aux ſuppoſitions de ſurfaces cylindriques, qui coupent la ſurface donnée ſuivant deux directions, dont la rencontre ſe fait à la courbe à double courbure qu'on cherche.

Nous entendons par le mot de ſurface cylindrique, non-ſeulement celle d'un cylindre ordinaire, qui a pour baſe un cercle ou une ellipſe, mais une courbe quelconque connue ou inconnue, Géométrique ou Méchanique, telle que la donne la projection d'une courbe à double courbure ſur un plan horiſontal ou vertical.

Il eſt des ſurfaces gauches dont les arrêtes qui les terminent, ou celles de certaines ſections qu'on y peut faire, ſe trouvent facilement par la ſeule inſcription dans un cylindre ou un cone, à la ſurface duquel cette courbe conſerve une progreſſion connue. Telle eſt celle de la vis, ſoit qu'elle faſſe ſes révolutions parallelement, ou plutôt à égale diſtance de ſon axe, ou qu'elle ſe reſſerre en limace; ainſi ſuppoſant une vis ordinaire, dnt les révolutions ſont toujours équidiſtantes de ſon axe, il eſt



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

clair que le plan de la projection perpendiculaire à cet axe, eſt un cercle, & qu'on la peut inſcrire dans un cylindre régulier droit, de la baſe duquel elle s'éleve également, ou ſuivant une progreſſion connue.

De-là on tire la pratique de faire le profil ou élévation de cette eſpece de courbe à double courbure ; comme nous l'avons expliqué ci-devant, en propoſant pour exemple l'élévation d'un eſcalier à vis dont le contour ſur le cylindre eſt une hélice tangente aux extrêmités des marches.

Si le contour de la vis n'étoit pas toujours équidiſtant de ſon axe, la conſtruction du profil ſeroit encore la même, avec cette différence que ſi la baſe du cylindre dans lequel elle peut être inſcrite, eſt elliptique, il faut choiſir pour la ligne de baſe du profil un axe, ou un diametre convenable au deſſein qu'on a de trouver les points de ſtation les plus écartés ou les plus reſſerrés.

Si la vis ſe reſſerroit en montant, au lieu de l'inſcrire dans un cylindre, il faudroit l'inſcrire dans un cone ou dans une ſphere ou ſphéroïde, & mener toutes les lignes de diviſion au pole, à quoi nous ne nous arrêtons pas, parce que ce cas arrive rarement en Architecture, au lieu que celui des vis cylindriques eſt d'un uſage continuel, non-ſeulement pour les eſcaliers, mais encore pour les appuis rampans des tours rondes, circulaires ou elliptiques.

La plupart des courbes à double courbure ne fourniſſent pas les mêmes facilités pour être décrites, que la vis, par deux raiſons ; l'une, c'eſt que le cylindre dans lequel on peut l'inſcrire, eſt très-ſouvent irrégulier, c'eſt-à-dire, qu'il n'a pas pour baſe une portion de cercle ou d'ellipſe ; de ſorte qu'il faut commencer par chercher le contour de cette baſe, par le moyen de la projection. En ſecond lieu, parce qu'ayant cette courbe, & par conſéquent la ſurface du cylindre qu'on peut élever au-deſſus, on ne peut déterminer ſur le cylindre aucun point de la courbe à double courbure, parce qu'on ne connoît pas la diſtance des points de la baſe du cylindre à ceux de la courbe qu'on cherche, comme on la connoît dans l'exemple de la vis ; de ſorte qu'on eſt obligé de conſidérer cette courbe à double courbure par un autre ſituation perpendiculaire à la premiere, d'en chercher la projection, & d'élever ſur la courbe qu'elle

donnera pour baſe un ſecond cylindre perpendiculaire au premier, à la ſurface duquel cette courbe doit encore ſe trouver.

Or puiſqu'elle eſt dans chacune des ſurfaces cylindriques trouvées, il eſt évident qu'elle ſera dans leur commune interſection; ce qu'il faut remarquer comme un principe de pratique des plus importans que nous ayons à propoſer, & dont on verra une application continuelle, lorſque nous parlerons des voutes compoſées.

Pour éclaircir cette doctrine, & la rendre ſenſible par un exemple, nous choiſirons ici une arriere-vouſſure de Saint-Antoine biaiſe & ſurbaiſſée, qui eſt une ſurface gauche, dans laquelle nous trouverons des courbes des ſections planes, & des courbes à double courbure très-propres à donner une juſte idée de la maniere de faire les plans, profils & élévations de toutes ſortes de ſurfaces les plus difficiles à repréſenter, d'où l'on tire la maniere de les former, tant en pierre qu'en bois.

PL. 11. *Fig.* 251. Soit (*Fig.* 251) le trapeze AEDB le plan horiſontal d'une voute, dont la ſurface eſt gauche, comme celle que nous donnons pour exemple. Il faut premierement ſuppoſer que l'on en connoît les ſections planes & paralleles ſuivant une direction; car ſi l'on n'en connoît rien, on ne peut rien deviner, puiſque le raiſonnement n'eſt qu'une conſéquence tirée de quelque connoiſſance antérieure, ou ſuivant les Philoſophes *procedere a noto ad ignotum.*

Suppoſons donc que l'on connoît les courbes de toutes les ſections paralleles à la ligne du milieu CM, ou par une convenance, ou par une détermination arbitraire, comme on les connoît en effet dans l'arriere-vouſſure de Saint-Antoine, puiſque c'eſt ſur leur détermination que l'on en fait le trait. Il n'importe que ces courbes ſoient portions de cercle ou d'ellipſe ou d'autre courbe; nous n'avons pas beſoin d'en connoître la nature, pourvû qu'elles ſoient données, cela ſuffit.

Ayant mené des paralleles à la ligne du milieu CM en telle quantité qu'on le jugera à propos, pour avoir un nombre ſuffiſant de points des courbes que l'on cherche, on menera par les points p^1, p^2, C, p^3, p^4, &c. où ces paralleles coupent la ligne AB qu'on prend pour baſe du ceintre de face, autant de perpendiculaires à cette ligne, qui couperont le ceintre de face donné A *h* B aux points ^{1}, ^{2}, *h*, ^{3}, ^{4}, où ſeront les hauteurs

des profils, c'eſt-à-dire, des courbes de toutes les ſections planes qui paſſent par les lignes du plan horiſontal Ep^1, np^2, MC, Np^3, &c. paralleles à CM. *Fig. 151.*

Si l'on mene par toutes ces hauteurs des horiſontales hH, 33, 22, II, & qu'on les faſſe égales à leurs correſpondantes qui ſont tirées dans le plan horiſontal MC = hH, Np^3 = 33, np^2 = 22, &c. on aura deux points de chacune des courbes des ſections faites par des plans paralleles entr'eux, & parce qu'on les doit ſuppoſer connues ou données, comme dans l'exemple préſent, où elles ſont ordinairement des quarts d'ellipſe, ou des arcs de cercle preſque tous moindres que le quart, il ſera aiſé de décrire ces ſections. Or comme elles doivent être dans des plans perpendiculaires au plan AhB, ce qu'il eſt impoſſible de faire ſur le papier, à moins qu'on n'y applique des pieces découpées volantes, on eſt réduit à les ranger de ſuite ſur le même plan, comme on voit à la Figure, ou toutes d'un ſeul côté, ou pour éviter la confuſion des lignes, partie d'un côté, par exemple vers A, partie de l'autre vers B. *Fig. 241 & 242.*

Toutes ces courbes ainſi placées, donneront facilement la poſition de tous les points qu'on y voudra marquer, par exemple leur milieu en m. Car ſi l'on mene par ces points autant d'horiſontales $m\,x\,y$ paralleles à AB, elles couperont en y, les verticales hC, $3p^3$, $2p^2$, $1p^1$, &c. qui ſont à l'interſection du plan vertical AhB, & des plans qui ſe coupent perpendiculairement ſuivant ces verticales. La courbe tracée à la main par tous les points $y\,y$, ſera l'élévation de celle qui paſſe par le milieu de la doële de l'arriere-vouſſure, quoiqu'elle en ſoit bien éloignée dans cette repréſentation.

Il en ſera de même pour celle qu'on voudroit faire paſſer au tiers ou au quart, en travers d'une impoſte à l'autre.

Il eſt encore viſible que cette méthode ſert à tracer des paralleles aux arrêtes de devant AhB, ou du fond EMD; car il n'y a qu'à prendre ſur les arcs des ſections planes des longueurs données égales, comme $1d$, $2d$, $3d$, Hd, &c. pour le haut, & p^1e, p^2e, Ce, p^3e, p^4e, pour le bas, enſuite mener par tous les points d & e des horiſontales juſqu'à l'interſection des verticales correſpondantes, qu'elles couperont aux points x, x, x, & celles menées par les points e, e, en z, z, la ligne courbe tirée par ces points x, x, x; z, z, z, ſera la proction verticale;

c'eſt-à-dire, l'élévation des lignes paralleles aux arrêtes qui ne les ſeront cependant pas dans cette élévation.

La méthode que nous employons pour trouver les points des courbes projettés ſur un plan vertical, ſervira pour trouver la repréſentation des mêmes points ſur le plan horiſontal; il n'y a qu'à répeter toutes ces ſections planes de ſuite ſur leurs baſes horiſontales E p^1, np^2, MC, &c. & par les points donnés d, m, e, de toutes ces courbes leur tirer des perpendiculaires dx, my, ez, & l'on aura ſur le plan horiſontal ABDE d'autres courbes xx X xx, yy Y yy, zzz, qui ſeront en termes d'Architecture, les *plans*, c'eſt-à-dire, les projections horiſontales des courbes qu'on cherche; leſquelles repréſentent des paralleles à AB, comme x, x, x, ou à ED, comme z, z, z, ou qui paſſent par le milieu de la doële, comme $y\,y\,y$.

Fig. 252. & 253. Pour abréger l'opération, on raſſemble toutes ces courbes ſur un profil MhAB (*Fig.* 252) que l'on peut faire différemment ſuivant les courbes que l'on veut tracer; par exemple, ſi l'on vouloit s'en ſervir pour chercher les points d'une courbe formée par une ſection plane Gg parallele à ED (*Fig.* 253) il faut raſſembler les origines de toutes les courbes des ſections planes, que j'appellerai primitives en un ſeul point M, parce que ſi l'on porte la longueur MK du plan horiſontal, en Mk ſur la baſe MA du profil, & qu'on lui éleve une perpendiculaire kL, elle coupera toutes les courbes des ſections primitives M 1, M 2, M 3, Mh, &c. en des points $v\,u\,u$, qui donneront les hauteurs de la courbe plane ou ſection plane de la voute ſur la baſe Gg; ainſi il n'y a plus qu'à les porter ſucceſſivement ſuivant leur ordre en $i\,u$, $i\,u$, $i\,u$, pour avoir les points u, u, u, de cette courbe.

Si au contraire on vouloit chercher les points de la courbe, qui ſeroit une ſection plane parallele à AB, comme Ig; il conviendroit de raſſembler l'origine ſupérieure de toutes les ſections ſur une même ligne verticale ChQ (*Fig.* 254) par la même raiſon que dans l'exemple précédent; enſuite on couperoit ce profil par la perpendiculaire Rr, dont la diſtance CR ſeroit égale à celle du plan horiſontal CR, laquelle donneroit les points S s s pour les hauteurs de la courbe.

Mais ſi la ſection étoit oblique à l'une & à l'autre face AB & ED, comme en gO; cette abréviation n'a plus lieu, il faut porter

ter

ter à part ſur la baſe du profil toutes les longueurs EO, *no*, MO, & par les points *o*, *o*, du profil élever des perpendiculaires qui couperont les courbes correſpondantes en des points *t*, *t*, *t*, qui ſeront les hauteurs cherchées, qu'il faut porter ſur des perpendiculaires qu'on élevera ſur *g*O aux points *o* pour avoir les points *t*, *t*, *t*. *Fig.* 253.

De la maniere dont nous venons de trouver les courbes planes, & les courbes à double courbure, qu'on peut imaginer dans une ſurface gauche par des ſections tranſverſales, il ſera aiſé de tirer la méthode de trouver les projections de celles qu'on peut imaginer ſuivant la longueur ou direction de la voute, comme celle d'une ligne parallele à l'impoſte AE ou BD; telle ſeroit l'arrête de la longueur d'une traverſe de batis de ménuiſerie, dont l'arriere-vouſſure ſeroit revêtue.

Car ſi on fait à volonté pluſieurs ſections planes tranſverſales, comme A*h*B, IS*g*, &c. paralleles enrr'elles, & qu'ayant pris ſur les courbes de ces ſections une partie égale, comme A*d*, I*d*, &c. on abaiſſe de ces points des perpendiculaires *db*, *de* ſur les diametres AB & I*g*, elles les couperont en des points *be*, &c. par leſquels ou tracera à la main une courbe qui ſera la projection de l'arrête *d* d'une ſection courbe parallele à l'impoſte AE, quoique cette projection ne la ſoit pas.

Il ſuit encore de la même méthode, que l'on peut trouver non-ſeulement des courbes longitudinales & tranſverſales, qu'on peut imaginer ſur la ſurface gauche d'un côté à l'autre, ou d'une face à l'autre, mais encore des projections des courbes à double courbure qui rentrent en elles-mêmes, comme ſi l'on vouloit faire un panneau ou un ornement circulaire ou elliptique dans la doële d'une arriere-vouſſure; ce que l'on exécute tous les jours depuis qu'elles ſont devenues à la mode.

Sur quoi il faut remarquer qu'il eſt impoſſible de décrire un cercle, ou une ellipſe parfaite ſur une ſurface courbe irréguliere, mais ſeulement une Figure qui approchera d'autant plus du cercle ou de l'ellipſe, que la ſurface ſur laquelle on le décrit ſera moins concave ou convexe; nous excepterons ſeulement les cas des ſurfaces ſphériques, ſphéroïdes, coniques, cylindriques & annulaires, où le centre de la Figure qu'on décrit ſe trouve au pole ou dans un axe. Ainſi quoiqu'on trace avec le compas une Figure ſemblable à un cercle ſur la ſurface de l'arriere-vouſſure qui nous ſert d'exemple, ce n'eſt qu'une

Fig. 253. apparence de cercle, laquelle en réalité eſt une courbe à double courbure, dont on peut trouver autant de points que l'on voudra, par la projection, ſur le plan horiſontal ABDE, où elle donnera une courbe en ovale pointue, comme on voit QX*qz*, & ſur le plan vertical A*h* B une courbe reſſerrée vers le haut, comme Q *h q z*.

Fig. 251. Premierement ayant déterminé la poſition du centre de ce cercle ſur la ſection primitive du milieu H m^c C en m^c pour l'élévation, & M m^c H pour le plan horiſontal, & les longueurs égales de ſes rayons ſur la même courbe, l'un vers *d*, l'autre vers *e*; on on aura les projections verticales de ces points en X & en z ſur *h*C, & leur projection horiſontale en X z ſur CM.

Enſuite on fera des ſections planes, qui paſſent par le point Y du plan horiſontal en différentes directions à volonté; on prendra ſur ces courbes des rayons égaux, dont on cherchera les projections, comme nous l'avons dit des autres points *d* & *e*, & l'on aura ainſi autant de points que l'on voudra en projection verticale ou horiſontale; c'eſt-à-dire, qu'on en aura, en termes de l'art, les *plans* & profils; ce qui ſuffit pour former la Figure requiſe en pierre ou en bois, comme nous le dirons au IVe. Livre, Chap. VI.

Remarque ſur l'uſage.

La regle de pratique que nous venons d'établir, toute ſimple qu'elle eſt dans ſon principe, étant une ſuite naturelle de ce que nous avons dit juſqu'à préſent touchant la projection, eſt le *précis de toute la ſcience de la coupe des pierres & des bois.*

Dans la coupe des pierres il convient de faire, autant que l'on peut, des ſections planes pour la commodité de l'appareil & de l'exécution, lorſqu'on en eſt le maître, comme il arrive ſouvent.

Mais dans la coupe des bois pour les revêtemens de lambris de Menuiſerie, ou pour les incruſtations des ornemens de marbre, on ne peut éviter les courbes à double courbure, parce que les ornemens qui conviennent à ces ſortes d'ouvrages, conſiſtent en bandes paralleles, ou en bordures circulaires ou elliptiques, ou en courbes de contour arbitraire. Ainſi on peut regarder l'exemple que nous venons de donner pour

tracer les projections des courbes qu'on ſuppoſe dans une voute, & particulierement dans celles dont les doëles ſont gauches, comme le fondement & le précis de toute la ſcience des Menuiſiers & des Marbriers, dans les Ouvrages les plus difficiles qui ſe préſentent pour les traits de la coupe dont ils ont beſoin. Je puis même avancer que ce Problême ſeul, contient tout le Livre de la coupe des bois du Sieur BLANCHARD, qui n'en eſt qu'une application à différens cas; car quoiqu'il ne tire pas les lignes de projection depuis leur origine juſqu'à leur baſe naturelle, horiſontale ou verticale, mais ſeulement par des portions paralleles à ces baſes, apparemment pour éviter la confuſion des lignes, ſa pratique ne differe en rien de la notre, comme nous allons le montrer ſenſiblement. *Fig.* 251.

Soit (*fig.* 251) une des ſections planes & primitives quelconque, par exemple, I*mp*^{1}, dont la baſe horiſontale eſt la ligne droite P^f*p*^{1}, & la verticale IP^f. Soit dans cette courbe I*mp*^{1} les points *d*, *m*, *e*, dont on veut avoir les projections, on menera pour celle du point *d* l'horiſontale *df*, qui coupera la verticale 1*f* en *f*, la diſtance 1*f* eſt celle que les Ouvriers appellent le *gauche de la courbe* pour l'élévation; enſuite pour avoir celle du point *m*, on menera *mo* juſqu'à l'aplomb qui tombera de *d*, que l'horiſontale *mo* rencontrera en *o*, la ligne *do* ſera le *gauche* de la couche *dm*; de même tirant *e*7 juſqu'à l'aplomb *m*7, la ligne *m*7 ſera le *gauche* de la courbe *me*: enfin *et* ſera le gauche de la courbe *ep*^{1}, conſidéré ſeulement, comme dans les précédentes projections, en qualité d'élévation, c'eſt-à-dire, de projection verticale & pour l'horiſontale, ce ſeront les lignes *fd*, *om*, 7*e*, *tp*^{1}, comme on le voit clairement. Or il eſt évident que toutes ces lignes étant paralleles aux lignes IP^f, & P^f*p* 1, ſont égales à toutes leurs parties I*f*, *fg*, *g* 9, 9 P^f, pour l'élévation, & P^{f}9, 98, 8*t*, *tp*^{1}, ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, puiſqu'elles ſont terminées par des lignes paralleles; il eſt donc indifférent de prendre *fd* pour P^{f}9, *om* pour 98, 7*e* pour 8*t*, ſur le plan horiſontal, & *do* pour *fg*, *m*7 pour *g* 9, & *et* pour 9 P^f; ainſi l'on peut reconnoître une entiere uniformité entre la méthode du Sieur BLANCHARD & celle ci.

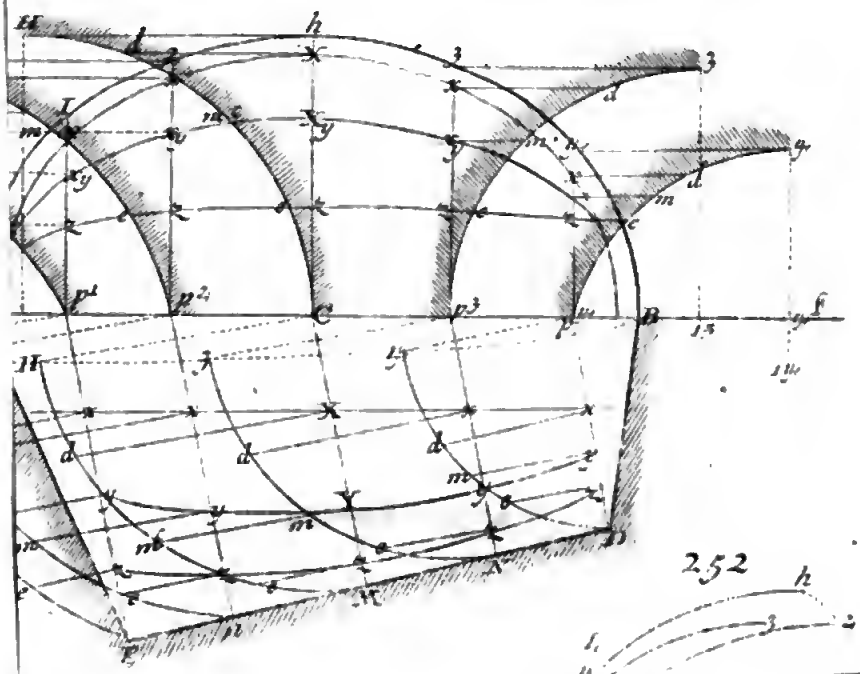
C'eſt à celui qui fait le trait d'une coupe de bois ou de pierre à éviter la confuſion des lignes, pour ne pas s'embrouiller; mais auſſi on peut dire à la faveur des lignes entieres, qui don-

Fig. 251. nent les points qu'on cherche ſans tranſpoſition, qu'elles guident plus ſûrement; car dans une longue opération, on eſt ſujet à prendre une ligne pour l'autre, ou à les tranſporter où l'on ne doit pas; par exemple, une horiſontale au profil, ou une verticale au plan horiſontal; c'eſt pour cette raiſon que nous avons cru devoir répeter les ſections planes primitives au plan horiſontal & à l'élévation, pour que l'œil fut conduit dans la poſition des points de projection depuis leur origine.

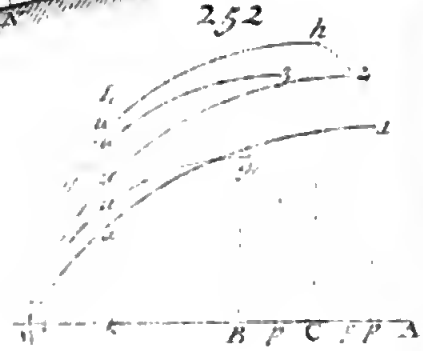
Application à l'uſage.

Lorſqu'on a la baſe d'une ſurface cylindrique, ſur laquelle eſt l'arrête courbe que l'on veut former, on en applique le panneau ſur un parement, c'eſt-à-dire, une ſurface plane que l'on dreſſe ſur le bois ou la pierre que l'on veut tailler, pour en tracer exactement le contour. Enſuite on abat le bois à l'équerre ſur cette baſe, en ſuivant ſon contour, ce qui fait une portion de cylindre droit; lorſque cette ſurface cylindrique eſt formée, on éleve des perpendiculaires à la baſe par les points qu'on a marqué dans ſon contour, par exemple, $z, z, y\,y$, de la Figure 251; enſuite on porte ſur chacune de ces perpendiculaires la hauteur que l'on a trouvée dans l'élévation, comme p^1z, p^2z, Cz, p^3z, &c. qui donnent ſur la ſurface cylindrique des points, par leſquels on trace la courbe de l'arrête du bois ou de la pierre qu'on taille; ce que l'on entendra mieux par les traits particuliers au quatrieme Livre, Chapitre VI.

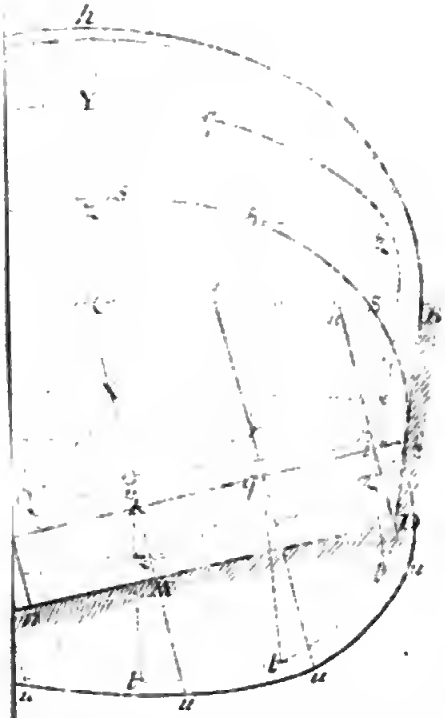
Pour s'épargner cette ſuite d'opérations de tirer des perpendiculaires à la baſe, & d'y porter les hauteurs qui leur conviennent; comme auſſi pour tracer le contour de la courbe à double courbure plus régulierement, on fait des développemens des ſurfaces cylindriques, qu'on trace ſur des corps flexibles, comme du carton, du fer-blanc, des lames de plomb, &c. & on les applique enſuite ſur les ſurfaces qu'on veut tailler, c'eſt un des grands ſecours de l'art, dont nous allons parler.



252



253



254

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

CHAPITRE V.

De l'Epipedographie ou deſcription des ſurfaces des ſolides, déployées ſur des plans,

En termes de l'Art,

DU DEVELOPPEMENT.

LEs ſurfaces des corps qui compoſent les voutes, ſont preſque toujours en partie planes, & en partie courbes.

Les planes ſont les *lits* & quelquefois les *têtes*; les courbes ſont toujours les doëles, quelquefois les têtes, & quelquefois auſſi les lits. L'art de faire le développement de toutes ces ſurfaces conſiſte à les réduire toutes en planes, même les courbes, quoiqu'elles ne puiſſent le devenir ſans changer de nature, & que cet artifice ſoit encore inconnu à la Géométrie, qui ne peut rectifier les cercles, ni les ellipſes qui ſont les baſes des ſurfaces courbes.

Nous n'avons pas beſoin dans la pratique de pouſſer cet art à la perfection Géométrique; premierement, parce qu'avant que de creuſer ou arrondir un corps, on fait, ſuivant la méthode des ſuppoſitions dont nous venons de parler, une ſurface plane, qui paſſe par la corde de l'arc concave de ſa baſe, ou par la tangente d'un arc convexe, réduiſant ainſi les corps ronds en polyedres. *Fig.* 1441

Secondement, parce que lorſqu'il s'agit de rectifier un arc de cercle ou d'ellipſe, comme il arrive quelquefois, par exemple, aux portes en tour ronde, aux trompes ſur une ligne droite, & à quelques enfourchemens, on le fait d'une maniere aſſez juſte, quoique Méchanique, pour n'en pas ſentir l'erreur dans l'opération. Il ne s'agit que de prendre avec le compas, pluſieurs parties à volonté, ſi petites que les cordes ſoient ſenſiblement égales aux arcs dont elles ſont les ſous-tendantes, & ajouter ces cordes de ſuite ſur une ligne droite pour en avoir la ſomme.

Cependant, comme il y a une maniere Géométrique de par-

venir à une préciſion plus parfaite que celle où l'opération peut atteindre, nous croyons devoir inférer ici le Problême que nous devons à M. SAURIN, de l'Académie Royale des Sciences, par lequel on peut approcher infiniment de la quadrature du cercle, dont on parle tant dans le monde, laquelle dépend de la rectification de ſa circonférence.

PROBLEME V.

Trouver une ſuite de lignes droites qui approchent de plus en plus de la rectification d'un arc de cercle donné, tant en deſſus qu'en deſſous.

Pl. 22. Fig. 255. Soit (*Fig.* 255, l'arc donné AD, moindre que la demi-circonférence ADB. Ayant fait AT perpendiculaire ſur le diametre AB, on tirera la corde BD qu'on prolongera juſqu'à la rencontre de la ligne AT en T, enſuite on diviſera l'arc AD en deux également en F, & l'arc AF encore par le milieu en G, & ainſi de ſuite, autant que l'on voudra approcher de l'exactitude de la rectification de l'arc AD. Après quoi on tirera la corde AF, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre BT au point H, par lequel on menera HI perpendiculaire à AH: on tirera de même la corde AG qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne HI au point *K*, par lequel on menera auſſi KL perpendiculaire à AK; on peut réïtérer cette opération, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la plus petite diviſion de l'arc donné.

Je dis que l'arc AD eſt plus grand que la ligne AH, & plus petit que la ligne AI, plus grand que AK, & moindre que AL, & ainſi de ſuite. De ſorte que dans le cas préſent, l'excès & le défaut de la ligne droite ſur la courbe, eſt déja dans la différence des lignes AK & AL, qui ſont preſque ſenſiblement égales entr'elles, & par conſéquent pourroient être priſes dans la pratique pour égales à l'arc ſans erreur ſenſible; de ſorte qu'il eſt preſque inutile de pouſſer l'opération plus loin, quoiqu'on le puiſſe.

DEMONSTRATION.

Si l'on tire par le point D la tangente MDN, on reconnoîtra que les lignes DM, AM, MT ſont égales entr'elles; car

l'angle MDT, ou ſon oppoſé au ſommet NDB, qui a pour meſure la moitié de l'arc BD (par la 32 du IIIe. Livre d'EUCLIDE) ſera égal à l'angle ATB, puiſque les triangles BDA, TDA ſont ſemblables, parce qu'ils le ſont au triangle TAB, avec lequel ils ont chacun un angle T & B commun, & un angle droit en D; par conſéquent l'angle BTA ſera égal à l'angle BAD; or BAD a auſſi pour meſure la moitié de l'arc BD, donc le triangle DMT étant iſoſcele, le côté MD ſera égal à MT, & il ſera auſſi égal à MA, parce que MD & MA ſont des tangentes aux points D & A (par la 3e. du IIIe. Livre d'EUCL.) dont l'arc AD qui eſt moindre que ces deux tangentes AM, MD, ſera moindre que AT, qui eſt égal à leur ſomme. PL. 22. *Fig.* 255.

Si l'on tire enſuite par le point F, moitié de l'arc AD la corde BF, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre AT en P, on prouvera de même que l'arc AF eſt moindre que AP; or menant du centre C la ligne CE perpendiculaire à la corde AD, elle diviſera cette corde & ſon arc en deux également, de ſorte qu'elle paſſera par F qui eſt le milieu de l'arc AD par la conſtruction, & il ſe formera deux triangles ſemblables AFE, AHD, & APF, AIH, qui font voir que AH eſt double de AF, & AI double de AP, puiſque AD eſt double de AE, donc la ligne droite AH, qui n'eſt égale qu'aux deux cordes des deux moitiés de l'arc AD, ſera moindre que cet arc, & la ligne AI ſera plus grande que l'arc, parce qu'elle eſt égale à quatre tangentes de ſa moitié AF, comme AI eſt égale aux deux tangentes du tout AM, MD. On prouvera de même que l'arc AD eſt plus grand que la droite AK, qui n'eſt égale qu'à quatre fois la corde de l'arc AG, quart de AD, & que AL eſt plus grande, parce qu'elle eſt égale à huit tangentes aux deux extrémités de cet arc AG, priſes comme AM & MD.

Du développement des corps compris par des ſurfaces planes.

Développer un corps, c'eſt étendre ſur une ſurface plane toutes celles dont il eſt enveloppé, pour en voir d'un coup d'œil le rapport & l'étendue.

D'où il ſuit qu'il ne ſuffit pas de les arranger de ſuite en toute ſorte d'ordre & de combinaiſon.

1°. Parce qu'on ne pourroit diſtinguer le rapport des côtés qui

doivent être communs à deux ſurfaces contigues, & ſe réunir dans l'enveloppement.

2°. Parce qu'étant raſſemblés ſans intervalles, lorſque la ſomme des angles des ſurfaces contigues deviendroit égale à quatre droits, ils compoſeroient une ſurface plane, qui ne pourroit plus être pliée pour envelopper le corps d'où elles ont été tirées, ſans être diviſée & ſeparée en pluſieurs morceaux.

3°. Qu'on ne pourroit connoître la plus grande longueur & largeur que l'arrangement naturel de toutes les ſurfaces doit occuper, par exemple, dans le développement du cube, (*Fig.* 263) qui eſt une croix, la plus grande longueur du développement eſt de quatre quarrés de ſuite, & ſa plus grande largeur de trois; mais ſi l'on mettoit deux rangs de trois quarrés de ſuite, ils compoſeroient une ſurface plane qui ne pourroit plus être pliée, parce que quatre angles droits ſeroient raſſemblés aux mêmes points *a*, *b*, *c*, *d*; or il eſt démontré dans les Elémens de Géométrie, (EUCL. Liv. II. Prop. 21.) que la ſomme des angles plans qui en compoſent un ſolide, eſt moindre que quatre droits.

4°. Il pourroit arriver dans l'enveloppement, que deux ſurfaces tomberoient l'une ſur l'autre, & que l'une des deux manqueroit ailleurs, comme ſi l'on rangeoit celles du cube en façon d'équerre, le dernier quarré d'une branche tomberoit ſur le pénultieme de l'autre; il faut de plus examiner de combien d'angles plans eſt compoſé l'angle ſolide du corps qu'on veut développer, pour voir ſi le développement peut être replié ſans diviſion ni tranſpoſition des ſurfaces; ainſi pour le Tetraedre, qui eſt le premier corps régulier, il ne faut pas raſſembler plus de trois angles des ſurfaces de ce corps en un point; parce que ſi l'on en joignoit quatre, comme à la Figure 259, elles formeroient, étant pliées, un angle ſolide qui ſeroit celui de l'Octaedre.

D'où il ſuit que le développement du Tetraedre ne ſouffre que deux combinaiſons, ou comme à la Figure 257, ou comme à la Figure 258, il en eſt de même du développement du cube, dont l'angle ſolide n'eſt compoſé que de trois angles plans; mais parce qu'on ne peut joindre quatre de ſes ſurfaces enſemble, comme au Terraedre, ſans joindre auſſi quatre angles égaux à quatre droits; il ſuit que ſon développement ne ſouffre que deux combinaiſons qui forment, l'une la croix Latine, comme

me on voit à la *Fig.* 263, l'autre un T. Suivant ces principes le développement des corps réguliers ſera très-facile; car il ne s'agit que de répeter la même ſurface dont il eſt compoſé, dans l'ordre qui convient à la nature de leurs angles: mais le nombre de ces corps eſt très-petit comme l'on ſçait, il n'y en a que cinq; ſçavoir.

Le Tetraedre, qui eſt enveloppé de quatre triangles équilatéraux.

Le cube, de ſix quarrés égaux.

L'Octaedre, de huit triangles équilatéraux.

Le Dodecaedre, de douze pentagones égaux.

Enfin *l'Icoſaedre*, de vingt triangles équilatéraux; nous ne donnons point les Figures de ces développemens, elles ſont faciles à faire après ce que nous venons de dire, & d'ailleurs ſe trouvent dans tous les Livres de Géométrie.

Il eſt d'autres corps ſolides régulierement irréguliers, formés par les ſections des angles ſolides des réguliers coupés par des plans qui les émouſſent, ce que l'on peut faire à tous les corps réguliers & irréguliers, & qui produira différentes Figures par la ſection, & différens Poligones qui ſeront les reſtes de ces ſections. Ainſi en coupant les angles du Tetraedre, on aura un ſolide enveloppé de quatre triangles, & d'autant d'exagones réguliers ou irréguliers, ſi l'on veut. Le cube coupé de même deviendra compoſé de ſix octogones réguliers ou irréguliers, & de huit triangles équilatéraux. L'octaedre deviendra compoſé de huit exagones réguliers ou irréguliers & de ſix quatrés, &c. Et ſi l'on coupe encore leurs angles ſolides, on formera de nouvelles Figures de ſurfaces & de nouveaux poligones des reſtes; ce qui n'eſt pas d'uſage pout notre ſujet, mais qui ſert à nous mener à la connoiſſance de l'impoſſibilité de faire un développement d'un polyedre, qui ſeroit enveloppé d'une infinité de ſurfaces infiniment petites & différentes, tel qu'on peut ſe le repréſenter dans la ſphere; car ſans pouſſer bien loin la ſection qu'on pourroit appeller l'*émouſſement* des angles ſolides des polyedres, ſi l'on émouſſe les angles de l'icoſaedre également pat des ſections planes, qui formeroient dix pentagones réguliers & des teſtes quadrilateres, d'où réſulte un polyedre de trente ſurfaces inégales; on trouveta déja une Figure qui apptochera tellement de la ſphétique, qu'on la jugera telle, lorſ-

qu'on la regardera d'un peu loin ; en effet elle eſt déja propre à rouler comme une boule.

Les ſolides qui nous intéreſſent ici pour en faire le développement, ſe réduiſent principalement aux pyramides & aux priſmes, parce qu'ils nous conduiſent à la connoiſſance de celui des cones & des cylindres, qui ſont les Figures les plus ordinaires aux voutes, que nous avons toujours pour objet dans cet Ouvrage ; d'autant plus qu'ils nous fourniſſent auſſi les moyens de développer la ſurface de la ſphere, quoiqu'imparfaitement, mais ſuffiſamment pour les beſoins de la pratique ; comme on l'enſeignera au IVe. Livre, Chap. VII.

PROBLEME VI.

Faire le développement d'une piramide quelconque, droite ou ſcalene.

On ſuppoſe premierement, que le polygone de la baſe eſt connu ; ſecondement, que l'on connoît la hauteur du ſommet de la pyramide ſur le plan de la baſe, & ſa projection ſur ce plan.

Si la piramide eſt droite, il eſt évident que la projection du ſommet eſt au centre du polygone qu'elle a pour baſe, parce qu'elle ne panche d'aucun côté, ſuivant ſa définition.

D'où il ſuit qu'il n'y a de pyramide exactement droite, que celle qui a pour baſe un polygone régulier ; car ſi ce polygone n'a pas tous les côtés égaux, quoiqu'inſcrit dans un cercle, la projection du ſommet ſera plus près d'un côté que de l'autre ; par conſéquent la face qui a pour baſe le côté qui en approche le plus, ſera plus inclinée, & celle qui en approche le moins, ſera plus couchée ; c'eſt-à-dire, en termes de l'art que l'une aura plus, l'autre moins de talud, ainſi elle paroîtra plus pancher d'un côté que de l'autre, quoique ſon ſommet ſoit à plomb ſur le centre du cercle dans lequel ſa baſe eſt inſcrite.

Que les côtés d'une telle baſe approchent plus ou moins du centre ; cela eſt démontré dans la quinzieme prop. du IIIe. Livre d'EUCLIDE, puiſque ce ſont des cordes inégales d'un cercle.

Ce ſera encore pis, ſi la baſe de la pyramide eſt un polygone irrégulier, qui ne puiſſe être inſcrit dans un cercle, parce qu'a-

lors non-ſeulement les faces, mais encore les arrêtes auront des taluds inégaux; de ſorte que la pyramide panchera de tous côtés.

Cette obſervation fournit la raiſon d'une ſingularité qu'on fait remarquer aux Voyageurs qui paſſent à Soleure en Suiſſe; une des tours de l'enceinte, qui eſt en forme de petit baſtion à cinq côtés, & couverte d'un comble en pyramide extrêmement haut, comme les éguilles des anciens clochers, paroît toujours pancher du côté où on la regarde; les gens qui ne ſont pas Géometres attribuent cette merveille à la grande induſtrie de l'Ouvrier, qui en a fait la charpente. Je fus en effet frappé de cette apparence, mais je reconnus bientôt que c'étoit une ſuite néceſſaire de l'irrégularité & de l'imparité du polygone de de la baſe, où par la nature du pentagone, un angle eſt diamétralement opppoſé à une face; ce qui préſente un grand talud d'arrête contre un moindre talud de la face, ſi le Spectateur eſt placé ſur la perpendiculaire à ce diametre; & s'il s'en écarte, l'apparence du talud d'une arrête s'allonge, & l'autre ſe racourcit. Revenons à notre ſujet: ſi la pyramide eſt droite réguliere, la hauteur étant donnée, il ſera aiſé de trouver les longueurs des arrêtes, qui ſont les côtés qui comprennent ſes ſurfaces; car (*Fig.* 260) il n'y a qu'à quarrer le rayon *e d* de la baſe, & la hauteur *c s*, & tirer la racine quarrée de leur ſomme on aura le côté *ſd*, lequel étant donné, ſuffit pour tous les autres qui lui ſont égaux; alors le développement d'une pyramide droite ne conſiſte qu'à répeter & ranger de ſuite autant de triangles iſoſceles qu'il y a de côtés à la baſe, & ajouter la ſurface de cette baſe, comme on voit à la Figure 261, qui eſt le développement de la pyramide pentagone, Fig. 260. *Fig.* 260. & 261.

Si la pyramide eſt ſcalene, c'eſt-à-dire, oblique ſur ſa baſe, l'opération devient un peu plus compoſée, parce que les triangles de ſes ſurfaces étant inégaux, il en faut chercher les côtés; & pour y parvenir, ce n'eſt pas aſſez d'avoir la hauteur du ſommet ſur le plan de la baſe, il faut encore le point de ſa projection.

Soit (*Fig.* 262) la pyramide triangulaire ABCS donnée, s'il s'agiſſoit d'opérer ſur le ſolide, il faudroit abaiſſer du ſommet S la perpendiculaire SP ſur le plan de la baſe prolongée, ou par le moyen de deux équerres, ou par le Problême de la onzieme prop. du XIe. Livre d'EUCLIDE, pour avoir le point P, *Fig.* 262.

Fig. 162. qui eſt la projection du ſommet S, dans la diſtance où il doit être à l'égard du côté BC de la baſe de la pyramide tracée ſur un deſſein à part. Puis ayant tiré de ce point une droite PD à volonté, on lui fera une perpendiculaire PS égale à la hauteur donnée; enſuite du point P pour centre & des diſtances PA, PB, PC pour rayons, on décrira des arcs A*a*, B*b*, C*c* qui couperont PD aux points *a*, *b*, *c*, par leſquels tirant les lignes *a*S, *b*S, *c*S au point S, on aura les points que l'on cherche. Par le moyen de ces côtés & ceux de la baſe, on décrira trois triangles de ſuite qui formeront le développement de la pyramide, en y ajoutant pour quatrieme celui de la baſe.

DEMONSTRATION.

Puiſque la ligne SP, qui doit être ſuppoſée en l'air, eſt perpendiculaire au plan de la baſe ABC prolongé, elle ſera perpendiculaire à toutes les lignes menées dans ce plan par le point P (par la cinquieme prop. du XIe. Liv. d'EUCL.) : donc les triangles APS, *a*PS, ſont rectangles en P; mais par la conſtruction AP = *a*P & PS eſt commun, donc l'hypotenuſe AS eſt égale à *a*S, & par la même raiſon *b*S = BS & *c*S = CS; *ce qu'il falloit faire.*

Nous pouvons appliquer cette ſolution à toute autre pyramide polygone de quelque nombre de côtés que ſa baſe puiſſe être, puiſqu'il eſt évident qu'elle pourra être réduite en triangles.

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de *faire le développement d'un cone quelconque*, droit ou ſcalene; car on peut le conſidérer comme une pyramide, dont la baſe a une infinité de côtés infiniment petits; ainſi le cone droit étant enveloppé d'une infinité de triangles iſoſceles, il eſt viſible que ſon développement ſera un ſecteur de cercle, par la comparaiſon de celui de la pyramide pentagone de la Fig. 161, qui l'imite déja beaucoup, quoiqu'en ſi petit nombre de côtés A*b*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, ce qui eſt connu de tout le monde.

Mais ſi ce cone droit étoit coupé par une baſe oblique à ſon axe, il eſt clair qu'il ſe formeroit une ſection différente du cercle, & par conſéquent qu'il en réſulteroit un contour de développement différent du ſecteur.

Pareil changement arriveroit ſi le cone étoit droit ſur une baſe elliptique, ou ſcalene ſur une baſe circulaire ; en ce cas ſi le cone eſt ſcalene, les longueurs de ſes côtés étant inégales, donneront pour contour de la baſe développée une courbe qui ſera toujours inégalement éloignée du ſommet S, excepté dans les points correſpondans, oppoſés non pas diametralement, mais ſuivant les perpendiculaires menées au diametre qui paſſe par le plus grand & le plus petit côté du cone ; de ſorte que cette courbe ne peut plus être un cercle, comme elle étoit dans le cone droit.

On demandera peut-être comment on peut connoître le plus long & le plus petit côté de la ſurface d'un cone ſcalene : le voici.

PROBLEME VII.

La baſe, la hauteur & la projection du ſommet d'un cone ſcalene étant données, déterminer le plus long & le plus petit côté de ſa ſurface.

Soit (*Fig.* 264) le cercle ADBR, la baſe du cone dans le plan de laquelle (prolongé s'il le faut) eſt donné ou trouvé le point P pour la projection du ſommet S ; ayant mené de ce point P par le centre C de la baſe ADBR la ligne PC, on fera PS perpendiculaire ſur PCB, & égale à la hauteur donnée ; ſi du ſommet S on mene une ligne au point A, où la ligne PB coupe le cercle de la baſe, je dis que SA ſera le plus petit côté du cone. *Fig.* 264.

Et ſi du même ſommet S on mene SB, où la même ligne coupe le cercle de la baſe, je dis que la ligne SB ſera le plus long côté du cone.

DÉMONSTRATION.

Par la huitieme du IIIe. Livre d'EUCLIDE, la ligne PA eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener au cercle du point P ; donc le triangle PSA eſt le plus petit de tous les rectangles qui auront pour côté commun la hauteur PS.

Donc SA eſt l'hypotenuſe qui approche le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qui eſt la plus courte.

Par la même propoſition d'EUCLIDE, la ligne PB étant la

Fig. 264. plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point P à la circonférence concave DB 3, il eſt clair que la ligne SB eſt celle qui s'éloigne le plus de la perpendiculaire SP, par conſéquent qu'elle eſt la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du point S à la circonférence du cercle ADBR, qui eſt la baſe du cone.

Donc SA eſt le plus petit côté du cone ſcalene, & SB eſt le plus long; *ce qu'il falloit trouver.*

Cela ſuppoſé, il ſera facile de faire le développement d'une moitié du cone ſcalene à laquelle l'autre doit être égale, & abréger ainſi l'opération de moitié; en ſuivant la même pratique que nous avons donnée pour la pyramide triangulaire.

On diviſera le demi-cercle ARB en autant de parties égales ou inégales qu'on voudra avoir de côtés du cone, par exemple, ici en 4, aux points 1, 2, 3, & l'on menera du point P à toutes ces diviſions des droites P 1, P 2, P 3, que l'on tranſportera par des arcs de cercle faits du point P pour centre en $P\,1^b$, $P\,2^b$, $P\,3^b$; ſi du ſommet S on mene des lignes à ces points, il eſt clair, par le Problême précédent, que les lignes SA, $S\,1^b$, $S\,2^b$, $S\,3^b$, SB ſont autant de côtés du cone, qui paſſent par les points donnés à la baſe A, 1, 2, 3, B; ainſi il ne s'agit plus que d'en faire uſage pour le développement.

Fig. 266. Ayant porté à part (*Fig.* 266) la ligne SB de la Fig. 264 en S^d, B^d pour premier côté d'un triangle, on prendra la corde A 1, de laquelle comme rayon, & du point B^d pour centre, on décrira un arc $3\,x$; enſuite ayant pris la longueur $S\,3^b$ de la Fig. 264 pour rayon, & du point S^d pour centre, on décrira un arc $3\,y$, qui coupera le précédent au point 3, lequel eſt un de ceux du développement de la baſe.

De la même maniere on trouvera le point 2 en faiſant le triangle S^d, 3, 2, ſur le côté $S^d\,3$ pour baſe, avec les deux autres donnés dans la Fig. 264; ſçavoir, $S\,2^b$, & la corde 1, 2, & en continuant ainſi de ſuite, on formera le polygone S^d, B^d, 3, 2, 1, a^d, $S\,d$, qui ſera le développement, de la moitié de la pyramide octogone, inſcrite dans le cone; & ſi au lieu des lignes droites $B^d\,3$, 3 2, 2 1, 1 a^d, on trace à la main une courbe $B^d\,e\,f\,R\,g\,a$, on aura le contour de la baſe du cone, laquelle ſera d'autant plus parfaite que le polygone inſcrit dans la baſe du cone aura plus de côtés; ce qui eſt évident, puiſqu'on aura un plus grand nombre de points. Il paroit, par exemple,

dans la Figure préſente, qu'il auroit été néceſſaire que ce polygone au lieu de huit, eut eu ſeize côtés pour tracer l'arc $B^d e\ 3$, parce que la courbure de l'arc $B^d 3$ eſt conſidérable à l'égard de la corde $B^d 3$, & qu'il auroit été à propos qu'il eut été de 24 cotés pour tracer l'arc $3 f 2$, pour avoir deux points dans cet arc, à cauſe du changement de la courbure, mais que l'octogone ſuffit pour la partie 2 1, dont l'arc differe peu de la corde: ainſi du reſte, ſuivant le plus ou le moins d'exactitude qu'on ſe propoſe. *Fig. 266.*

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de *faire le développement de toutes les courbes des ſections coniques ſur la ſurface d'un cone quelconque*, lorſque leurs axes ſont donnés dans le triangle par l'axe, & les plus grand & plus petit côtés du cone, ſuppoſant les plans des ſections perpendiculaires à ce triangle par l'axe ASB.

Car (*Fig.* 264) 1°. *pour l'ellipſe*, ſuppoſant un des axes donné en $E b$, & la baſe du cone diviſée, comme on l'a dit, aux points 1, 2, 3, on menera par ces points des perpendiculaires à la ligne AB, qui la couperont aux points $p C q$, par leſquels & par le ſommet S on menera les lignes $p S$, CS, $q S$ qui couperont $E b$ aux points $f g h$, d'où menant des paralleles à AB juſqu'à la rencencontre des côtés correſpondans $S 1^b$, $S 2^b$, $S 3^b$ qui les couperont aux points x, y, z, je dis que les côtés $S x$, $S y$, $S z$ ſeront terminés en E, x, y, z, b, à la circonférence de l'ellipſe, & que ſi chacun de ces côtés eſt porté à la Fig. 266, ſur ceux du développement du cone, qui paſſent par les points $B^d, 3, 2, 1, a^d$, ils donneront les points b^d, x^d, y^d, z^d, E^d, par leſquels traçant à la main une ligne courbe, on aura la moitié de l'ellipſe, qui a pour un de ſes axes la ligne donnée $E b$ (*Fig.* 264). *Fig. 264.*

On en fera de même pour la deſcription de la courbe qui eſt le développement d'une parabole ou d'une hyperbole, dont l'axe ſera donné dans le triangle par l'axe du cone ASB.

2°. *Pour la parabole*, ſoit (*Fig.* 264) l'axe donné $P^6 r$, lequel dans la Figure préſente eſt coupé par quatre lignes SB, $S q$, SC, $S r$, par le moyen deſquelles on trouvera autant de points de ſa circonférence de chaque côté, non compris celui du ſommet P^6; or ces points doivent être répandus ſur la ſurface du cone développé, comme nous venons de le dire pour l'ellipſe

Fig. 264. & 266. dans l'exemple précédent ſur les lignes S^4B^4, $S^4 3$, $S^4 2$, $S^4 R^4$; ainſi portant la longueur Sp^6 de la Fig. 264 en $S^4 P^4$ de la Figure 266, on aura ſur S^4, B^4, le ſommet P^4 de la parabole développée. Sx porté en S^4, x^3 ſur $S^4 3$, donnera le point 3, provenant de la diviſion de la baſe 3, à cauſe de la perpendiculaire $3q$, ſur AB; de même on portera Sn en $S^4 n$ ſur $S^4 2$, qui donnera le point n provenant du point 2 de la baſe, à cauſe de 2 C perpendiculaire ſur AB; de même enfin Sr en $S R^4$ provenant du point R^4, à cauſe de Rr perpendiculaire ſur AB; la courbe P^4, x^3, nR^4 ſera le développement de la parabole propoſée.

3°. *Pour l'hyperbole*, on opérera de même que pour la parabole, mais dans la Figure préſente où la demi-baſe du cone n'eſt diviſée qu'en quatre parties, & l'axe de l'hyperbole eſt donné en Rr, on n'aura qu'un point à ſa circonférence entre ſon ſommet H & celui de ſon amplitude Rr à la baſe, parce que l'axe Hr n'eſt coupé que par la ligne pS provenant du point 1 à la circonférence de la baſe du cone. De ſorte qu'on n'aura que trois points pour la moitié du développement de cette hyperbole; ſçavoir, le ſommet H, en portant SH de la Figure 264 en $S^4 h$ de la Fig. 266. 2°. On aura le point o en portant So en $S^4 o$ ſur S^4, & enfin le point R à la baſe comme à la parabole où on les ſuppoſe communs, par haſard.

Nous n'ajouterons rien ici de la deſcription du cercle produit par une ſection du cone coupé par un plan parallele à la baſe, parce qu'il eſt aiſé de voir que les côtés du cone qui le coupent, & par conſéquent qui en donnent les points ſur la ſurface conique développée, doivent être proportionnels à ceux qui ſont continués juſqu'à la baſe du cone $S^4 B : S^4 b :: S^4 a^4 : S^4 a$, & de même ſur les autres côtés $S^4 3$, $S^4 2$, $S^4 1$. Or ces proportions ſont toutes trouvées à la Fig. 264, où la ligne $a\,b$ coupe proportionnellement les côtés SB, Sb Sq, SC, $S2^b$, St, $S1^b$, SA, aux points b, m, n, o, a; mais ſi le cercle provenoit d'une ſection ſous-contraire, il tomberoit alors dans le cas du développement de l'ellipſe.

Remarque ſur certains points des courbes développées ſur le cone.

Puiſque le côté SA du cone eſt le plus petit de tous ceux qu'on

qu'on peut tirer du ſommet S, comme nous l'avons démontré ci-devant, & que le côté SB eſt le plus grand; il ſuit que tous les points de la demi-circonférence de la baſe A 2 B, ſont tous inégalement éloignés du ſommet S, ou S^d de la Figure 266, au développement de la ſurface du cone, & que les points B^d & a^d ſont comme les termes du plus grand, & du moindre éloignement de la courbe B^d, R^d, a^d. De-là vient qu'on les appelle *points de ſtation*; car dès qu'elle eſt parvenue en a^d, elle ceſſe de s'approcher de S^d, & dès qu'elle eſt parvenue en B^d, elle ceſſe de s'en éloigner, & recommence à s'en approcher. *Fig.* 264. & 266.

Il en ſera de même pour toutes les autres ſections coniques, dont les axes E b, p^6 r, H r ſont dans le triangle par l'axe ASB.

On peut encore remarquer dans la courbe de développement de la baſe du cone, qu'elle change de contour par une infléxion ſemblable à celle d'une S; en ſorte qu'elle paſſe du contour concave a^d g R^d, à l'égard du point S^d au convexe R^d, 2, 3, B^d. Le point R^d qui eſt le terme & la jonction de ces deux contours différens, eſt appellé *point d'infléxion*, lequel partage inégalement la courbe, en ſorte que la partie concave à l'égard du ſommet eſt toujours la plus grande.

Pour trouver ce point à la baſe ARB, *Fig.* 264) il faut tirer du point P, projection du ſommet du cone S, une tangente PR, le point d'attouchement R ſera celui que l'on cherche; ce qui fait voir que la partie A 1 R, convexe à l'égard de P, eſt toujours plus petite que R 3 B concave à l'égard de ce même point; puiſque la tangente ne pourroit toucher la baſe au point du milieu 2, que lorſque le point P ſeroit infiniment loin ſur la direction B p prolongée.

La Fig. 267 préſente un développement entier du cone, double de la Figure 266.

Du développement des priſmes.

Les priſmes auſſi-bien que les cones peuvent être droits ou obliques ſur leurs baſes.

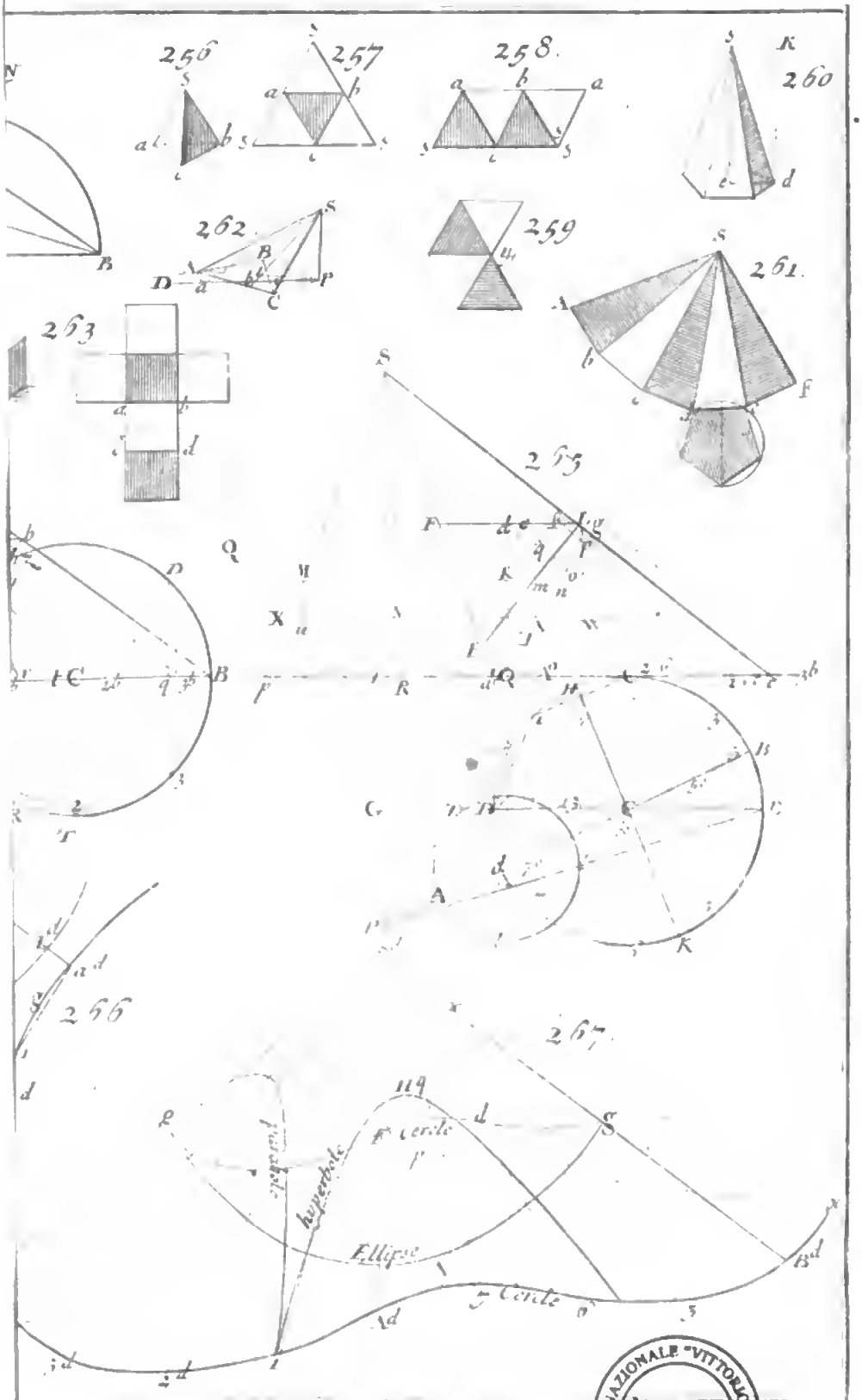
Il eſt évident que le développement des priſmes droits eſt un parallelogramme rectangle compoſé de tous ceux des ſurfaces, dont il eſt eveloppé; puiſque les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout, & que les baſes étant paralleles, les hauteurs ſont toujours égales.

Il n'en eſt pas de même des priſmes ſcalenes, don les côtés ne ſont pas perpendiculaires au plan de leur baſe; car quoiqu'ils ſoient compris entre deux plans paralleles, comme nous le ſupoſons, premierement, il ſuit bien de-là qu'étant paralleles entr'eux, ils ſont tous égaux, mais non pas qu'ils faſſent des angles égaux avec les côrés de leur baſe; d'où il réſulte que chaque ſurface dont le priſme eſt enveloppé, peut être un parallelogramme différent, excepté ceux qui ont pour baſe les côtés du polygone de la baſe du priſme, qui ſont paralleles & égaux entr'eux.

Pl. 23. Fig. 268. Soit (*Fig.* 268) le priſme AC, oblique ſur ſa baſe BCDE, de l'obliquité marquée par la ligne PB, diſtance d'une perpendiculaire HP abaiſſée ſur le plan de la baſe prolongée. Ayant pris à volonté ſur un de ſes côtés, comme ſur HB, un point *d*, on lui menera la perpendiculaire *d* K, qui coupera le côté ſuivant GC au point K, par lequel on tirera de même une perpendiculaire KL, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'ayant parcouru le coutour, on ſoit revenu au point *d*.

Fig. 269. On fera enſuire à part (*Fig.* 269) une ligne droite *d* N^4, ſur laquelle on portera de ſuite les longueurs *d* K, KL, LM, MN^4 égales à celles des diſtances perpendiculaires des côtés du priſme AC, & par tous les points *d* KLMN^4, on tirera des perpendiculaires à *d* N^4, comme *h b*, *g c*, *i d*, *a e*, HB, ſur leſquelles on portera de part & d'autre de la ligne *d* N^4 les longueurs qui expriment les diſtances de cette ligne aux angles du priſme; ainſi prenant *d* H de la Fig. 268 on la portera en *d h* de la Figure 269: KG en K *g*; LI en L *i*, &c. d'un côté; & de l'autre *d* B en *d b*, KC en K *c*, LD en L *d*, &c. & l'on aura les points *h g i a* H vers une baſe, & *b c d e* B vers l'autre; par leſquels menant des lignes droites de point en point, on aura la Figure *h g i a* HB *e d c b h* pour le développement des côtés du priſme, à laquelle joignant les deux baſes X & Q, on aura celui de ſa ſurface entiere, qui eſt ici celle d'un parallelepipede obliquangle compris par ſix ſurfaces, qui ſont autant de parallelogrammes, comme le cube l'eſt par ſix quarrés.

Il eſt clair que de quelques nombres de ſurfaces que puiſſe être ce priſme, le développement ſe fera toujours de même; fut-il d'une infinité de côtés, ce qui le rendroit alors très-ſemblable au cylindre ſcalene, qu'on peut mettre au rang des priſmes en conſidérant ſes ſurfaces comme infiniment étroites.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

COROLLAIRE I.

De-là on tire la maniere de *faire le développement de la ſurface du cylindre ſcalene.*

Soit (*Fig.* 270) le parallelogramme BAFD la ſection d'un cylindre ſcalene par ſon axe, & le diametre de ſa baſe dans la plus grande obliquité, comme on voit à la Figure 271 (quoique plus petite) le diametre BA paſſant par le point R de la perpendiculaire DR abaiſſée ſur le plan de cette baſe. *Fig.* 270.

Sur ce diametre BA ayant fait le demi-cercle B *h* A, on le diviſera en tel nombre de parties qu'on voudra, égales ou inégales, il n'importe, mais les égales ſont plus commodes, & l'on menera par les points de diviſion des perpendiculaires à ce diametre, comme 1 *p*, 2 *p*, 3 *p*, 4 *p*, qui le couperont aux points *p* & *p*, par leſquels on menera autant de paralleles au côté BD, comme *p* 5, *p* 6, *p* 7, *p* 8.

Enſuite par un point E pris à volonté ſur BD, on lui tirera la perpendiculaire ER qui coupe les paralleles à BD aux points *n*, *o*, *p*, *q*, qui ſont ceux des abſciſſes de l'arc droit ou ſection perpendiculaire à l'axe, qui eſt ici une ellipſe, dont ER eſt le petit axe, & BA le grand axe par le moyen deſquels on tracera cette courbe, dont le contour rectifié ſera le développement de celui du cylindre ſcalene; mais ſi l'on ſe contente du développement des cordes compriſes entre les diviſions de l'arc droit, on les trouvera en portant ſur les paralleles à l'axe, les hauteurs *p* 1, *p* 2, *p* 3, *p* 4 ſur les paralleles correſpondantes, comme *p* 1 en *n* I, *p* 2 en *o* K; *p* 3 en *p* L, *p* 4 en *q m*; les longueurs E I, I K, KL, L *m*, *m* R jointes enſemble ſur une ligne droite, comme E *e* de la Figure 272, feront le développement du contour du cylindre, qui ſera d'autant plus exact, que les parties des diviſions du demi-cercle B *h* A ſeront en plus grand nombre.

Préſentement pour avoir le développement du contour des baſes, ayant porté ſur la ligne E *e*, que j'appelle la directrice, les longueurs des cordes R *m l* KI *e*, on menera par tous ces points des perpendiculaires à la directrice, ſur leſquelles on portera les avances du profil de la Figure 270, comme RA de ce profil en RA de la Fig. 272; *qp* en *m* 1, *pp* en *l* 2, *op* en K 3, *np* en I 4, EB en *e* B, & par les points A, 1, 2, 3, 4, B, on *Fig.* 272.

Fig. 270. & 272. tracera à la main une courbe qui ſera le développement du contour de la baſe, qu'on répetera de l'autre côté en A*b*, & de même façon au-deſſous en D*f*, ou bien ſi les baſes ſont paralleles, on trouvera la ſeconde, en portant ſur toutes les paralleles à AD la même longueur AD en 1 11, 2 12, 3 13, &c. ce qu'on appelle, en termes de l'art, jauger.

Si enfin on ajoute de part & d'autre les deux cercles des baſes *b* 3 A, D 3*f*, on aura le développement de la ſurface totale du cylindre,

Le développement par les cordes eſt plus uſité dans les traits de la coupe des pierres que celui du contour, parce qu'on commence par les doëles plates, dont les cordes ſont les largeurs à l'arc droit.

Nous ſuppposons ici que le profil qui ſert à faire le développement eſt fait ſur le diametre de la plus grande obliquité de l'axe ſur ſa baſe, pour n'avoir aucun égard aux obliquités des voutes compoſées de pluſieurs inclinaiſons de biais, deſcente, talud & ſurplomb; parce que nous avons donné la maniere de les réduire toutes à une ſeule, lorſque nous avons donné les regles du profil.

Quand nous parlons de l'obliquité de l'axe ſur ſa baſe, il eſt évident que nous parlons auſſi de celle des côtés du cylindre ſur le même plan de la baſe, par un Corollaire de la huitieme du IIe. Livre d'EUCLIDE, qui dit que ſi une ligne eſt perpendiculaire à un plan, toutes ſes paralleles le ſont, & ſi elle lui eſt inclinée; toutes ſes paralleles le ſont d'un même angle d'inclinaiſon, mais comme les côtés ſont coupés inégalement par un plan perpendiculaire à l'axe, il réſulte que les meſures de leurs longueurs au-deſſous ou au-deſſus de ce plan, ſont inégales entr'elles, mais égales à celles du profil fait ſur le diametre de plus grande obliquité, comme à la Figure 270 au-deſſus & au-deſſous de la ligne ER.

COROLLAIRE

D'où il ſuit qu'au cylindre ni au cone, les différentes compoſitions d'obliquités ne doivent rien changer au développement de leurs ſurfaces, mais ſeulement aux termes d'où on les commence, ou auſquels on les termine; par exemple, ſi le développement avoit été commencé ſur le côté 3 13, les courbu-

res A *b* F & A 4 B n'auroient pas été également étendues de part & d'autre ; mais ce qui auroit été retranché de la courbure convexe 3 4 B d'un côté, auroit été ajouté de l'autre ; ce qu'il eſt à propos de remarquer pour ſentir la raiſon des inégalités que l'on trouve dans les développemens des doëles, dans les traits des voutes d'obliquités compoſées, qu'on verra au IVe. Livre, Chap. V. *Fig.* 272.

COROLLAIRE II.

De la maniere de faire le développement du contour des baſes des cylindres, on tire aiſément celle de tracer ſur leurs ſurfaces développées les cercles & les ellipſes qu'on y peut décrire ; il ne s'agit que d'avoir les diametres de ces ſections (ſituées comme elles doivent être) dans le profil ou ſection du cylindre par l'axe, comme LE ou *h* G dans le parallelogramme BAFD (*Fig.* 270) leſquels diametres ſeront coupés par les paralleles à l'axe provenant des diviſions du contour de la baſe 1, 2, 3, 4, comme EL aux points *t*, *t*, *t*, *t*, & les diſtances *t n*, *t o*, *t p*, *t q*, LR étant portées ſur les perpendiculaires à la directrice (*Fig.* 272) aux points correſpondans en-deſſus ou en-deſſous de cette directrice, donneront ſur les côtés des points par leſquels on tracera à la main une courbe FLI, qui ſera le développement de l'ellipſe, qui a pour diametre EL, & la courbe *h g* H celle qui a pour diametre au profil la ligne *h* G. *Fig.* 270 & 272.

COROLLAIRE III.

Il ſuit de la poſition des axes donnés dans la ſection qui eſt le parallelogramme par l'axe & par le point P, lequel eſt la projection du ſommet de l'axe ſur une de ſes baſes, que l'on connoît les points d'inflexion des courbes, qui ſont les développemens des circonférences des cercles & des ellipſes qu'on décrit à la ſurface du cylindre par des ſections obliques à l'axe ; car prenant pour exemple l'ellipſe, dont le diametre eſt EL, il eſt viſible que la diſtance RL étant la plus grande de toutes les autres *q t*, *p t*, &c. lorſque la courbe EL ſera parvenue au point L, elle commencera à ſe rapprocher de la ligne E *e*, & qu'étant parvenue en E où elle la touche, elle commencera à s'en éloigner ; il en ſera de même des points A & B, *h* & *b*, *Fig.* 270 & 272.

comme il a été dit à l'égard des développemens des ſections coniques ſur la ſurface du cone développée.

DÉMONSTRATION.

La raiſon pour laquelle on prend une perpendiculaire ſur les côtés d'un priſme pour en copier les ſurfaces, c'eſt pour en abréger l'opération ; car on ſçait que pour faire une Figure ſemblable & égale à une autre, il n'y a que deux manieres, ou de la réduire en triangles, ou de meſurer les diſtances de ſes angles à une ligne donnée par des perpendiculaires, ce qui eſt proprement & équivalemment réduire tous les triangles en rectangles; de ſorte qu'un angle droit ſert pour tous. Or on peut bien mettre la premiere maniere en pratique pour les priſmes ordinaires, mais non pas pour les priſmes d'une infinité de côtés, tels que ſont les cylindres ; car la largeur des parallelogrammes, & par conſéquent des triangles qui en ſont les moitiés, eſt réduite à rien ; il ne reſte donc de leur dimenſion que la longueur, & l'on ne peut conſidérer ces ſurfaces comme ayant de la largeur courbe, ſans reconnoître que les diagonales de ces parallelogrammes mixtes ne ſeroient plus des lignes droites, mais courbes proportionellement à la courbure de leurs baſes, ce qui eſt évident.

Il eſt inutile de rendre raiſon pourquoi on prend une perpendiculaire à l'axe du cylindre pour avoir le développement de ſon contour ; car il eſt clair que toute autre ſection que ER augmentant le diametre par ſon obliquité, augmente auſſi le contour, les circonférences des cercles & des ellipſes étant entr'elles comme leurs diametres ; or de toutes les lignes qu'on peut mener entre deux paralleles, la perpendiculaire eſt la plus courte ; donc la circonférence eſt auſſi la moindre, laquelle eſt la ſomme de l'infinité des perpendiculaires tirées aux côtés, infinis en nombre, du prisme cylindrique.

Des développemens compoſés de deux ou trois eſpeces de ſurfaces d'un corps coupé en pluſieurs parties dans ſon épaiſſeur, comme ſont dans les voutes celles des doëles & des lits, & même des extrados.

Les Architectes & les Auteurs de la Coupe des pierres ont

coutume de raſſembler dans un même deſſein de leur épure le développement de la ſurface intérieure de la voute, qu'ils appellent la doële, & les ſections planes, qui ſont les intervalles de ſon épaiſſeur entre deux vouſſoirs qu'ils appellent les *lits*, pour en voir d'un coup d'œil la différence & le rapport.

Ce genre de repréſentation eſt un aſſemblage du développement de la doële fait ſans interruption, comme il convient aux ſurfaces cylindriques & coniques, & de celui de l'extrados, qui eſt de même nature, mais interrompu au milieu, où il eſt diviſé en deux parties ſéparées; & enfin couvert en partie de celui des ſurfaces des lits de chaque rang de vouſſoir, leſquelles ſont couchées dans toute leur étendue ſur le développement de la doële, laquelle doit être conſidérée en ces endroits comme double, partie en doële, & partie en lit; & même ſi l'on veut, encore comme triple ſi l'on y conſidere l'extrados, dont nous parlerons peu, parce qu'on en fait rarement uſage.

Pour rendre cette explication plus ſenſible, nous donnerons pour exemple un berceau qui ait une double obliquité, l'une de direction de face ſur celle de ſon axe horiſontal, ce qu'on appelle biais, & l'autre d'inclinaiſon de face à un plan vertical, ce qu'on appelle talud.

Soit (*Fig.* 274) ABFE le plan horiſontal de la doële d'un berceau biais, dont C*x* eſt la ligne du milieu, c'eſt-à-dire l'axe, qui eſt biais à l'égard de la ligne AB, baſe de la face qui eſt couchée en talud ſur cette baſe, ſuivant une inclinaiſon connue ou donnée, par exemple *b* T à l'égard de *a b*, avec laquelle elle fait un angle obtus *a b* T. *Fig.* 274

Sur AB comme diametre intérieur, & *a b* extérieur, on décrira deux demi-cercles *a* H *b*, A *h* B qui comprendront l'épaiſſeur du berceau, auſquels on menera par les ſommets H & *h* deux tangentes HT, *ht* paralleles à *a b*, qui couperont le profil du talud *b* T aux points T & *t*, & pour connoître combien ces points s'écartent de *l'aplomb*, on fera la verticale V *b* perpendiculaire à *a b*, qui coupera ces tangentes aux points V & *u*, les diſtances VT, *ut* ſeront celles dont les ſommets de la doële & de l'extrados s'écartent de l'aplomb aux arrêtes de la face.

Préſentement pour connoître combien les *aplombs* de ces points s'éloignent de la baſe *a b*, diametre de la face, on la prolongera vers L, puis on menera par les points T & *t* des paralleles à V *b* qui la couperont aux points L & K; les longueurs

Fig. 274. *b* L & *b* K ſeront les diſtances que l'on cherche, & KL l'intervalle horiſontal des arrêtes de la doële & de l'extrados au milieu de la clef que l'on portera perpendiculairement ſur le milieu de AB en CK & C *l* pour avoir les demi-axes conjugués aux premiers *a b*, AB, par le moyen deſquels on décrira (par le Problême VII du Livre II) les demi-ellipſes AKB, *a l b* qui ſeront les projections des arrêtes de la face à la doële & à l'extrados.

Cette projection étant faite, on diviſera l'arc A *h* B en tel nombre de vouſſoirs qu'on voudra, comme ici en cinq, aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on tirera du centre C les joints de tête 1 1ᵉ, 2 2ᵉ, 3 3ᵉ, 4 4ᵉ, & des mêmes points des perpendiculaires à la baſe *a b* qu'on prolongera juſqu'aux demi-ellipſes de la projection AKB, *a l b* qu'elles couperont aux points 11, 12, &c. 21, 22, &c. par leſquels on tirera du centre C les projections des joints de tête 11 12, 21 22, par leſquels on menera des paralleles à l'axe C *x*, 11 *q*, 12 *q*, 21 *s*, 22 *s*, les trapezes 12 *q*, *s* 22, & 11 *q*, *s* 21, ſeront les projections des lits, dont on veut chercher la vraie étendue pour l'appliquer ſur le développement de la doële.

Il s'agit préſentement de faire ce développement de la même maniere que nous l'avons dit pour la Figure 270, en commençant par former l'arc droit DR, & étendant ſon contour D 1ʳ, 2ʳ, 3ʳ, 4ʳ R, ſur une directrice *d d* de la Figure 280, & & portant ſur les diviſions *d* Dᵈ, 1, 2, 3, 4, R *d*, les longueurs de la projection *i* 11, *d* 21, *i* 12, *i* 22, d'un côté, & les reſtes *i q*, *i s*, &c. de l'autre, ce qui donnera les quatre anglés des trapezes qui ſont les ſurfaces de chaque lit, comme *a*ᵈ Aᵈ, *d*ᵈ E, *e* 1ᵈ QS, *e* 2ᵈ FS, 3ᵈ NG, &c. dont les deux premiers *a*ᵈ E & B ᵈ K ſont égaux en tout à ceux des impoſtes de la Figure 274, marqués des Lettres *a* E, BN.

Fig. 280. Si l'on joint les extrêmités extérieures de ces trapezes par une ligne courbe, on aura le développement du contour de l'arrête de la doële & de la face, telle eſt la ligne A 1ᵈ, 2ᵈ, 4ᵈ B, & la ligne EQFGHI pour le développement du contour de la doële de la face poſtérieure, qu'on ne ſuppoſe pas parallele à la premiere AKB qui eſt en talud, mais à plomb ſur la ligne *d* N; ce qui fait que ces contours courbes du développement ſont inégaux, provenant de celui de deux ellipſes inégales.

Pour

Pour éviter la confuſion de ce développement, on a coutume de diſtinguer les lits par une hachure laiſſant le développement de la doële en blanc. La même Figure donnera le développement de l'extrados ſi l'on joint par une ligne courbe les angles extérieurs des lits comme *aee*, b^d, OO, mais non pas entierement dans ſes meſures, car il reſte au milieu un intervalle *e* O qui eſt beaucoup plus grand que celui de la clef, parce que les lits prennent leur origine extérieure, partie d'un côté de la clef, partie de l'autre. Pour en faire un contour ſuivi, il faudroit les ranger tous de ſuite ſur un même côté, comme on a fait à la Figure 280, en tranſportant le point a^d en Æ, *e* en e^2, &c. alors on auroit une courbe d'extrados qui croiſeroit celle de la doële Æ e^1, e^2, O, O, b^d; ce qui n'eſt point uſité dans les traits, n'étant d'aucune utilité. Pl. 25. Fig. 280.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'explication de cette eſpece de deſſein, parce qu'on en trouvera pluſieurs exemples dans la conſtruction des traits, au IVe. Livre, il ſuffit d'en avoir donné une bonne notion pour établir les principes de l'*épure*.

Remarque ſur les développemens compoſés.

Les Auteurs des Traités de la coupe des Pierres ont accoutumé d'accompagner preſque tous les traits d'un développement des *doëles* joints à ceux des *lits* dans l'ordre que nous venons de l'expoſer. Ce genre de deſſein n'eſt pas inutile dans les traits en petit ſur le papier pour voir d'un coup d'œil la Figure & la grandeur des panneaux de lit & de doële; mais comme il ſeroit trop incommode & de peu d'utilité de les tracer en grand dans toute l'étendue de l'épure, particulierement lorſque les voutes ſont un peu grandes, on peut dire que cette pratique n'eſt pas néceſſaire pour l'exécution. Il ſuffit de ſçavoir faire les panneaux de chacun des lits en particulier ſans les aſſembler, ce qui cauſeroit infailliblement de la confuſion, lorſqu'il y a beaucoup de lits plus larges que les doëles, parce qu'ils croiſeroient les uns ſur les autres; c'eſt pourquoi nous n'avons pas imité ces Auteurs dans notre IVe. Livre, pour ne pas multiplier les lignes inutiles, & donner trop d'étendue aux Figures des Planches, où il ne s'en trouve déja que trop qui embaraſſent & fatiguent l'attention du Lecteur.

On trouvera peut-être une différence conſidérable entre le contour du développement de la Figure 280 & celui de la Figure 272 ; mais ſi l'on y fait attention, elle n'eſt qu'apparente, parce qu'à cauſe de la double obliquité du berceau de la Figure 274, le point de ſtation ne ſe trouve pas au milieu du développement, comme à la Fig. 272, provenant du cylindre oblique 270, où l'on n'a conſidéré qu'une ſeule obliquité de *biais* ; pour s'en convaincre, il faut réduire la double obliquité du berceau 274 en une ſeule, ce que l'on peut faire comme il ſuit.

Fig. 274. On menera par le point x, extrêmité de l'axe, une perpendiculaire xY ſur AB, ſur laquelle on portera la diſtance du talud VT de Y en z ; ſi l'on tire du centre C la ligne C z, elle donnera la direction de la plus grande obliquité, qui réduit celle du biais CY, & celle du talud Y z en une ſeule C z, ce qui eſt clair.

Pour en concevoir la raiſon, il faut ſçavoir 1°. Que l'axe d'un cylindre ſcalene, de même que celui du cone ſcalene dont nous avons parlé, n'eſt pas incliné également à tous les diametres du cercle de ſa baſe ; 2°. Que la ſection par l'axe faite par un plan perpendiculaire à celui de la baſe, forme le parallelogramme le plus oblique ; 3°. Qu'une autre ſection perpendiculaire à celle-ci forme un parallelogramme rectangle, & par conſéquent que les autres ſections ſont des parallelogrammes plus ou moins obliques, ſelon qu'ils s'approchent ou s'éloignent de ces deux premiers. Ainſi le parallelogramme ABFE n'étant pas dans un plan perpendiculaire au plan de la baſe $a^c b$, n'eſt pas le plus oblique de toutes les ſections par l'axe, c'eſt celui qui paſſe par C z, où eſt le plus grand biais ; ce que l'on peut démontrer comme il ſuit. Pour éviter la confuſion des lignes dans la Figure, on tranſportera la longueur Y z en YZ, comme ſi, à talud ou plutôt à pente égale, le berceau étoit incliné en ſurplomb, & ayant tiré CZ, on lui menera la perpendiculaire Z 8 ; enſuite ayant pris la longueur C x de l'axe pour rayon d'un arc 9 8, qui coupera Z 8 au point 8, on tirera 8 C, qui repréſentera la poſition de l'axe à l'égard d'un plan qui couperoit le cylindre par l'axe, & le diametre 7 Z, lequel repréſente, par notre ſuppoſition dans le changement de la Figure, celui qui paſſeroit par C z. Il faut démontrer que l'angle 8 CZ, que fait l'axe avec ce diametre, eſt plus aigu que celui que ce même axe, conſidéré en C x, fait avec un autre diametre AB.

Les deux triangles CY z & CZ 8 ſont tous deux rectangles,

l'un en Y, l'autre en Z: ils ont tous deux une hypotenuſe égale (par la conſtruction C 8 = C *x*) & le côté C *z* plus grand que CY ; donc l'autre côté Z 8 ſera plus petit que *x* Y, par conſéquent l'angle oppoſé 8 CZ, ſera plus petit que *x* CY ; *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 274.

D'où il ſuit que le point de ſtation de la courbe du développement qui repréſente le cercle de la baſe *a l c b*, ou *a* H *b* étant au point Z, comme nous l'avons dit de la Figure 272, les parties de cette courbe ne ſont pas égales de part & d'autre du milieu qui repréſente la clef, comme lorſqu'il n'y a qu'une ſeule obliquité de biais ſans talud; mais elles pourront l'être ſi on les conſidere à égale diſtance du point de ſtation correſpondant au point *z*, où eſt la plus grande obliquité du cylindre ſur ſa baſe.

Du développement des polyedres & de la ſphere.

Parmi les cinq corps réguliers, le dodecaedre, qui eſt compris par douze ſurfaces égales, qui ſont des pentagones, eſt le premier qui commence à approcher de la ſphere, enſuite l'icoſaedre, qui eſt compris par vingt triangles équilatéraux, eſt déja aſſez rond pour être propre à rouler comme une boule. Mais on ne ſçauroit augmenter le nombre de ſes ſurfaces, & en conſerver l'égalité entr'elles; de ſorte qu'il n'eſt point de plus gros polyedre régulier que l'on puiſſe comparer à la ſphere, mais il n'eſt pas difficile d'en faire d'irréguliers qui en approchent infiniment. En effet ſi l'on diviſe par la penſée un demi-cercle en un poligone d'une infinité de côtés, la révolution qu'il fera ſur ſon diametre formera un ſolide, qui ſera compoſé d'une infinité de cones tronqués formés par la révolution des cordes de ce demi-cercle, qui ſont inclinées à ſon diametre, comme les côtés du cone ſont inclinés à leur axe. Et ſi l'on diviſe les baſes de chacun de ces cones tronqués en polygones, on aura des pyramides tronquées inſcrites dans ces cones tronqués; de ſorte que leurs côté ſeront autant de trapezes qui viennent en ſe rétreciſſant vers les poles, comme on voit à la Figure 276, & ſe réduiſent enfin en triangles aux deux poles de la ſphere, où les pyramides ſont entieres, comme 2 P 3. Fig. 276.

L'arrangement de cette ſuite de trapezes qui forment une ſuperficie de polyedre comparable à celle de la ſphere circonſ-

crite, peut ſe faire de deux manieres, ou ſuivant les Méridiens, c'eſt-à-dire, les plans coupans la ſphere par ſes poles, comme à la Figure 277, & alors les trapezes de ſes ſurfaces deviennent tous inégaux de part & d'autre de l'équateur juſqu'au pole P, où ils finiſſent par un triangle $2p2$, & parce que cette Figure approche de celle d'un fuſeau à filer, on appelle ce développement de la ſphere en *fuſeaux*.

Fig. 276. & 278. L'autre maniere d'arrangement des trapezes, dont nous faiſons un plus grand uſage, eſt ſuivant les paralleles à l'équateur en forme de zones, & alors tous les trapezes égaux ſont rangés de ſuite, comme à la Figure 278, où l'on ſuppoſe la circonférence du parallele diviſée en dix parties; en ſorte que la zone de cercle AB étant pliée, & le trapeze A étant joint au trapeze B par leur côté commun O *i*, O *i*, il ſe forme une pyramide peu différente d'un cone tronqué, dont le ſommet eſt en S (*Fig.* 276) parce que le point S eſt la rencontre de l'axe *x* S du cone, & des cordes *o* 1, 5 4 prolongées, leſquelles cordes ſont les côtés du polygone inſcrit dans les quarts de cercle C *o* P, C 5 P, dont la révolution a formé l'hémiſphere *o* P 5, de ſorte que ſi l'on prend la longueur S *o* pour rayon, & que d'un centre *x* pris à volonté, on faſſe deux arcs de cercles concentriques O 5 O, *i* 4 *i* (*Fig.* 278) éloignés de l'intervalle de la corde O 1 de la Figure 276, & que l'arc O 5 O ſoit fait égal à la circonférence du cercle qui a pour diametre *o* C 5, & l'arc *i* 4 *i* égal à la circonférence du cercle qui a pour diametre 1 4, on aura le développement de la pyramide tronquée *o* 1 4 5 en dix trapezes égaux, rangés ſur une même zone de ſphere, ou plutôt ſur une portion de couronne de cercle, comme on voit dans la Figure 278. La même choſe ſe fera pour le cone tronqué 1 2 3 4, inſcrit dans la ſphere par la révolution de la corde 1 2, autour de l'axe S²C, & l'on aura la portion de couronne de cercle $1^a\ 4\ 1^b$, 2 3 2, laquelle étant pliée en rond, faiſant joindre les trapezes *a* & *b*, formera la zone du cone tronqué 1 4 3 2, inſcrit dans la ſphere. Enfin parce que la corde 2 P aboutit au pole P, elle décrira un cone, dont le ſommet ſera en P, & dont le développement ſera le ſecteur $2^a\ 3\ 2^b$, dont la circonférence approchera beaucoup de celle du cercle entier, parce qu'elle doit être égale à celle du cercle qui a pour diametre 2 3 de la Figure 276; par où l'on voit que chacune des couronnes de cercle doit contenir le même nombre de tra-

pezes, quoique leur circonférence diminue à meſure qu'on approche du pole, parce qu'ils diminuent auſſi de largeur.

Remarques ſur l'uſage de ce développement.

On fait uſage de tous ces arrangemens de développemens des polyedres inſcrits dans la ſphere, ſoit en la réduiſant ſimplement en cones tronqués, ſoit en ſubdiviſant ces cones, & y inſcrivant dans chacun une pyramide tronquée ; alors on range leurs ſurfaces, qui ſont des trapezes, ſur les paralleles à l'équateur de la ſphere, comme à la Figure 278, en forme de couronne de cercle, ou ſur les Méridiens, comme à la Figure 277, ce qui forme une figure de fuſeaux.

On peut dire que ce principe eſt celui de la coupe de toutes les voutes ſphériques faites par panneaux.

Mais parce que les cordes des premieres diviſions en vouſſoirs à la naiſſance des voutes, comme *o 1* donnent des lignes ſi peu inclinées à l'axe de la ſphere, que le ſommet du cone formé par leur prolongation juſqu'à la rencontre de l'axe, eſt ſitué fort loin de ſa baſe ; il arrive que le rayon qui ſert à faire le développement du cone tronqué devient extrêmement long & incommode pour tracer un arc de cercle ; j'ai pourvû à cet inconvénient par le Problême ſuivant.

PROBLEME VIII.

Le diametre AB de la baſe d'un cone droit tronqué, & l'inclinaiſon du côté EB ſur ce diametre étant donnés, trouver autant de points que l'on voudra à la circonférence de la couronne de cercle qui en exprime le développement, ſans en avoir le centre, ou ce qui eſt la même choſe, le ſommet du cone.

Soit (*Fig.* 275) AB le diametre de la baſe inférieure du cone tronqué, DE celuide la ſupérieure, qui eſt donné par l'inclinaiſon du côté BE vers l'axe SC, lequel eſt perpendiculaire ſur le milieu du diametre donné AB ; & EB, DA les côtés qui font partie de ceux du triangle par l'axe ASB, ſi l'on acheve le cone en prolongeant ſes côtés, CX ſera une partie de l'axe CS. *Fig.* 275.

Ayant pris à volonté le point F ſur le côté EB, on menera FG parallele à XC, ou perpendiculaire à CB, & l'on diviſera

Fig. 275. l'angle EFG en deux également par la ligne FL, à laquelle par le point B, on menera la parallele BY, qui rencontrera XC prolongée en Y. Je dis que le point Y ſera à la circonférence de la baſe de la couronne de cercle qui donnera le développement du cone tronqué.

De même ayant pris à volonté ſur CB le point H, & mené par le Problême I du IIIe. Livre, la ligne HN, laquelle étant prolongée concourre au même point S que la ligne BE; ſur cette ligne HN ayant pris un point K à volonté, & mené comme ci-devant, KI parallele à SY, on diviſera de même l'angle NKI en deux également par la ligne MK, à laquelle par le point Y on menera la parallele Y*y*; le point *y* ſera à la même circonférence que le point Y. On trouvera en répetant une pareille opération autant de points que l'on voudra, dont on pourra placer les correſpondans entre Y & A, ſans le ſecours du centre ou ſommet S.

Ce que l'on dit de la baſe AB du cone tronqué pourra s'appliquer à la baſe ſupérieure DE du même cone.

DEMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés BE, AD juſqu'à ce qu'ils concourrent au point S, où ſera le ſommet du cone.

A cauſe des paralleles FG, SY les angles GFB, YSB ſont égaux entr'eux; & à cauſe des autres paralleles LF, YB, les alternes LFG, FGB, & XYB ſont auſſi égaux, de même que LFE & YBE; donc les triangles SYB, SYA ſont iſoſceles, donc SY peut être le rayon du même cercle que celui qui aura pour rayon les côtés SB & SA, donc le point Y eſt à la circonférence du cercle, *ce qu'il falloit démontrer.*

On démontrera de la même maniere que le triangle SY*y* eſt iſoſcele, par conſéquent que le point *y* eſt à la circonférence du même cercle qui paſſera par B & par *y*, & qui aura pour rayon la ligne SB ou SY; donc on pourra trouver autant de points que l'on voudra à cette circonférence ſans le ſecours du centre, *ce qu'il falloit faire.*

USAGE.

Ce Problême ſert à rendre praticables quelques traits de la

coupe des Pierres, que le P. DERAND & M. de la RUE ont donné ſans remédier aux inconvéniens de la pratique, par exemple, pour faire le développement de la baſe d'une porte en tour ronde & en talud, parce qu'une telle tour eſt un cone tronqué, dont le ſommet eſt très-loin. Car ſuppoſant qu'elle n'eût que trente pieds de diametre, & un ſixieme de talud, qui eſt un des plus grands qu'on leur donne, ſi elle eſt à trente pieds de haut, elle ne ſera retrécie à ſon ſommet que de dix pieds; ſcavoir, cinq de chaque côté; ainſi les côtés du trapeſe par l'axe ne ſe rencontreront qu'à la hauteur de 90 pieds, laquelle ne ſera pas encore égale à la longueur du rayon, qui eſt le côté du triangle par l'axe du cone entier, puiſque cette hauteur eſt verticale, & que le côté eſt incliné à l'horiſon. Or une longueur de 93 pieds ou environ, demande une grande place commode pour y tracer un arc avec une corde ou une chainette, qui ne peuvent donner un contour juſte, à cauſe de leur extenſion qui varie, ſoit en s'alongeant, lorſqu'on tire plus ou moins, ſoit à cauſe du frottement ſur une étendue de ſurface auſſi grande, ſur laquelle il y a toujours quelques inégalités; cette longueur étant d'ailleurs trop conſidérable pour faire avec une perche un compas à verge, il en faudroit joindre pluſieurs bout-à-bout, & les faire ſoutenir par pluſieurs hommes, qui ſe meuvent d'un mouvement de rayon, chacun plus ou moins vite, comme il convient à leur diſtance du centre.

L'autre cas où ce Problême ſeroit encore très-néceſſaire, eſt pour la formation des panneaux de développement des doëles, des premieres retombées des vouſſoirs des voutes ſphériques, dont les diviſions du ceintre de hauteur ſont d'un petit nombre de degrés de ſon contour; c'eſt-à-dire où il y a un grand nombre d'aſſiſes ou rangs de vouſſoirs; mais alors le moyen le plus court eſt de les tailler par ſuppoſition de doëles plates, comme nous le dirons au IVe. Livre, Chap. VII.

Après avoir trouvé trois points de la circonférence de la baſe du cone tronqué; ſuivant ce Problême, on peut prendre l'angle que font les lignes menées de l'un à l'autre, & par le Problême I. du II. Livre, s'en ſervir pour tracer, par un mouvement continu, le ſegment du cercle dans leſquels ils ſont.

Du développement des hélices.

Nous avons expliqué au II. Livre ce que nous entendons par le mot d'hélice. Il convient d'ajouter ici qu'on peut en diſtinguer différentes eſpeces, rélativement aux corps ſur leſquels on peut les décrire.

Suivant ce ſiſtème, nous appellerons hélice *cylindrique droite*, celle qu'on pourra décrire ſur la ſurface d'un cylindre droit; *cylindrique ſcalene*, celle qui ſera décrite ſur un cylindre de baſe elliptique, ou incliné à ſa baſe. Hélice *conique ou ſphérique*, celle qui ſera décrite ſur la ſurface d'un cone ou d'une ſphere; nous comprendrons ces deux dernieres ſous le nom de *limace*, parce qu'elles approchent de plus en plus de leur axe.

Nous diviſerons encore les hélices cylindriques en régulieres & irrégulieres.

Par le mot de *réguliere*, nous entendons la courbe qui s'éleve au-deſſus de ſa baſe d'un mouvement oblique toujours égal, ſans s'approcher ni s'éloigner de l'axe autour duquel elle fait des révolutions égales, comme une vis de preſſoir.

Par le mot d'irréguliere, nous entendons celle qui fait des révolutions inégales autour de ſon axe.

Cette inégalité de révolutions peut encore être conſidérée de deux manieres; 1°. En ce que la courbe s'éloigne & s'approche de ſon axe, comme lorſqu'elle eſt à la ſurface d'un cylindre de baſe elliptique, ou de quelqu' autre courbe qui rentre en elle-même; 2°. Ou en ce que l'intervalle de la hauteur de ſes révolutions augmente ou diminue.

LEMME.

Le développement d'une hélice cylindrique réguliere ſur la ſurface du cylindre droit développé, eſt une ligne droite; celui des irrégulieres de la ſeconde eſpece, & des limaces, eſt une ligne courbe.

La premiere partie de ce Théorême eſt claire par la déſinition; car puiſque nous ſuppoſons le mouvement de l'hélice autour de ſon axe d'une obliquité toujours égale ſur la ſurface d'un cylindre, elle n'eſt pas plus inclinée en un endroit au plan de la baſe qu'en un autre.

Pour

Pour rendre cette vérité plus ſenſible, on doit conſidérer le cylindre comme un priſme d'une infinité de côtés, dont le développement forme un parallelogramme rectangle, ſi le cylindre eſt droit, lequel parallelogramme eſt compoſé de tous les petits rectangles infiniment étroits, qui enveloppent le priſme, parce que les parties priſes enſemble ſont égales à leur tout.

Soit, par exemple (*Fig.* 281) une demi-révolution d'hélice A *h* ſur le cylindre AE, dont la moitié de la baſe eſt le demi-cercle A 1 2 B, ayant rectifié ſon contour en une ligne droite AK ſur le diametre BA prolongé; ſi l'on diviſe cette ligne en parties égales, par exemple, ici en trois, & la hauteur de la demi-révolution B *h*, ou ſon égale AI, auſſi en trois parties égales, & qu'on mene par chacune de ſes diviſions des paralleles aux côtés AK & AI; il ſe formera neuf rectangles égaux entr'eux, & ſemblables au grand AH, qui exprime le développement de la moitié du cylindre, dont la diagonale eſt commune à celles des petits A *y*, *yx* & *x*H, leſquelles expriment chacune l'obliquité de l'hélice qui ne change point, ſuivant la définition. Or la diagonale AH eſt une ligne droite, par conſéquent la ſomme ou l'addition de toutes les parties de l'hélice infiniment petites, rangées ſur la ſurface du cylindre développé, forme une ligne droite; *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 281.

La démonſtration de la ſeconde partie de ce Theorême ſuit naturellement de la premiere; car ſi les révolutions ſe font d'un mouvement inégal en direction d'inclinaiſon qui augmente ou diminue les intervalles de chaque révolution, les contours & les hauteurs n'étant plus proportionnels, les petits parallelogrammes ne ſeront plus ſemblables au grand A 6, (*Fig.* 282) qu'on peut conſidérer comme un développement de cylindre, & par conſéquent ſa diagonale ne ſera plus commune à celles des petits infiniment petits, leſquelles faiſant auſſi, par la ſuppoſition, des angles inégaux avec la baſe AB, où ſes paralleles 1 *x*, 2 *y*, 3 *z* feront auſſi des angles entr'elles, & par conſéquent ſeront rangées en ligne courbe; *ce qu'il falloit ſecondement démontrer.*

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit qu'autour du même cylindre, on peut former une infinité d'hélices différentes, dont les développemens ſe-

ront toujours des lignes courbes, ſoit que le cylindre ſoit droit ou ſcalene ; car les révolutions peuvent augmenter ou diminuer en hauteur, ſuivant telle progreſſion que l'on jugera à propos, ou laiſſant les hauteurs égales, on peut augmenter ou diminuer la viteſſe du mouvement parallele à la baſe ; ce qui eſt repréſenté à la Fig. 282, par la différence des longueurs des parallélogrammes AK, K*l*, *lm*, *mn*, &c.

COROLLAIRE II.

Secondement, que le développement d'une hélice cylindrique ſcalene quoique réguliere, ſera encore une ligne courbe, parce que le développement de la baſe du cylindre ſcalene n'étant pas une ligne droite, comme celle du contour de la baſe du cylindre droit, mais une courbe, comme on voit à la Figure 272, il ſuit que les diviſions qui donnoient des parallelogrammes ſur le développement de ſa ſurface, en tirant des paralleles à la baſe & à la hauteur, ne donneront pas des Figures rectilignes, mais des quadrilignes mixtes, dont les paralleles à la baſe ſeront courbes, & leurs diagonales de même, mais un peu moins en ce qu'elles participent de la courbure parallele à la baſe, & de la ligne droite du côté parallele à l'axe ; c'eſt pourquoi nous demandons pour le développement en ligne droite, que le cylindre ſoit droit ſur ſa baſe. Je n'ai point ajouté dans l'expoſé du Théorême, que la baſe fût circulaire ou elliptique, parce que de quelque courbe qu'elle ſoit, il eſt toujours évident que ſi l'axe du cylindre eſt perpendiculaire au plan de la baſe, le développement de la ſurface cylindrique ſera toujours un parallelogramme rectangle, qui pourra être diviſé en une infinité d'autres ſemblables, comme AH de la Figure 281, par conſéquent, dont la diagonale ſera le développement d'une hélice.

COROLLAIRE III.

De ce que nous venons de dire au Corollaire précédent, on tire naturellement la démonſtration de la troiſieme partie du Théorême, qui dit que les développemens des hélices en limaces ſont toujours des lignes courbes, ſoient qu'elles ſoient coniques, conoïdes, ſphériques ou ſphéroïdes ; car toutes ces

Figures ne pouvant être développées qu'en les prenant par parties de cones tronqués inſcrits dans leur ſurface, & les développemens des courbes quelconques tracées ſur la ſurface du cone développée étant néceſſairement des lignes courbes, comme nous l'avons démontré aux Figures 266 & 267; il eſt évident que toutes les eſpeces de limaces qu'on y pourra décrire, étant développées ſur la ſurface du cone, ſeront des lignes courbes, parce qu'en diviſant le contour du cone développé en parties égales, & la hauteur de même, on aura au lieu de parallelogrammes mixtes, comme nous venons de le dire ſur le cone ſcalene, des trapezes mixtes, dont les petites parties de l'hélice ſeront les diagonales, participant de la courbure du cercle de la baſe développée ſur le cone, & de la droite qui eſt le côté du cone.

PROBLEME IX.

Faire le développement d'une hélice quelconque ſur une ſurface cylindrique ou conique développée.

Premierement, ſi l'hélice eſt cylindrique réguliere, ce développement eſt très-facile, puiſqu'il ne conſiſte qu'à trouver les extrêmités d'une ligne droite.

Soit (*Fig.* 281) une hélice A *h* GE qui fait une révolution & demie autour du cylindre droit DB, on rectifiera le contour du cercle de ſa baſe, qu'on portera une fois & demi ſur le diametre AB prolongé en A^2, ou, ce qui eſt la même choſe, on prendra trois fois le contour du demi-cercle A 1 2 B, de B en A^2, & par le ſommet du cylindre E, on tirera au point A^2 la ligne droite EA^2, qui ſera le développement demandé. *Fig.* 281.

Il eſt viſible que ſi l'on n'avoit propoſé que celui d'une demi-révolution, on auroit tiré *h a* du point *h*, tiers de la hauteur BE au point *a*, qui eſt à diſtance de B, de la longueur de l'arc A 1 2 B développé.

Si on avoit demandé une révolution entiere, la ligne F *b* y auroit ſatisfait; d'où l'on peut inferer, 1°. comment on doit faire le développement de telle partie qu'on voudra; 2°. que ſi l'on enveloppe le cylindre d'un triangle iſoſcele comme AHG, il y tracera deux hélices qui ſe croiſeront en *h*.

Secondement, ſi l'hélice eſt cylindrique irréguliere, ou coni-

que ; ayant rectifié le contour de la baſe auquel elle répond, on diviſera la hauteur de chaque révolution en parties proportionnelles à la différence qui regne de l'une à l'autre en croiſſant ou en diminuant, & l'on diviſera le développement du contour de la baſe en un même nombre de parties égales qu'on a diviſé la hauteur, des révolutions, que nous avons ſuppoſé inégales, puis on menera par chaque diviſion des paralleles à la baſe qui ſeront droites au cylindre droit, & courbes au cylindre ſcalene, leſquelles ſeront croiſées par des lignes droites, paralleles à l'axe dans le cylindre, & tendant au ſommet dans le cone ; la ligne courbe menée d'une interſection à la ſuivante en diagonale, ſera le développement de l'hélice demandée.

La même choſe ſe fera pour avoir le développement de l'hélice en limace ſur un cone ; mais ſi la limace, comme une loxodromie ſur une ſphere, étoit propoſée à développer, on ne le pourroit ſans interruption ; parce que la ſphere ne pouvant être développée que des deux manieres dont nous avons parlé, ou comme à la Figure 277, en fuſeaux, ou comme à la Figure 278, en portions de couronnes de cercle, qui laiſſent des intervalles entr'elles, encore plus grands que les fuſeaux ; on ne pourroit avoir le développement de l'hélice en limace, que par petites parties qui ſeroient les diagonales des trapezes mixtes formés dans différentes zones coniques inſcrites à la ſurface de la ſphere.

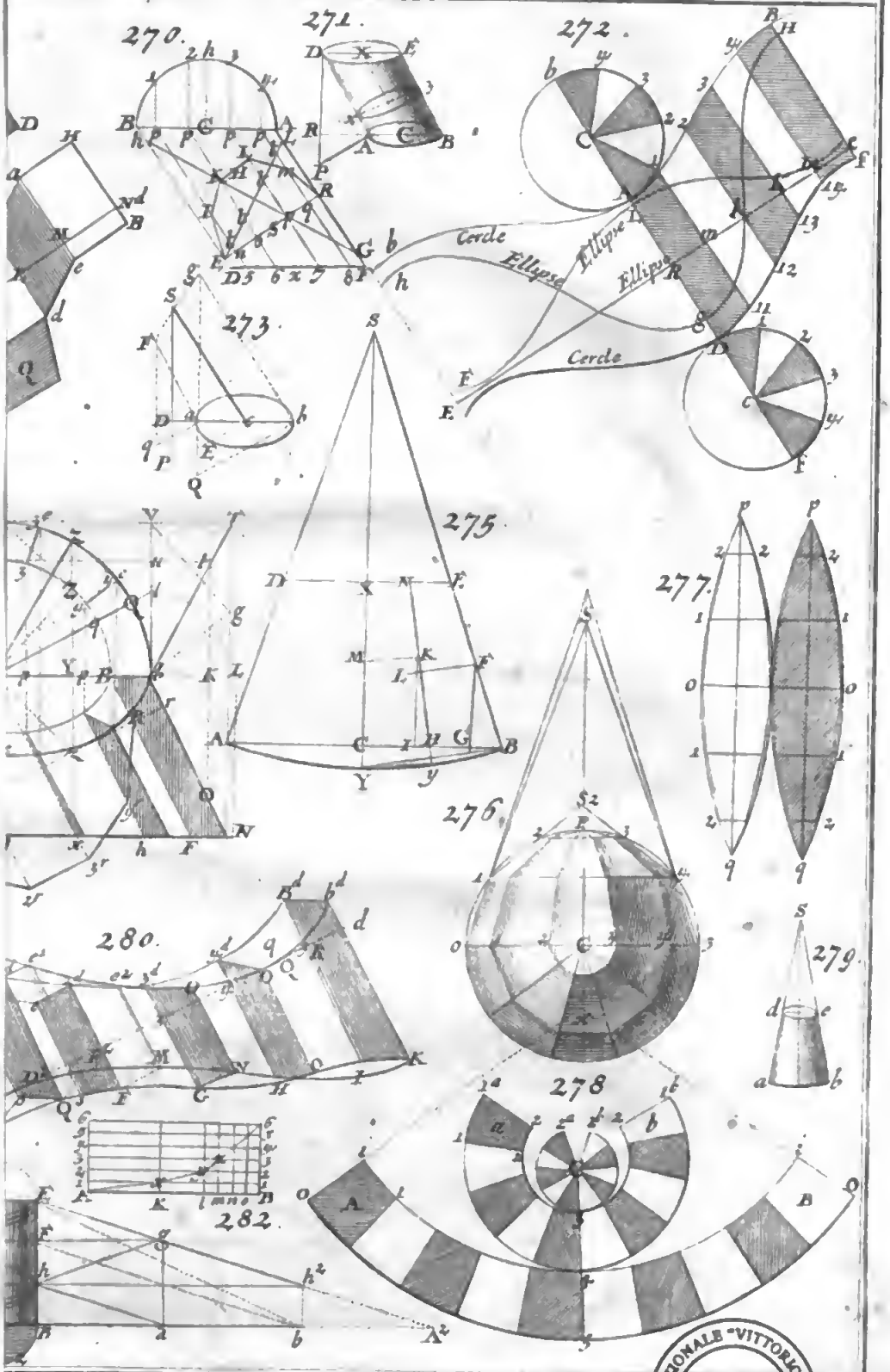
Voilà ce me ſemble les principales regles pour faire les *plans*, profils, élévations & développemens des corps comparables aux voutes uſuelles ; il nous reſte à faire voir de quel uſage elles ſont pour leur conſtruction, c'eſt ce que nous allons montrer par deux Problêmes généraux.

PROBLEME X.

Les élévations de deux faces oppoſées dans des plans paralleles entr'eux, étant données en projection ſur un même plan vertical, & la projection horiſontale de leurs intervalles étant donnée, trouver la Figure de chaque partie de développement des ſurfaces d'une voute diviſée en pluſieurs vouſſoirs, tant apparente qu'intérieure.

En termes de l'art,

Une double élévation de face antérieure & poſtérieure, le



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

le plan & le profil d'une voute réguliere étant donnés, *trouver les panneaux de lits, de doële, & de tête.*

Si les faces oppoſées de l'entrée & de la ſortie d'une voute, ſont égales & perpendiculaires à une même direction, il eſt évident qu'elles ſeront confondues dans l'élévation qui ſera réduite à un même ceintre circulaire, elliptique, ſurhauſſé ou ſurbaiſſé; telles ſont les deux faces d'un berceau droit, projettées ſur un même plan vertical. Alors une ſeule élévation eſt équivalente à deux; ſçavoir, à l'antérieure & à la poſtérieure, ſi les faces ſont inégales, ou inégalement ſituées à l'égard du plan horiſontal, comme ſont celles des deſcentes, dont l'une eſt plus haute que l'autre, ou inégalement ſituées à l'égard du plan vertical, comme dans les voutes biaiſes, ou ſi elles participent de l'un & de l'autre, comme les deſcentes biaiſes, l'élévation commune aux deux faces ſera exprimée par des contours différens qui ſe croiſeront, ou qui ne ſeront paralleles que dans les voutes coniques droites, quoique les cordes de leurs arcs correſpondans aux mêmes diviſions puiſſent être paralleles. Mais ſoit que les contours ſoient paralleles ou non, s'ils ſont tracés par la même projection verticale ſur un même plan, ils conſerveront toujours un certain rapport de diſtance entr'eux, qui ſervira à trouver tous les côtés des ſurfaces planes qui terminent les parties de la voute diviſée en ſes vouſſoirs.

Pour faire voir l'étendue, & pour ainſi dire la généralité de ce Problême, nous choiſirons deux exemples de voutes coniques, l'une droite, l'autre oblique, leſquels étant bien entendus, ſerviront à la conſtruction de toutes les voutes. Premierement à celle des cylindres qui ſont plus ſimples, & plus faciles que les coniques; ſecondement aux coniques, dont ils expoſent toutes les difficultés; & en troiſieme lieu, aux ſphériques, leſquelles doivent être réduites, ou en portions de cones tronqués ou en polyedres, qui ſont pluſieurs parties de pyramides tronquées, dont nous donnons ici les exemples par la réduction des cones en pyramide.

Premier exemple des voutes coniques droites.

Soient (*Fig.* 283) les deux ceintres de face pris à la doële B/D extérieur, GKH intérieur, que nous appellons face antérieure & poſtérieure, réunis par la même projection ſur un

Pl. 14. *Fig.* 283.

Fig. 283. même plan avec leurs extrados ALE & F*k*I, décrits du même centre C. Ayant diviſé ces ceintres en leurs vouſſoirs, par exemple, en cinq aux points 1, 2, 3, 4, & tiré les joints de tête par ces points du centre C, 1 5, 2 6, 3 7, 4 8, on fera la projection horiſontale de la voute & de ſes joints de lit, ſuivant les regles ordinaires, laquelle ſera le trapeze *afie*, dans lequel les deux parallelogrammes *afgb* & *dhie* ſeront les ſurfaces horiſontales des piédroits à l'impoſte dans leurs juſtes meſures. Il n'en ſera pas de même des autres lignes qui ſont la projection des joints de lit, elles ſeront plus courtes que ces joints, parce qu'elle eſt horiſontale, & que ces joints ſont inclinés à l'horiſon dans le même plan vertical.

Il faut commencer par chercher la véritable longueur des joints de lit, parce qu'ils ſont les côtés communs aux portions des ſurfaces de la doële, & aux ſurfaces des lits. Ce qui ſe fait par des profils particuliers qu'on peut faire de différentes façons, qui donnent toujours la même longueur; on peut choiſir la plus commode.

Premierement, on peut élever ſur la projection horiſontale d'un joint de lit donnée comme $1p^1$ un plan vertical de toute la hauteur du vuide qui eſt entre la projection ſur le plan horiſontal & le véritable joint; ainſi on élevera ſur la ligne $1p^1$ au point 1 une perpendiculaire 1T, égale à la hauteur $1t$, de l'élévation, qui eſt celle de la *retombée*, & au point p^1 la perpendiculaire p^1V égale à celle de la retombée Oe^1, la ligne VT ſera le profil & la véritable longueur du joint de lit, dont $1p^1$ eſt la projection.

Secondement, on peut faire le même profil en ſupprimant la hauteur de la retombée du point le plus bas; par exemple, 2 du joint de lit, dont la projection verticale eſt la ligne $2e^2$, & mettant ſeulement à un des bouts p^2 de la projection horiſontale $2p^2$ la hauteur e^2n au-deſſus du point 2, qu'on portera de p^2 en 2e perpendiculairement à la projection horiſontale donnée $p^2 2$.

Troiſiemement, on peut faire le même profil, en tranſportant toutes les hauteurs, par des lignes paralleles à la baſe AE de l'élévation, ſur une ligne qui lui ſoit perpendiculaire, comme *f*L, *f*C, que toutes les paralleles menées par les points 2 & 1 de l'élévation de la face poſtérieure, & e^1, e^2 de la face antérieure, couperont en des points f^2, f^1, u qui donneront

les hauteurs ſupérieures & inférieures des joints de lit, dont il ſera facile de trouver les inclinaiſons, en portant ſur ces paralleles les projections horiſontales données; par exemple, $1p^1$ en $u\,4\,1$, & $2p^2$ en $f^1\,3^2$, les lignes inclinées menées par les points 4^1, f^1, 3^2, f^2, ſeront les profils & les vraies longueurs des joints de lit. *Fig.* 283.

Il faut remarquer que ſi la voute eſt portion d'un cone droit tronqué, dont les faces antérieure & poſtérieure ſont paralleles entr'elles, comme dans cet exemple, il eſt inutile de faire des profils pour trouver les longueurs des joints; parce qu'en ce cas ces joints ſont tous égaux à ceux des impoſtes, comme ici à $b\,g$ ou $h\,d$; ainſi dans cette derniere conſtruction de profil, par le moyen des paralleles à la baſe AE, il ſuffira de prendre la longueur $g\,b$ d'un point à l'impoſte avec un compas, & des points f^1 & f^2 pour centres, faiſant des arcs de cercle qui couperont les paralleles $1\,u$ & $2\,f^1$ prolongées aux points $4\,1$, $3\,2$, on aura les mêmes longueurs que par la maniere précédente; mais ſi la voute eſt biaiſe, c'eſt-à-dire, portion d'un cone ſcalene, on ne peut les trouver que (comme on vient de le dire) en portant les longueurs de la projection horiſontale ſur les paralleles correſpondantes.

Les longueurs des lignes inclinées aux plans des élévations des faces antérieure & poſtérieure étant trouvées, la réſolution du Problême ne conſiſte *qu'à faire des triangles rectangles, dont une jambe eſt donnée par l'élévation, & dont l'hypotenuſe trouvée doit être adaptée à l'autre jambe inconnue*, par une ſection d'arc de cercle qui en eſt le *lieu*, & qui en détermine la poſition; ce qu'on concevra mieux par des exemples.

Pour former un panneau de doele plate, par exemple du ſecond vouſſoir, laquelle eſt marquée dans l'élévation par le trapeze $1\,e\,1\,e\,2\,2$, ayant tiré la corde $1\,2$, on la prolongera de part & d'autre vers y & vers z, & des points de diviſion de la face antérieure $e\,1$ & $e\,2$, on abaiſſera ſur cette corde les perpendiculaires $e^1\,y$ & $e^2\,z$, enſuite on tranſportera à part où l'on voudra la ligne $y\,z$, par exemple ici à la Fig. 284, & ayant élevé aux points y & z deux perpendiculaires indéfinies $y\,21$, $z\,22$, on prendra la longueur d'un des joints de lit, comme $b\,g$ ou $d\,h$, ou au profil 41, $f1$, ou 32, $f2$; car toutes ces lignes ſont égales, parce que le cone eſt droit; mais s'il ne l'étoit

Fig. 283. & 284. pas, on prendroit la longueur de la ligne 4 1, *f* 1, & du point 1 pour centre, on fera l'arc 8 21, qui couperoit la ligne *y* 21 au point 21, & enſuite la longueur de la ligne 3 2, *f* 2, & du point 2 de la Fig. 284 pour centre, on fera l'arc de cercle 9 22, qui coupera la perpendiculaire z 22 au point 22; enfin par les points trouvés, on tirera les lignes 21 1, 21 22, 22 2, & l'on aura le panneau de la ſeconde doële repréſentée au plan horiſontal par le trapeze 1 p^1 p^2 2, & à l'élévation par 1 *e* 1 *e* 2 2; il en faudroit faire autant pour les autres doëles, ſi elles n'étoient pas égales comme elles ſont dans le cas préſent.

A l'égard des panneaux de lit, puiſqu'ils ſont tous égaux à ceux de l'impoſte *a f g b* ou *d h i e*, il eſt inutile de les chercher, on verra dans l'exemple ſuivant la maniere de les trouver lorſqu'ils ſont inégaux.

Il reſte à faire voir comment on peut appliquer cette méthode aux voutes dont les faces ſont inclinées aux plans verticaux, ſur leſquels on doit faire l'élévation; comme par exemple s'il s'agiſſoit d'une voute *ſur le coin* ou *dans l'angle*, dont le plan horiſontal ſeroit *a m d*, *o* M z, ou compoſée de deux portions droites, comme *a m* & *o* M, ou de deux arcs de cercle, comme M z & *m d*.

Il faut, par le Chapitre IV. de ce IIIe. Livre, circonſcrire à la Figure irréguliere du plan horiſontal un trapeze *a f i e*, dont les côtés oppoſés *a e* & *f i* ſoient paralleles entr'eux, & opérer comme ſi la voute étoit réguliere, ſuivant ce que nous venons de dire, pour trouver les panneaux réguliers des lits & des doeles, & retrancher de leurs côtés ce que la projection horiſontale du plan irrégulier retranche des parties du régulier, ſuivant la regle que nous avons donnée, page 359, (*Fig.* 250).

Ayant donc fait le panneau de doële de la voute conique réguliere 21, 22, 2, 1, (*Fig.* 284) pour le ſecond vouſſoir, on élevera des perpendiculaires ſur les points S, Q, R, T, où les projections des joints de lit 1 p^1, 2 p^2 ſont coupées par celles des faces *o* M, *a m*, leſquelles perpendiculaires *q* Q, *s* S, *r* R, *t* T, couperont les profils VT & 2e 2 aux points QS & RT qui donneront les excès VS, QT, 2e T, R 2 des côtés du panneau de doële réguliere ſur l'inſcrite irréguliere. Ainſi on portera la longueur VS en S 21 de la Fig. 284, Q T en Q 1 de la même Figure, 2 R en 2 R, T 2e en T 22, & par les points trou-

trouvés STQR, on tirera des lignes droites ST, QR, qui formeront le trapezoïde QSTR, lequel ſera le panneau de doële du ſecond vouſſoir de la voute conique biaiſe ou dans un angle, ſuivant qu'elle eſt déſignée dans la projection horiſontale de la moitié *a o* M *m*, ou P *p* M *m*. *Fig.* 283. & 284.

On en feroit autant pour la voute ébraſée, qui ſeroit dans une tour ronde, dont la projection eſt déſignée par ſa moitié MY *d m*. La ſeule différence qu'il y auroit, c'eſt qu'au lieu des lignes droites ST, QR que nous avons tiré au panneau de doële, (*Fig.* 284) pour les faces antérieures & poſtérieures; il faudroit tirer des portions de ces courbes qui ne ſont pas planes, c'eſt-à-dire, qui ne peuvent être décrites dans un plan, deſquelles on pourroit approcher par la circonſcription d'un polygone dans le cercle de la projection de la tour ronde & creuſe; mais parce que nous devons donner ce trait dans le Livre ſuivant, nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette difficulté, il ne s'agit ici que de donner une méthode générale pour tous les polyedres, ſans entrer dans le développement des corps ronds cylindriques, ſphériques, ou coniques, conſidérés comme tels, mais ſeulement comme compris & enveloppés par un grand nombre de ſurfaces planes inſcrites dans les courbes convexes, ou circonſcrites aux convexes.

Second exemple des voutes coniques ſcalenes à double obliquité,

Et en termes de l'art,

Deſcente biaiſe ébraſée en canoniere.

Soit (*Fig.* 285) le ceintre de face antérieure à l'arrête de la doële GF *g*, & celui de la face poſtérieure I E *g*, avec leurs extrados A B *b*, & H D Z diviſés en leurs vouſſoirs L R 3 4 & P S 7 8, projettés ſur la même ſurface verticale, ce que nous pouvons ſuppoſer comme fait & donné ſuivant l'énoncé du Problême; mais parce que la conſtruction de cette projection eſt la même que celle de la ſolution du Problême pour trouver chaque ſurface des vouſſoirs en particulier, il eſt à propos de la mettre ici tout au long pour rendre la choſe plus facile à comprendre; parce que la conſtruction tient lieu d'explication. *Fig.* 285.

Pl. 14. Fig. 185. Soit le trapeze *a h z y* le plan horiſontal de la voute ; ÆX la projection de ſon axe ou ligne du milieu C c^2 ; p^1, l^1 la projection horiſontale du joint de lit LP ; S^2 R^2, celle du lit RS ; nous ne prendrons que cette moitié de voute pour éviter la multiplicité des lignes dans la Figure.

On commencera par tirer du point X une perpendiculaire XC ſur A Æ *z*, & ayant porté ſur la même AÆ la hauteur Æ c^2 de la deſcente ou montée ; c'eſt-à-dire, de la différence du niveau de la face antérieure AÆ, & de la poſtérieure H c^2 ; du point C pour centre & des intervalles CG, CA ou X G *p*, X *a*, on décrira les cercles concentriques GF *g* & AB *b*, l'un pour la doële, l'autre pour l'extrados de la face antérieure. Enſuite par le point c^2 ayant mené HZ parallele à A *b*, du point c^2 pour centre, & pour rayons les longueurs Æ *i*, Æ *h*, on décrira les deux cercles concentriques I E 9, HDZ, l'un pour la doële, l'autre pour l'extrados de la face poſtérieure, laquelle ſera ainſi projettée ſur le même plan vertical que l'antérieure. Enſuite ayant diviſé ces ceintres en nombre de vouſſoirs égaux, par exemple en 5, aux points L R 3 4, & P S 7 8, on joindra les points correſpondans par des lignes droites, qui exprimeront ſur l'élévation les joints de lit, telles ſont GI pour celui de l'impoſte, LP pour le premier au-deſſus, & RS pour le ſecond.

On tirera auſſi à l'ordinaire les joints de tête L *m*, R *t*, de leur centre C, de même que P *q* & ST de leur centre c^2.

Cette préparation étant faite, il ſera aiſé de trouver tous les côtés des ſurfaces qui comprennent chaque vouſſoir.

Premierement, pour les panneaux de tête, il n'y a point de difficulté, ils ſe prendront ſur les élévations. Par exemple, ceux du ſecond vouſſoir ſeront les portions de couronnes de cercles *m* LR *t* pour la face antérieure, & *q* PST pour la face poſtérieure.

Secondement, pour les panneaux de lit, par exemple, pour le premier à l'impoſte marqué au plan horiſontal par le parallelogramme *a h i* G *p*, & à l'élévation par le parallelogramme AHIG, on commencera par en chercher la véritable longueur par le profil, comme nous l'avons dit à l'exemple précédent, parce que les côtés AH & GI de l'élévation ou projection verticale ſont trop courts, puiſqu'ils le ſont encore plus que ceux de l'horiſontale *a h i* G *p*, laquelle eſt plus racourcie que la deſ-

cente qu'elle repréſente. Pour y parvenir, on y élevera une verticale ÆE ſur la baſe horiſontale AÆ où l'on voudra. Nous faiſons ici ſervir la ligne du milieu de la face poſtérieure, enſuite menant des paralleles indéfinies à cette baſe par les points de diviſion des doëles LP, RS, qui couperont la verticale aux points 1, *p*, 2, *s*. *Fig.* 285.

On portera ſur les lignes provenant des joints inférieurs LR, comme L*l*, R*r*, les projections des joints de lit; ſçavoir, *i*G*p* en Æ*z*; *p*¹, *l*¹, en 1*l*; S² R² en 2*r*, & par les points trouvés *z*, *l*, *r*, on tirera les inclinées *z c*², *lp*, *rs*, qui ſeront les véritables longueurs des joints de lit. Si l'on avoit un grand nombre de ces joints, on pourroit trouver tous les points des baſes intermédiaires, en faiſant ſeulement Æ*z* égal à *i*G*p*, & E*e* égal à ÆX, en tirant la ligne *z e*, elle couperoit toutes les baſes aux points *l* & *r*, qui ſe trouveroient entre deux; ce qu'il eſt facile d'appercevoir par la ſeule inſpection du plan horiſontal, où elles ſont compriſes & terminées par deux lignes droites *i*Æ, G*p*X.

Après avoir trouvé par les profils, les lignes inclinées qui ſont égales aux joints de lit, il ne s'agit plus que de les adapter aux triangles rectangles, dont elles doivent être les hypotenuſes, pour trouver les angles qu'elles font avec les joints de tête.

On prolongera les joints de tête du petit ceintre du côté de ceux du grand ou au-dehors, comme P*q* en *n*, ou au-dedans comme TS en V, & par les points *m* & L, *t* & R des diviſions de la face antérieure, on tirera aux joints prolongés des perpendiculaires *m n*, LN, *t u*, RV qui formeront pluſieurs triangles rectangles, dont cette conſtruction donnera un côté dans ſa juſte meſure; ſçavoir, celui qui ſera ſur le joint de tête prolongé, les autres deux côtés demeurant raccourcis par la projection; mais parce qu'on a déja trouvé la valeur de l'hypotenuſe par le profil, on a de quoi achever les triangles que ceux de la projection repréſentent, comme on le verra dans les exemples.

Pour le premier joint de lit, qui eſt celui de l'impoſte, on tranſportera la ligne *i*A ou ſon égale IQ avec ſes diviſions H & *o* où l'on voudra, comme à la Figure 288, en *i h*, *o* Q, & l'on tirera les perpendiculaires indéfinies Q*x*, *o u* par les points *o* & Q, enſuite des points *h* & *i* pour centres, & de l'intervalle *c*²*z* du profil, on fera deux arcs de cercle qui couperont ces

Fig. 285. & 288. perpendiculaires aux points *x* & *u*, par lesquels ayant tiré les lignes droites *x h*, *u i* & *x u*, on aura le parallelogramme *x h i u* pour le premier lit de l'impoſte, lequel eſt non-ſeulement plus grand que celui de la projection horiſontale *a h i G p*, mais encore inégal dans ſes angles qui ſont un peu moins aigus, comme il paroît dans cette Figure, où celui de la projection horiſontale eſt ponctuée en $h\,a^1\,g^1\,i$.

Le ſecond & le troiſieme panneau de lit ſe trouveront de même en changeant les triangles rectangles *m n* R, LNP, *t u* T, RVS, en d'autres triangles rectangles plus allongés ſur les mêmes baſes *n* R, NP, *u* T, VS, par le moyen des hypotenuſes trouvées *p l*, Sr. Ainſi ayant tranſporté où l'on voudra la ligne P *n* avec ſes diviſions N, *q*, comme à la Figure 286, on lui

Fig. 286. fera les perpendiculaires *n* M, NL, & des points *q* & *p* pour centres & de l'intervalle *p l* pris au profil, on fera des arcs de cercle en M & en L qui couperont ces perpendiculaires aux points M & L, par leſquels on fera paſſer des lignes droites qui ſont les côtés du parallelogramme M *q p* L, lequel ſera égal à la ſurface du ſecond lit marqué dans l'élévation par le parallelogramme racourci *m q* P L de la Figure 285.

Fig. 287. La Figure 287, fait auſſi voir le troiſieme lit formé ſur la baſe VS *u* T tranſportée pour établir deſſus un parallelogramme plus allongé que celui de l'élévation *t* TSR, ſuivant les mêmes regles de décompoſition de la projection.

Il ne reſte plus à préſent qu'à trouver les ſurfaces des panneaux de doëles plates qui doivent paſſer par les cordes des arcs des diviſions des ceintres de face antérieure & poſtérieure; ce qui ſe fera de la même maniere dont on s'eſt ſervi pour trouver les lits en abaiſſant des perpendiculaires ſur ces cordes prolongées, s'il le faut, par les diviſions du ceintre oppoſé.

Par exemple, pour trouver la doële plate du premier vouſſoir, marquée dans la projection horiſontale par le trapeze $G\,p\,i\,p^1\,l^1$, & à l'élévation par le trapeze GIPL, ayant tiré la corde IP de l'arc poſtérieur IP, on abaiſſera du point L de la diviſion de l'arc antérieur ſur cette corde, la perpendiculaire LK. On tranſportera enſuite où l'on voudra la corde PI avec la diviſion K, comme en $l^d\,k\,p^2$, au-deſſus de la Fig. 288, & on élevera ſur le point *k* la perpendiculaire indéfinie $k^2\,l$; enſuite du point p^2 pour centre, & de l'intervalle *p l* pris au profil, de

l'autre côté on décrira un arc qui coupera la perpendiculaire *k*²*l* au point ²*l*, enſuite des points ²*l* & *l*⁴ pour centres, & de l'intervalle de la corde LG & du joint de lit *c*²*z*, on fera une interſection d'arcs qui ſe couperont au point ²G, duquel ayant tiré les lignes² G ²*l*, ²G *l*⁴, on aura le trapezoïde ²G²*l*, ²*p l*⁴, qui ſera la ſurface de la doële plate du premier vouſſoir, laquelle doit couvrir la portion concave du cone GLPI, & toucher ſes quatre angles. *Fig.* 284 & 289.

Pour avoir la ſeconde doële plate marquée au plan par *p*¹, S², R², *l*¹ & à l'élévation par le trapeze LRSP, on prolongera la corde SP vers *x*; & du point R on abaiſſera la perpendiculaire R *x*, enſuite ayant tranſporté à volonté la ligne S *x* avec ſa diviſion P, comme à la Figure précédente, on élevera ſur l'extrêmité *x* une perpendiculaire indéfinie *x*²*r*, à laquelle on adaptera la ligne du joint de lit *s r*, priſe au profil. Avec cette ligne priſe pour rayon, & du point ²*s* pour centre on décrira un arc qui coupera *x*²*r* au point ²*r*, duquel comme centre & de l'intervalle de la corde RL, on fera un arc de cercle ³*l y*; de même du point *p*² pour centre & de l'intervalle du joint de lit pris au profil en *p l*, on décrira un arc de cercle qui coupera le précédent ³*l y* au point ³*l*, par lequel ayant tiré les lignes ³*l*²*r*, ³*l p*², on aura le trapezoïde ³*l*²*r*²*s p*², qui ſera le panneau de doële plate, propre à couvrir la portion concave du cone que comprend le ſecond vouſſoir, ainſi des autres.

Il faut obſerver que pour avoir les longueurs des joints de lit de l'autre moitié de voute FE *9 g*, dont la projection horiſontale eſt Æ 10 *g p* X, il faut faire de nouveaux profils, parce que les lignes 23 33; 24 34, 10 *g p*, & *z y*, que nous ſuppoſons être les projections des joints de lit, ſont toutes inégales; & parce que leurs hauteurs ſeront toujours les mêmes que celles de l'autre moitié, ſi les lits correſpondans ſont de niveau, il ſuit qu'elles ſeront plus inclinées, & par conſéquent plus courtes que celles qui leur correſpondent dans l'autre moitié de la voute; ce qui eſt évident par la ſeule inſpection du plan horiſontal; puiſque la ligne *z y* approchant plus de la perpendiculaire CX, que *a h* de l'autre impoſte, elle ſera plus courte, & toutes les projections des lits entre les deux impoſtes, ſeront inégales, plus courtes vers *y*, & plus longues vers *a*; ce qui n'arriveroit pas à la Fig. 283 où elles ſont égales, à diſtances égales de l'axe du cone qui eſt droit.

Il faut remarquer que ſi les deux ceintres de faces oppoſées, n'étoient pas de même nature, que l'un fut circulaire & l'autre elliptique, ou l'un ſurbaiſſé & l'autre ſurhauſſé, on ne pourroit trouver une doële plate, dont les quatre angles touchaſſent les quatre coins du vouſſoir, qui ſeroit portion de ce cone irrégulier; mais parce que nous ne traitons ici que des Figures régulieres, cette exception n'empêche pas que le Problême ne ſoit général, parce qu'alors la doële plate, au lieu d'être plane quadrilatere, ſeroit compoſée de deux triangles qui ſeroient dans différens plans; nous donnerons au Livre ſuivant la maniere de remédier à ces irrégularités.

DEMONSTRATION.

Il eſt viſible par la conſtruction de ce Problême que nous réduiſons toutes les ſurfaces planes qui comprennent le ſolide appellé *vouſſoir*, en triangles, la plupart rectangles, dont nous trouvons un côté ſur les élévations projettées & raſſemblées ſur un même plan vertical par le moyen de la perpendiculaire que nous abaiſſons d'un des angles de cette ſurface ſur le côté oppoſé, prolongé s'il le faut. Nous avons trouvé l'hypotenuſe ſuivant les regles du profil par un autre triangle rectangle, dont la projection horiſontale nous donne un côté, la hauteur de l'extrêmité ſupérieure de la ligne inclinée donne l'autre; ayant les deux jambes d'un triangle rectangle on a facilement l'hypotenuſe qui exprime la deſcente; or la même eſt commune à un autre triangle rectangle dont nous ne connoiſſons qu'un côté par ce Problême; ſçavoir, la diſtance des points de diviſion des joints de tête correſpondant dans les faces antérieure & poſtérieure; mais parce qu'un côté & l'hypotenuſe ſuffiſent pour trouver le troiſieme côté, dont l'angle droit détermine la poſition & l'hypotenuſe la longueur, l'arc de cercle dont elle eſt le rayon eſt le *lieu* du ſommet de l'angle qu'il doit faire avec ſon hypotenuſe: enfin connoiſſant les côtés des deux triangles rectangles, & les diſtances de leurs hypotenuſes paralleles, nous avons formé le quadrilatere compris entre les hypotenuſes, qui eſt ordinairement pour les lits ou un parallelogramme ou un trapeze, & quelquefois un trapezoïde pour les doëles plates, où l'on a vû qu'une même hypotenuſe nous ſert à deux triangles, dont l'un eſt rectangle, & l'autre peut ne pas l'être; mais parce

que dans celui qui n'eſt pas rectangle nous connoiſſons tous les côtés, il eſt bien aiſé de le former.

On trouve donc les panneaux de lit par l'intervalle des hypotenuſes de deux triangles rectangles poſés ſur une même ligne de baſe, & les panneaux de doële par une ſuite de deux ou trois triangles, dont le premier eſt toujours rectangle par la conſtruction, de meme que le ſecond, lorſque la ſurface eſt diviſée en trois triangles, comme il peut arriver.

Si nous rappellons ici nos principes de projection, nous connoitrons que toutes les lignes qui ſont paralleles à l'objet projetté ſont dans leurs juſtes meſures; ainſi les cordes des arcs de face GL & IP, LR PS, qui ſont dans des plans paralleles, ne ſont ni diminuées ni augmentées, donc elles peuvent être priſes ſur l'élévation. D'où il ſuit qu'à chaque doële on a toujours deux côtés à prendre ſur l'élévation, qui ſont les cordes des arcs de têtes; & deux ſur le profil, qui ſont les joints de lit. Mais comme ces quatre côtés peuvent faire entr'eux des angles différens, parce que la diagonale du trapeze n'eſt pas connue, on abaiſſe une perpendiculaire LK ſur le côté IP, pour en déterminer la poſition à l'égard de ſon oppoſé LG, par le moyen des deux triangles rectangles LKP & LKI, leſquels déterminant la poſition des points L & I donnent la diagonale LI de la doële, troiſieme côté du triangle LGI, que l'on ne connoiſſoit pas auparavant; donc la *doële plate* eſt exactement trouvée; *ce qu'il falloit faire & démontrer.* *Fig. 285.*

A l'égard des panneaux *de tête* il eſt clair qu'ils ne ſont en rien altérés ni racourcis, ni ralongés ſur l'élévation.

Il ne reſteroit plus qu'à trouver les panneaux de l'*extrados*, ſi l'on en avoit beſoin pour avoir les ſix ſurfaces du vouſſoir, mais il n'eſt pas néceſſaire pour l'exécution de les réduire à des ſurfaces planes; parce que par le moyen du contour des têtes, qui ſont les arcs A *m*, H *q* donnés ſur l'élévation, & leurs côtés *m q*, AH auſſi donnés par les panneaux de lit, on peut former les extrados convexes du premier coup, ſans s'y diſpoſer par des ſurfaces planes, qui ne pourroient être que des tangentes au cone ou au cylindre, dont les angles ſeroient hors du vouſſoir, bien loin de les y déterminer.

Ce Problême peut ſuffire à trouver toutes les ſurfaces planes des polyedres & de leurs diviſions par le moyen de l'élévation des deux faces projettées ſur un même plan; il eſt encore une

maniere plus ſimple où l'on peut ſe paſſer de la double projection des faces antérieure & poſtérieure.

PROBLEME XI.

La projection horiſontale d'un polyedre & de ſes diviſions étant donnée avec l'élévation de ſes faces, trouver toutes les ſurfaces dont chacune de ſes parties eſt enveloppée.

Ou en termes de l'art,

Le plan & l'élévation des têtes étant donnés, trouver les panneaux de tête, de lit & de doële plate de toutes ſortes de voutes.

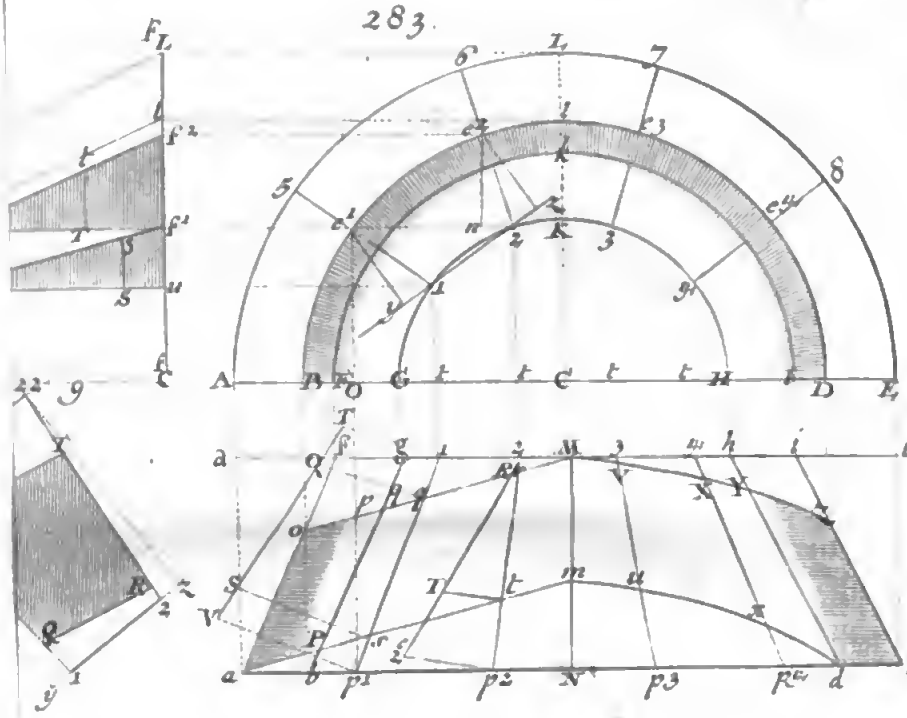
Pl. 25. Fig. 290. Nous ſuppoſons dans ce Problême comme dans le précédent, que toutes les voutes, quoique parties des corps ronds cylindriques, coniques ou ſphériques, ſont réduites par les doëles plates en polyedres, c'eſt-à-dire, les cylindres en priſmes, les cones en pyramides, & les ſpheres & ſphéroïdes en portions de pyramides tronquées. Cela ſuppoſé, tout l'art de ce Problême conſiſte à décompoſer la projection horiſontale en *réduiſant toutes les ſurfaces en triangles, & cherchant dans l'élévation des faces les hauteurs des lignes inclinées pour en trouver les véritables longueurs.*

Il n'eſt donc queſtion que de trouver les hypotenuſes des triangles rectangles, dont un des côtés eſt connu dans l'élévation, & l'autre à la projection horiſontale ou au profil des lignes projettées, ſoit qu'elles ſoient réelles ou ſimplement ſuppoſées pour ſervir de diagonales à des parallelogrammes ou à des trapezes ou trapezoïdes, dont on ne connoît pas les angles, ce qu'on entendra mieux par les exemples.

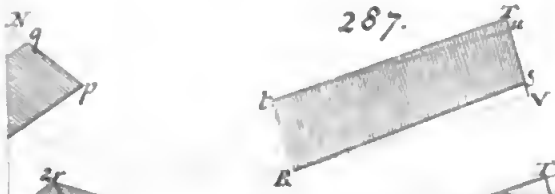
Premier exemple d'un berceau droit ou biais.

Fig. 290. Soit ABFG la projection horiſontale d'un berceau biais, dont A *h* B eſt le ceintre de face diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, & dont les projections des joints de lit ſont les lignes IK, ^{2}p P, ^{3}p P, LN. Pour trouver la premiere *doele plate*, dont la projection horiſontale eſt le parallelogramme AIKG, on le diviſera en deux triangles par une diagonale AK ou IG; il n'importe laquelle, on tranſportera enſuite une de ces diagonales

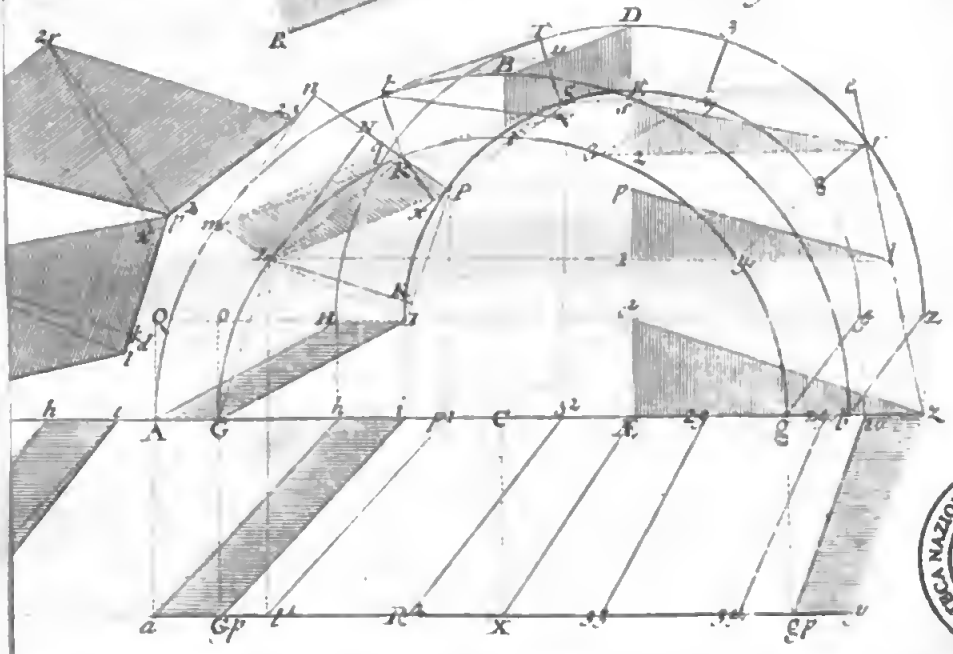
283.



287.



285



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

nales comme IG en Ig ſur BA prolongé, pour former un triangle rectangle 1 IG, l'hypotenuſe 1 g ſera la vraie longueur de la diagonale de la premiere doële, dont la projection horiſontale eſt GI. Si au lieu de cette diagonale on avoit pris l'autre AK, on auroit pû tranſporter la longueur AK en Ik, la ligne k 1 auroit été la longueur réelle de la diagonale de la doële plate, dont AK eſt la projection, ou bien, au lieu de tranſporter AK en Ik on peut tranſporter A 1 en A 1 1 à angle droit ſur AK, & tirer la ligne 11 K, qui ſera celle qu'on cherche; mais il y a moins de commodité en cette maniere, parce qu'il faut faire un angle droit 11 AK, au lieu qu'en la précédente on en trouve un tout fait 1 Ig, qui eſt celui de l'aplomb 1 I ſur la baſe AB, qu'on eſt obligé de faire pour avoir la projection du point 1 & du joint de lit IK. Pl. 14. Fig. 290.

Une des deux diagonales de la doële plate étant trouvée, on a la ſurface de cette doële, parce qu'on a tous les côtés de chacun des triangles par leſquels on l'a diviſé par les diagonales; car la córde A 1 eſt le côté qui eſt dans le plan de la face, lequel n'eſt point changé dans l'élévation, & les côtés GA ou KI de la projection ne ſont pas altérés dans leurs meſures, parce que le joint de lit de la voute eſt parallele à IK, & que GA eſt celui de l'impoſte; donc on a les trois côtés de chacun des triangles, qui ſont les moitiés de la doële. Ainſi faiſant à part la ligne $i^2 g^2$ égale à la ligne 1g, ſi des points i^2 & g^2 pour centre & pour rayon des longueurs A 1 & AG, on fait une interſection d'arc de cercle en a & en k de part & d'autre de la diagonale $i^2 g^2$; on aura ces points a & k, par leſquels tirant les lignes $a g^2$, $a 1^2$, $k g^2$, $k i^2$ on aura un parallelogramme qui ſera la ſurface de la doële plate dans toute ſon étendue, & en même-tems les angles que font ſes côtés. On peut ſe ſervir de la ligne K 11 pour rectifier l'opération, parce qu'elle doit être égale à la diagonale $a k$.

Si au lieu de la premiere doële on avoit voulu tracer la ſeconde, on auroit de même diviſé ſa projection KI 2 p I' par une diagonale IP ou ou K 2 p, dont on auroit trouvé la véritable longueur en portant à angle droit ſur une de ſes extrêmités la longueur d 2, qui eſt la différence des hauteurs des diviſions des joints de lit 1 & 2, & l'hypotenuſe K^2 d auroit donné la véritable longueur de la diagonale de la ſeconde doële, ſur laquelle on auroit formé de part & d'autre deux triangles avec la

Fig. 290. corde 1 2, & le joint de lit KI, comme à l'exemple précédent, ce qui eſt clair de ſoi-même. Ou pour s'épargner la peine de faire un angle droit, on auroit profité de celui de l'aplomb 2 *d* 1 ſur la ligne 1 *d*, en tranſportant la longueur de la diagonale 2 *p* K en *d z*, la diſtance de *z* à *z* auroit donné la même longueur *z z* que K 2 *d*. Ou encore, par une maniere plus abrégée, pour trouver tout d'un coup la différence de niveau des deux points 1 & 2, & profiter de l'angle droit que fait l'*aplomb* 2 2 *p* ſur le diametre AB, il n'y a qu'à prendre le plus petit aplomb 1 I, & le tranſporter ſur le plus grand en 2 V, & la longueur de la diagonale 2 *p* K en 2 *p y*, la ligne *y* V ſera celle que l'on cherche; car il eſt viſible que les triangles *y* 2 *p* V & *z d* 2 ſont égaux entr'eux, de même que les triangles *z d* 2 & 2 *p* 2 *d* K; puiſque les jambes qui comprennent l'angle droit ſont égales par la conſtruction.

Les panneaux de lit ſe feront auſſi facilement par la même méthode. Premierement celui de l'impoſte eſt tout fait dans la projection horiſontale, parce qu'il eſt de lui-même horiſontal, c'eſt le parallelogramme BDEF: les autres lui ſeroient égaux ſi le berceau étoit droit, mais parce qu'on le ſuppoſe biais, quoiqu'ils ſoient tous compoſés de côtés égaux, ils ſont inégaux par leurs angles: ceux qui approchent le plus de la clef ſont toujours moins obliquangles.

Soit propoſé à faire le panneau du premier lit marqué à l'élévation par le joint de tête 4 *q*, & au plan par le parallelogramme NLOR, que l'on diviſera en deux triangles par une diagonale ON, laquelle repréſente celle du lit, qui eſt une ſurface inclinée à l'horiſon; par conſéquent cette diagonale eſt plus longue que ſa projection ON. Il en faut trouver la meſure, comme nous avons fait pour la doële, en portant ſur le plus grand à plomb *q* O, qui a ſervi à faire la projection, le petit 4 L de *q* en Q 3, enſuite ayant tranſporté la longueur ON en O *n*, on en tirerera *n* Q qui ſera la longueur effective de la diagonale NO.

Préſentement ſi l'on porte cette longueur *n* Q en quelqu'endroit à part comme à la Fig. 291, en $n^1 o^1$, & qu'on forme de part & d'autre deux triangles avec les côtés 4 *q* & RO, on aura le parallelogramme $n^1 7 l o^1 r$, qui ſera la ſurface du premier lit, dont les angles ſont déja moins aigus que ceux de l'impoſte; ainſi des points n^1 & o^1 pour centres, & de l'intervalle NL pour rayon, on fera les arcs 7 *l*, *r* 8, & des mêmes

centres, & de l'intervalle 4 *q* on fera des arcs qui couperont les précédens aux points *l* & *r*, par lesquels tirant les lignes *n r*, *r o*, *n l*, *l o*, on aura le parallelogramme $n^1 7 l^1 r$, qui sera la surface du lit de dessus du premier rang de voussoirs, & celle du lit de dessous du second. On voit encore ici qu'au lieu de porter la longueur 4 L en *q* Q pour avoir la hauteur extérieure du joint de lit sur celui de la doële, on pouvoit faire 4 *o* perpendiculaire sur *q o* & sur *o* 4, prolongée en n^2, porter la longueur ON de la projection de O en *n*, on auroit eu l'hypotenuse $n^2 q$ égale à *n* Q. *Fig.* 210. & 211.

On voit aussi qu'au lieu de la diagonale ON on pouvoit tirer l'autre OR ; & porter LR de O en *r*, la ligne *r* Q auroit donné la véritable longueur de cette diagonale, dont on pouvoit se servir comme de l'autre ; il n'importe en quelque endroit qu'on fasse ces triangles rectangles, pourvû que leurs côtés soient des longueurs convenables, le plus ou le moins de facilité dans la construction décide des moyens. On a toujours un côté donné sur l'élévation, qui est le joint de tête 4 *q* ou 3 6, & l'autre à la projection NL ou OR.

Si les faces du berceau n'étoient pas paralleles entr'elles, comme si GY en étoit une, on pourroit toujours les supposer paralleles, & après avoir fait les panneaux on en retrancheroit les longueurs 9 N d'un côté, & 10 R de l'autre, suivant les regles de la circonscription, & le panneau seroit réduit au trapeze 9 LO 10, comme on a vû au premier exemple du Problême précédent ; ce qui peut s'appliquer à une face courbe en la renfermant dans un polygone par sa projection horisontale.

Second exemple d'un berceau en descente.

La différence qu'il y a de ce second exemple au premier, consiste en deux choses.

Premierement en ce que la projection horisontale ne fournit point de mesure des joints de lit de la voute comme au berceau de niveau, parce que ces joints étant inclinés à l'horison, sont racourcis dans la projection, où ils sont représentés par une ligne horisontale ; mais cette ligne fournit le moyen de trouver l'inclinée, en ce qu'elle est la base d'un triangle rectangle, dont l'autre jambe, qui est la hauteur de la descente, est donnée ; par conséquent il est aisé de former le triangle rectan-

gle, qui eſt le profil de la deſcente, & de trouver ſon hypotenuſe, qui eſt la ligne inclinée que l'on cherche.

Fig. 293. Ainſi (*Fig.* 293) puiſque B*a*, KL & autres projections des joints de lit ſont trop courtes, on élevera à une extrêmité *a* une perpendiculaire *a* a², que l'on fera égale à la hauteur de la deſcente qu'on ſuppoſe être ici la ligne *a* A, & du point B par a² ayant tiré B a², cette ligne ſera la véritable longueur de tous les joints de lit, qu'on ſuppoſe dans cet exemple paralleles & égaux.

Si les projections des joints de lit n'étoient pas paralleles, comme il arrive dans les voutes coniques, dont nous avons donné des exemples au Problême précédent, il eſt viſible qu'il faudroit faire un profil pour chacun, parce qu'ils ſont tous inégaux, ſi le cone eſt ſcalene.

La ſeconde différence de cet exemple d'une voute en berceau biaiſe & en deſcente, eſt que les longueurs des diagonales ſont un peu plus difficiles à trouver, en ce que leur hauteur n'eſt pas égale, de ſorte qu'on ne peut tirer ces hypotenuſes de même ſommet ſur une même baſe, comme à l'exemple précédent d'un berceau de niveau; mais de deux ſommets différens, & pour la commodité de l'exécution, ſur deux différentes lignes de baſe.

Pour concevoir la raiſon de cettte différence, il faut faire attention que la ſurface de la doële d'un berceau horiſontal, étant diviſée en deux triangles par deux diagonales; chacune d'elles
Fig. 292. va de bas en haut, comme (*Fig.* 292) de *n* en *b*, & de *r* en *l* à hauteur égale *l b*, *n r*; mais que ſi cette ſurface eſt inclinée ſuivant ſes joints de lit, comme à la Fig. 296, la doële I *q* BA, on verra que les deux diagonales BI, A *q* ne ſont plus également inclinées à l'horiſon, celle qui part du point I le plus élévé deſcend plus qu'elle ne faiſoit de toute la quantité de la hauteur de la deſcente AB, & l'autre qui part du point A peut monter ou deſcendre ſuivant la différence qu'il y a entre la hauteur verticale ID de la ſurface, & la hauteur de la deſcente AD, ou être de niveau comme A *q*.

Si l'*aplomb* de la retombée marquée à la Fig. 293, par la ligne 2 D, eſt plus grand que la hauteur A *a* de la deſcente du berceau, la diagonale LQ (*Fig.* 293) ou AL (*Fig.* 294) au lieu de deſcendre du point A monte encore en L de la quantité *d* L; donc l'*aplomb* A 2 ou ſon égal *b* L excéde la deſcente A *a*;

mais ſi la deſcente A *e* étoit plus grande que l'aplomb de retombée 2 A, ou ſon égal F *g* la diagonale LQ ou A *g*, deſcendroit du point A de la différence *g* D de l'aplomb de la retombée 2 A & de la deſcente A *e*. *Fig.* 293. & 294.

Pour prendre une idée nette de ces différences, nommons la hauteur A *a* ou A *e* de la deſcente *a*, celle de la retombée 2 A, *b*, leur différence, *d*; il eſt clair que la diagonale qui partant du ſommet 2 vient au bas de la deſcente, a toujours pour unique hauteur $a + b$, ce qui eſt invariable; mais celle de l'autre diagonale qui part du point A ſera variable ſuivant le rapport d'*a* à *b*, à ſon extrêmité oppoſée au point A; car lorſque *a* ſera plus grand que *b* elle ſera deſcendante, parce que la hauteur totale $a + b = 2b + d$ eſt diminuée de $b + d = a$, qui eſt par la ſuppoſition plus grand que *b*, c'eſt-à-dire $a - d$; mais ſi *a* eſt plus petit que *b*, cette diagonale ſera aſcendante, parce que la hauteur totale $a + b$, qui eſt alors égale à $2a + d$ ne ſera diminuée que de la hauteur *a* qui eſt moindre que *b* par la ſeconde ſuppoſition; il reſtera donc $a + d$ plus grand que *a*, cela ſuppoſé.

Soit (*Fig.* 293) le plan horiſontal B *a* IE du berceau en deſcente, avec la projection de ſes joints de lit faite à l'ordinaire par les à plomb abaiſſés des diviſions de ſon ceintre 1, 2, 3, 4. Soit la hauteur de la deſcente l'intervalle A *a* pour former le panneau de doële, par exemple du ſecond vouſſoir 1 2, dont la projection horiſontale eſt le parallelogramme KL 2*p* Q, on le diviſera en deux triangles par une diagonale LQ ou 2 *p* K il n'importe, une ſuffit; nous n'en mettons ici deux que pour faire voir qu'il n'eſt pas indifférent de prendre l'une ou l'autre pour en trouver la juſte longueur. *Fig.* 293.

On commencera par chercher la valeur de la projection du joint de lit KL égale à B *a* qui eſt trop courte, & qu'on trouvera en faiſant la ligne *a* a² perpendiculaire ſur *a* B & égale à la hauteur A *a*, la ligne B a² ſera déja un côté d'un des triangles que forment les diagonales LQ ou K 2*p*; enſuite on cherchera la valeur de l'autre côté L 2 *p* ou ſon égal KQ, qui eſt auſſi trop court, parce qu'il repréſente la corde 1 2 qui eſt inclinée à l'horiſon, & comme cette corde eſt dans ſa juſte meſure à l'élévation, elle ſera le ſecond côté de chacun de ces triangles. Il ne reſte plus qu'à trouver le troiſieme qui eſt la valeur d'une diagonale, laquelle n'eſt point inclinée ſuivant la

Fig. 193. pente a ² B, comme nous l'avons fait voir, mais l'une plus & l'autre moins; celle qui vient du point 2 plus haut que le point 1, eſt plus inclinée que la ligne B a ², & ſa hauteur eſt, comme nous l'avons dit, la ſomme de l'aplomb 2 D & de la deſcente ² *t* ² *p* = A *a*; il faut donc porter la hauteur 2 D en I ² *t* pour avoir cette ſomme I ² *p*, & la longueur de la diagonale ² *p* K, en ² *p k* & tirer la ligne 1 *k* qui ſera ſa juſte meſure.

Mais ſi l'on veut avoir la valeur de la diagonale LQ, qui a pour origine le point 1 projetté en L, lequel eſt plus bas que le point 2, il faudra porter la longueur 2 D de ² *p* en N, pour avoir la différence N ² *t* de l'*aplomb* 2 D & de la deſcente ² *t* ² *p*, & porter la longueur de la diagonale LQ de ² *t* en O, la ligne NO, hypotenuſe de ce triangle rectangle, ſera la valeur de la ligne LQ.

Pour s'épargner la peine de faire une ligne 1 D perpendiculaire ſur 2 D, qui donne la différence 2 D des hauteurs des points 1 & 2, il n'y a qu'à prendre avec le compas la hauteur 1 L & la porter en 2 N ſur l'aplomb le plus long, on aura tout d'un coup la différence N ² *p* = 2 D; parce que l'angle L ² *p* 2 eſt droit, 1, 2 = LN, côté du même parallelogramme, & 1 D = L ² *p*, donc N ² *p* = 2 D.

Par la même conſtruction on trouvera le panneau de lit marqué à l'élévation par le joint de tête 3 ² 3, & au plan horiſontal par le parallelogramme *s* R S *r*, dans lequel on tirera les diagonales R *r*, ou S *s*, une des deux ſuffit pour le diviſer en deux triangles, & on aura leur valeur par la même méthode qu'on a employé pour trouver celle de la doële. On examinera quelle eſt celle qui vient du point le plus élevé 2 3, qui a donné le point S pour ſa projection, d'où l'on conclurra que la diagonale S *s* eſt la plus grande, qui doit avoir pour hauteur la ſomme de l'*aplomb* 2 3 *d*, & de la hauteur OS de la deſcente, c'eſt pourquoi l'on portera 3 *d* en O *u*, la ligne S *u* ſera la hauteur de la diagonale S *s*; ainſi en portant S *s* en SV la ligne *u* V ſera ſa juſte meſure; pour la diagonale R *r*, il n'y a qu'à porter la hauteur 2 3 *d* en RT pour avoir ſa différence *y* T avec celle de la deſcente OS, laquelle différence eſt ici preſqu'inſenſible, de ſorte que la ligne R *r* eſt égale à la grandeur de projection, c'eſt-à-dire, que cette diagonale eſt horiſontale dans le panneau de lit, par conſéquent égale à la projection R *r*.

On peut ici, comme à l'article précédent, trouver la diffé-

sence 2 3 *d* tout d'un coup, en portant la plus petite hauteur d'aplomb 3 R en 2 3 O.

Les longueurs des diagonales, tant de la doële que du lit étant trouvées, on les tranſportera en quelqu'endroit à volonté, comme en K t^2 (*Fig.* 295) & des points K & t^2, comme centres & pour rayons les intervalles 1 2 & B a^2, de la Figure 293, on fera des interſections d'arcs de part & d'autre de la diagonale K t^2, qui donneront les points t^1 & *q*, par leſquels tirant les lignes K t^1, $t^2 t^1$, $q t^2$, *q* C on aura un parallelogramme égal à la ſurface de la doële plate. *Fig.* 295. *à gauche.*

De la même maniere ayant tranſporté la longueur V *u* en *s* SO (*Fig.* 295 *à droite*) on prendra la longueur du joint de tête 3 2 3, & du joint de lit B a^2 & de ces intervalles pour rayons & des points *s* SO pour centres, on fera des interſections d'arcs en RT & *r* 3, qui donneront les points RT & *r* 3, par leſquels tirant les lignes *r* 3 SO, $r^3 s^3$, RTSO, RT s^3 on aura un parallelogramme qui ſera égal à celui de la ſurface du panneau de lit. *Fig.* 295. *à droite.*

Troiſieme exemple d'une voute en canoniere en deſcente, qui eſt une conique ſcalene tronquée.

La différence de cet exemple au précédent conſiſte 1°. en ce que les projections des joints de lit étant toutes inégales, & plus courtes que les joints qui ſont inclinés à l'horiſon, il faut trouver la valeur de chacune en particulier par un profil ſemblable à celui de l'impoſte D *a* a^2, en élevant une perpendiculaire à une de leurs extrêmités égale à la hauteur de la deſcente *a* a^2, au lieu que dans l'exemple précédent un ſeul ſuffiſoit pour tous. *Fig.* 297.

Secondement, en ce que les hauteurs des diagonales ſe trouvent encore différemment, quoique toujours ſuivant le même principe.

Soit donc (*Fig.* 297) le plan horiſontal d'une deſcente en canoniere D *ab* E, avec les projections de tous ces joints de lit O *l*, P *n*, &c. ſoit A *a* la hauteur de la deſcente, A *h* B le ceintre de face de la partie poſtérieure ébraſée; DSE celui de la face antérieure, l'un & l'autre diviſé en nombre égal de vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, deſquels on a abaiſſé les aplomb 1 L, 2 N, & 1 O, 2 P, leſquels ont donné les projections des joints de lit *l* O, *n* P ſuivant l'uſage ordinaire, & les trapezes

Fig. 297. D *a l* O, & O *l n* P pour projection des doëles. On les diviſera en triangles par des diagonales *n* O *l* P (une ſeule ſuffit) & l'on en trouvera la valeur, à peu près comme dans l'exemple précédent, ayant égard à leur origine & à leur côté oppoſé pour trouver par le moyen de leur hauteur au-deſſus du plan horiſontal leur inclinaiſon & leur longueur. Ainſi pour avoir la véritable longueur de la diagonale *n* O, qui répond par le point *n* à la plus grande hauteur de l'aplomb 2 *n*, & par le point O, à la plus petite hauteur de l'aplomb 10 de la face antérieure, on ôtera la plus petite de la plus grande, & leur différence ſera la hauteur d'une des extrêmités de cette diagonale au point *n*. Or il n'importe de prendre cette différence en haut ou en bas; ſi on la prend en bas en portant O 1 de *n* en 10, il faudra tirer une horiſontale par ce point 10; mais ſi l'on porte O 1 ſur le haut du point 2 au point I, la ligne *a b* ſervira d'horiſontale toute tracée; de ſorte que ſi l'on porte la longueut de la diagonale *n* O de *n* en K,,& qu'on tire la ligne KI, cette ligne ſera la valeur de la plus grande diagonale repréſentée au profil par la ligne 23 01, qui eſt trop courte par les raiſons que nous avons donné en parlant des profils des cones, Chap. IV.

Cette ligne KI peut ſuffire pour trouver le panneau de la doële, dont la projection eſt O *l n* P; on la tranſportera où l'on
Fig. 298. voudra comme à la Figure 298, en 2 *n* 2°; puis du point 2 *n* pour centre & de l'intervalle de la corde 1, 2 de la Figure 297 pour rayon, on fera un arc de cercle L 5, & du point 2° & pour rayon l^2 O, valeur du joint de lit, dont la projection eſt *l* O, que l'on aura trouvé en faiſant $l l^2$ égale à *l* L, & perpendiculaire à O 1; on aura le triangle 2° 1 L 2 *n* qui ſera la valeur de celui de la doële O *l n*. On trouvera de la même maniere la valeur de l'autre triangle OP *n*, en faiſant du centre 2° & de l'intervalle de la corde 1 2 du ceintre DSE l'arc 6 *p*, & du point 2 *n* pour centre & pour rayon la valeur de P *n* que l'on n'a pas mis dans cette Figure, on décrira un autre arc qui coupe le précédent en ^2p, le triangle 2° *p* 2 *n* ſera la valeur de celui de la projection OP *n*.

Si au lieu de prendre la diagonale *n* O on avoit voulu prendre l'autre *l* P, on auroit pris la hauteur de l'*aplomb* 2 P du ceintre de face antérieure, & on l'auroit porté ſur l'aplomb 1 L de l'autre ceintre A *h* B qui a donné la projection du point de l'extrêmité oppoſée de cette diagonale, & on auroit eu le point *i*;

enſuite

enſuite portant la longueur *l*P de *l* en *k*, la ligne *i k* auroit donné ſa valeur ou meſure, exprimée au profil par la ligne 14 p^2 qui étoit trop courte, parce que c'eſt un profil de cone. Si l'on porte cette longueur 2 P de bas en haut, de *l* en 2*p*, on aura la hauteur de l'horiſontale 2 P p^2 terminée au point p^2 du profil. *Fig. 297 & 289.*

Il faut remarquer que les longueurs des diagonales trouvées ſont plus grandes que celles du profil 14 p^2, & 23 01, parce que n'étant pas paralleles au plan vertical de ce profil, elles y ſont racourcies par la projection verticale ; de ſorte qu'un tel profil eſt inutile pour les meſures ; on ne l'a fait que pour indiquer le rapport des lignes cherchées, & pour en faire voir l'inclinaiſon & la poſition, afin qu'on conçoive plus facilement les raiſons de la conſtruction.

Il n'eſt pas néceſſaire d'expliquer la maniere de faire le panneau de lit, on s'y prendra de la même façon que pour la doële, en diviſant ſa projection QR*t s* en diagonales, dont on trouvera les longueurs réelles par le moyen de leur hauteur ſur l'horiſon à l'extrêmité élevée, laquelle hauteur ſera la différence de celle des retombées, par exemple du joint de tête 3 6, qui eſt V*t*, ſi l'on porte de *t* en *q* la longueur de la projection de la diagonale *t* Q, on aura pour ſa valeur la ligne V *q*, de même que *ur* eſt celle de la ligne *s* R de la projection. Ces diagonales tranſportées à part, comme à la Fig. 299, avec les joints de tête 3 6, & la valeur des joints de lit *s* Q *t* R, donneront un parallelogramme *t* 6, R 6, Q 3, *s* 3, qui ſera le lit du joint 3 6, de la même maniere qu'on a trouvé celui de la doële dans l'exemple précédent de la Fig. 293 ; avec cette ſeule différence qu'il faut faire un profil pour chaque projection de joint de lit Q *s* R *t*, parce que ces lignes étant la projection de lignes inégales, une ſeule hypotenuſe ne peut ſervir pour tous les joints de lit, comme dans la Fig. 293, ce que nous avons déja fait remarquer, mais que nous n'avons pas fait à la Fig. 297, pour éviter la multiplicité des lignes.

Quatrieme exemple d'une voute ſphérique réduite en polyedres par des doëles plates.

Nous avons fait voir, en parlant des développemens, que la ſphere pouvoit être réduite en portions de cones tronqués, & ces cones en pyramides tronquées, de ſorte qu'on pourroit

renvoyer le Lecteur à l'exemple précédent ; puiſque ſi l'on ſup-
Fig. 300. poſe le demi-cercle B *h* E (*Fig.* 300) diviſé en cinq parties aux points 1, 2, 3, 4, & qu'ayant tiré les cordes B 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 E l'on faſſe mouvoir ce demi-cercle autour de ſon rayon C *h*, les cordes B 1, 1 2 produiront par leur révolution deux cones tronqués, dont la ſection par par l'axe du premier eſt le trapeze B 1 4 E, & le trapeze 1 4 3 2 celle du ſecond ; & ſi ces trois cones tronqués inſcrits dans la ſphere ſont réduits en pyramides tronquées, nous retombons dans le cas de l'exemple précedent, avec cette différence que celui-ci eſt plus facile & plus ſimple, parce que ces pyramides ſont droites ſur leurs baſes, & que nous en ſuppoſons les axes en ſituation verticale ; au lieu qu'au précédent nous avons ſuppoſé l'axe incliné à l'horiſon.

Soit cependant pour une plus ample explication de la Fig. 300, le demi-cercle ACFS la projection d'une hemiſphere, ou plutôt d'un quart de ſphere, dont les cercles concentriques BME, GNL & IOK ſont les projections des joints de lit de la doële réduite en portions de cones tronqués, dans leſquels on inſcrira un poligone d'un nombre de côtés égal à celui de la quantité des vouſſoirs que l'on doit mettre à chaque rang, en faiſant ces vouſſoirs égaux ou inégaux, il n'importe ; la régularité de ce polygone n'eſt pas néceſſaire, parce qu'il doit enfin être réduit au cercle pour derniere opération.

Fig. 300. Soit, par exemple, BGNM la projection d'une doële d'un vouſſoir du premier rang, l'ayant diviſé par la diagonale GM en deux triangles, on cherchera la véritable longueur de cette diagonale, qui eſt plus courte que la ligne inclinée qu'elle repréſente. On portera, comme dans les exemples précédens, la longueur GM en G *m* ſur l'horiſontale AF au pied de la hauteur de l'aplomb 1 G, la ligne *m* 1 ſera la longueur réelle, dont MG eſt la repréſentation. On peut donc former un trapeze *b g n m* (*Fig.* 302) qui ſera égal à celui de la doële plate, dont la projection eſt BGNM (*Fig.* 302) parce qu'on a tous les côtés des deux triangles inégaux dans leſquels il a été diviſé par la diagonale GM ; car les côtés égaux BG & MN ſont donnés par la corde B 1 de l'élévation qu'ils repréſentent, & les cordes BM & GN ſont données dans la projection de leur longueur naturelle, parce que ces cordes ſont celles des cercles des joints de lit qu'on ſuppoſe horiſontaux, par conſéquent paralleles & égaux à ceux du plan horiſontal de la projection, où ils ſont raſſemblés.

Ayant porté la longueur de la ligne *m* 1, de la Fig. 300, en quelqu'endroit à part comme en *g m* (*Fig.* 302), du point *g* pour centre & de l'intervalle de la corde GN de la Figure 300, on fera un arc de cercle vers *n*, & du point *m* pour centre & de l'intervalle de la corde B 1 de l'élévation pour rayon, on fera un autre arc de cercle *n* I, qui coupera le précédent au point *n*, par lequel tirant les lignes *n g*, *n m* on aura le plus petit des deux triangles *g n m* de la diviſion du trapeze par la diagonale MG. La même corde B 1 ſera le rayon d'un arc *b* 5 fait du centre *g*, & la corde MB de la Fig. 300, ſera le rayon d'un autre arc fait du point *m* pour centre, lequel arc coupera le précédent *b* 5 au point *b*, qui ſera le ſommet du ſecond & plus grand triangle *m b g*. Fig. 300 & 302.

On trouvera de même la ſurface de la doële d'un vouſſoir du ſecond rang, dont la projection horiſontale eſt le trapeze GION, en portant IN en I *n* ſur l'horiſontale AF, & la hauteur de la retombée 2 D en *i* I, la ligne *i n* ſera la longueur réelle, dont la diagonale IN eſt la projection; de ſorte que le trapeze GION deviendra plus allongé, comme on le voit à la Fig. 302 en *g* IO *n*.

Par la même méthode on trouvera les ſurfaces des lits que l'on pourroit auſſi réduire à des trapezes rectilignes, ſi l'on vouloit tirer une tangente P *t* ſur le milieu *t* de l'arc Q *q*, qui eſt la projection du joint de lit de l'extrados d'un vouſſoir, dont la projection ſeroit la portion de couronne de cercle L Q *q r*; mais cette circonſcription eſt inutile pour l'exécution; il ſuffit que le panneau de lit ſoit rectiligne de trois côtés QL, L *r*, *r q*; quoique ſon quatrieme côté *q t* Q ſoit une portion de cercle, il ne fait aucune difficulté pour l'uſage de la coupe des pierres.

Ayant fait la projection du lit dont la ligne 4 14 de l'élévation repréſente exactement la largeur & l'inclinaiſon, on prendra avec le compas la longueur de l'aplomb 4 L qu'on portera ſur le plus grand 14 Q en 14 *u*, & l'on portera la longueur Q *r* de la diagonale qu'on aura tiré dans la projection de Q en V, la ligne V *u* ſera ſa juſte longueur, laquelle étant miſe à part (*Fig.* 301) ſervira de baſe pour former les deux triangles du trapeze qui exprime la ſurface du lit, dont tous les côtés ſont donnés. Les côtés Q *l* & *r q* ſont égaux au joint de tête 4 14, le côté *l r* égal au côté L *r* de la projection horiſontale, & le côté Fig. 301.

Qq égal auſſi à celui de la projection, ſoit qu'on le prenne par la corde de ſon arc, pour lui circonſcrire l'arc, ſoit qu'on le prenne par ſa tangete, ſoit qu'on le prenne par l'arc même, qu'il eſt aiſé de tracer du premier coup, en prenant ſur le côté Ql prolongé la longueur du rayon FC, & alors au lieu d'un trapeze rectiligne on aura un trapezoïde mixte lrqQ.

DEMONSTRATION.

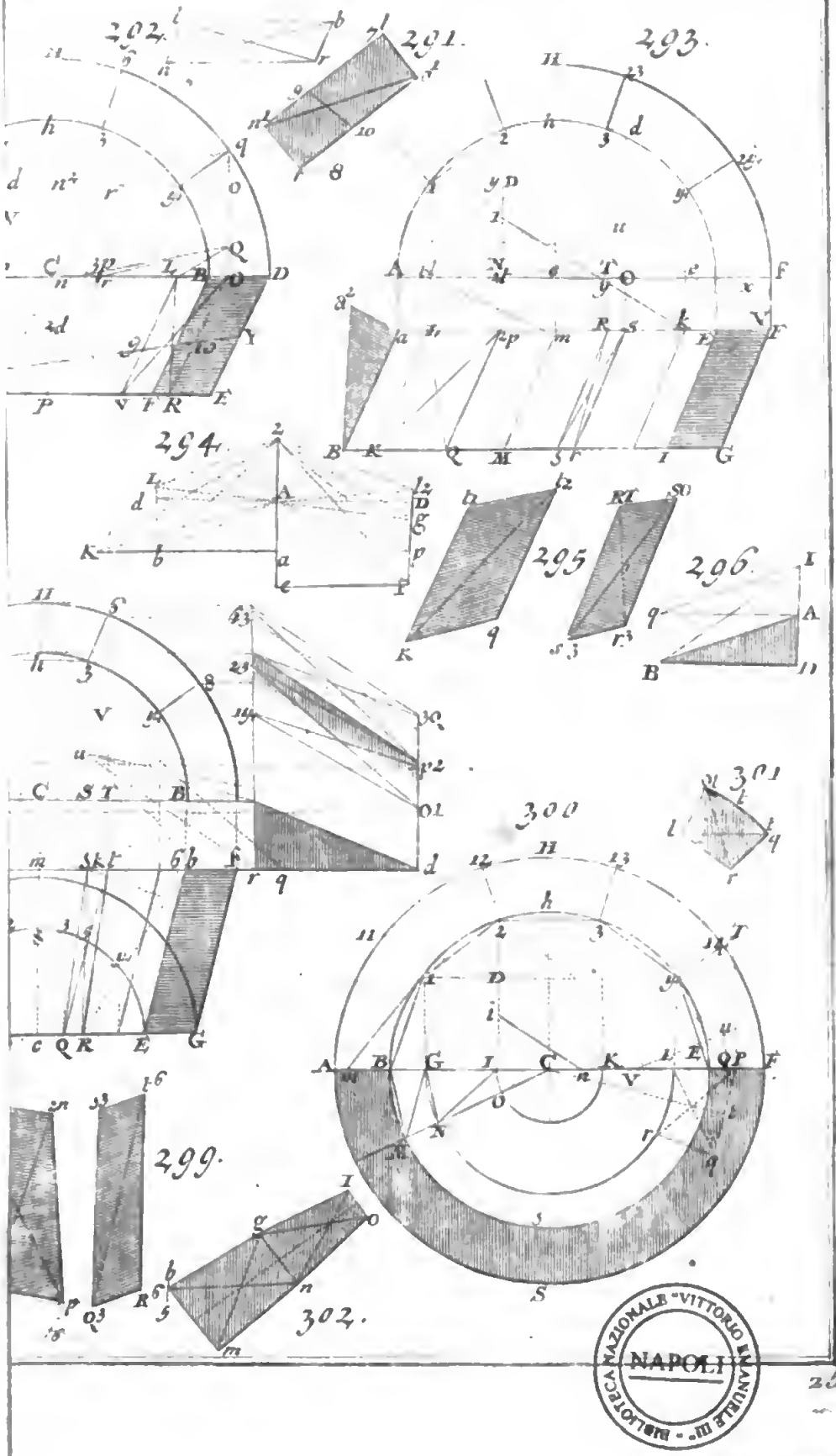
La conſtruction de ce Problême & les explications que nous y avons mêlé, portent leur démonſtration.

Premierement il eſt clair que toutes ſortes de figures rectilignes peuvent être réduites en triangles, & que les curvilignes peuvent être réduites en rectilignes par l'inſcription ou la circonſcription, par le moyen de quoi on peut, du moins par approximation, connoître leur excès ou leur défaut; mais toujours aſſez exactement pour la pratique.

Secondement il n'eſt pas moins clair qu'en trouvant la hauteur des lignes inclinées ſur un plan horiſontal, ſur lequel la projection les a racourcies, on ne fait que décompoſer cette projection; en ſorte que l'on remet les côtés & les angles du ſolide dans la ſituation où ils étoient avant qu'ils fuſſent projettés, & il eſt clair qu'on en trouve par ce moyen les juſtes longueurs. Or ayant les trois côtés d'un triangle, il eſt eſt évident qu'on a les angles de trapeze ou de telle autre ſurface que l'on voudra, dont il eſt partie; car un de ſes angles devient un de ceux de la figure quadriligne ou polygone qu'il compoſe ou par ſa repétition, comme il arrive dans les parallelogrammes, ou par ſa jonction avec celui d'un autre triangle mis de ſuite, car le tout eſt égal à ſes parties, donc cette méthode eſt applicable à toutes ſortes de ſurfaces planes; mais comme les courbes peuvent encore être inſcrites dans des polyedres, comme nous l'avons dit de la ſphere, il ſuit que cette méthode eſt univerſelle, & que l'ayant bien compriſe, on peut l'appliquer & trouver par ſon moyen toutes les ſurfaces dont les ſolides ſont enveloppés, ce qui étoit propoſé au Problême.

Remarque ſur l'uſage.

Non-ſeulement ce Problême peut ſervir à trouver les panneaux des lits & des doëles planes, mais encore ceux des lits & des doëles ou têtes gauches, en inſcrivant leur projection dans



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

des triangles, comme aux vis St. Gilles & aux arrieres-voussures; car on peut toujours faire passer une surface plane par trois points. Cependant comme la division des doëles donne des figures quadrilignes qu'il faudroit diviser en deux par des diagonales, pour les réduire en triangles; il arriveroit qu'il faudroit encore trouver l'inclinaison que les plans de ces deux triangles feroient entr'eux, supposant que le quadriligne soit gauche, ce qui obligeroit à une seconde opération, qu'on peut s'épargner par des méthodes plus commodes & plus abrégées, que nous donnerons au quatrieme Livre, lorsqu'il s'agira des traits des voutes qui ont des lits ou des paremens de doële ou de tête gauches. Il suffit d'avoir établi une méthode générale & fondamentale. Il ne reste plus qu'à trouver les angles des plans qui terminent & enferment les solides.

CHAPITRE V.

De la Goniographie, ou description des angles.

En termes de l'Art,

Des moyens de trouver les biveaux.

IL semble que lorsqu'on a la figure & la juste grandeur des surfaces qui comprennent un solide, il est inutile de chercher les angles qu'elles font entr'elles; puisque leur assemblage dans l'ordre où elles doivent être, forme un solide d'une figure déterminée, dont les angles ne peuvent varier sans le changement de quelques-unes de ses surfaces; mais il faut considérer ici que notre objet n'est pas de rassembler des surfaces pour en composer un solide; mais de diviser un solide en parties qui ayent leurs surfaces égales à celles qu'on a trouvé par les regles & les Problêmes précédens, en retranchant d'une plus grosse masse tout l'excès dont elle surpasse celui qu'on se propose de faire; & parce qu'il faut abattre, tailler & creuser successivement une surface par le moyen de sa contigue, qui doit en déterminer la position; il suit qu'on ne peut leur donner l'inclinaison qu'elles doivent avoir entr'elles, sans connoître les an-

gles de leurs plans pour approfondir plus ou moins la place du modele qu'on doit y appliquer, lequel regle les angles de leurs côtés, & pour trouver par leur ſituation celle d'une troiſieme, quatrieme & cinquieme ſurface, dont elles ſont les termes.

La ſeconde raiſon qui nous oblige à la recherche des angles des plans, c'eſt qu'on ne fait pas des panneaux pour toutes les ſurfaces qui comprennent un vouſſoir. On fait rarement ceux des extrados, & s'il s'agiſſoit d'opérer par la ſynteſe, on ne pourroit ſe diſpenſer de les faire, lorſqu'ils ſont compoſés de pluſieurs ſurfaces, comme il arrive aux enfourchemens.

Nous ne croyons pas qu'il ſoit néceſſaire d'expliquer ici ce que nous entendons par les angles des plans; la ſixieme définition du onzieme Livre D'EUC. nous enſeigne, que l'angle de rencontre de deux plans qui ſe coupent eſt meſuré par celui que font deux lignes droites, perpendiculaires à leur commune ſection, menées au même point; la raiſon nous fait ſentir que c'eſt le moyen le plus ſimple de connoître leur inclinaiſon mutuelle; cependant comme cette regle eſt le fondement de l'uſage qu'on doit faire de ces inſtrumens propres à copier & tranſporter les angles qu'on appelle beuveaux, ou ſelon moi, *biveaux*, du Latin *bivium*, un chemin fourchu, il ne ſera pas inutile d'en faire une propoſition générale, applicable aux ſurfaces courbes des corps réguliers, auſſi-bien qu'aux droites.

Il faut remarquer qu'on ne doit pas confondre les *angles des plans* avec *les angles plans*; car quoique les angles d'inclinaiſon des plans ſoient dans des plans qui leur ſoient perpendiculaires, nous entendons par le mot *d'angle plan*, celui des côtés d'une ſurface plane, & par *angle des plans*, celui de deux ſurfaces.

LEMME.

L'angle d'inclinaiſon de deux ſurfaces quelconques, planes ou courbes, meſuré par des lignes obliques à leur commune ſection, eſt plus aigu que celui qui eſt meſuré par des perpendiculaires à cette commune ſection, menées à un même point.

Pl. 26. Fig. 303. Soient deux ſurfaces planes ABCD, BFED, qui ſont inclinées entr'elles, dont la commune ſection eſt la ligne droite BD; ſi d'un point *h* pris ſur cette ligne on lui tire deux perpendiculaires; ſçavoir, *g h* dans un plan, & *i h* dans l'autre, & que

d'un autre point *k* pris ſur la même ligne, on tire aux points *g* & *i* les lignes *kgki*; je dis que l'angle *ghi* eſt plus grand que l'angle *gki*.

DÉMONSTRATION.

A cauſe des angles droits en *h*, les lignes *ik* & *kg*, qui ſont les hypotenuſes des triangles rectangles *ihk* & *ghk* ſont plus grandes que les côtés *gh* & *hi*; donc ſi l'on applique ſur un même plan les deux angles *gki* & *ghi*, qui ſont ici dans différens plans, le ſommet *h* tombera au-deſſous du ſommet K; & ſi l'on tire une ligne *gi* pour baſe commune de ces deux triangles *ghi*, *gki*; on reconnoîtra (par la 21 prop. du premier Livre d'EUCL.) que l'angle *gki* eſt plus aigu que l'angle *ghi*; *ce qu'il falloit démontrer* premierement pour les ſections des ſurfaces planes. *Fig.* 303.

Secondement ſi les ſurfaces ſont, l'une plane l'autre courbe, ou toutes deux courbes des courbures régulieres des ſpheres, cones & cylindres; il ſera encore vrai que les lignes courbes qui ſeront dans des plans perpendiculaires à la commune ſection, c'eſt-à-dire à une tangente de la courbe formée par cette ſection, ſeront plus courbes que celles qui s'éloignent de ce point d'attouchement.

Soit pour exemple une portion de zone de ſphere K*b*GH*d*L, qui eſt coupée par un plan IFGK, telle qu'eſt la rencontre d'une doële avec ſon lit. Il eſt clair que ſi par le point *b* de la commune ſection des ſurfaces courbe & plane, on mene la tangente *b*T, & qu'on lui mene les perpendiculaires *b*a & *bd*, dont l'une *b*a ſoit dans le plan du lit, & dont l'autre *bd* ſoit la corde de l'arc *bmd*, portion de la ſphere, le plan qui paſſera par *bmd*, paſſera par le centre de la ſphere; & ſi l'on prend un autre point comme E dans la ſection du lit & de la doële, & que l'on tire E*d*, le plan qui paſſera par E*d* ne paſſera pas par le centre de la ſphere. Or dans le cercle de toutes les lignes qui ſont tirées d'un point hors du centre à la circonférence la plus courte eſt celle qui étant prolongée paſſe par le centre, de même dans la ſphere, l'arc le plus court entre deux cercles paralleles, eſt celui du cercle majeur, dont le plan paſſe par le centre de la ſphere & les poles de ces cercles, c'eſt-à-dire, qui coupe à angle droit leurs plans. *Fig.* 304.

Fig. 304. Pour concevoir cette vérité, ſoit prolongée la ligne droite a *b* en C, puiſqu'elle eſt perpendiculaire à la tangente *b* T, elle paſſera par le centre C de la ſection circulaire K *b* G; & ſi du point *d*, que je ſuppoſe à la ſurface de la ſphere, on tire ſur la ligne a *b* C, la perpendiculaire *d* D égale à la hauteur du point *d* ſur le plan FGKI de la ſection plane de la ſphere, & du point D une ligne au point E, il eſt clair (par la 15 du IIIe. Liv. d'Euc.) que la ligne D *b* qui paſſe par le centre C ſera plus courte que DE qui eſt dans le même plan, & ne paſſe pas par le centre. Il ſe formera donc deux triangles rectangles perpendiculaires au plan de la ſection; ſçavoir, *b d* D, E *d* D, qui ont pour côté commun *d* D; & puiſque le côté ED eſt plus grand que *d b*, l'hypotenuſe *d* E ſera auſſi plus grande que *d b*; donc l'angle a *b d* ſera plus grand que a ED (par l'Article précédent). Or l'arc *b m d* étant dans un plan perpendiculaire au plan FGKI, ſection de la ſphere, & paſſant par ſon centre, paſſera auſſi par le pole, & ſera portion d'un cercle majeur, laquelle ſera plus petite que celle du cercle mineur E *n d*, comme nous le démontrerons au quatrieme Livre; donc l'angle mixte a *b m d* eſt plus grand que l'angle mixte a E *n d*; *ce qu'il fallois démontrer.*

Cete démonſtration pourra s'appliquer aux autres ſections coniques, où il eſt démontré *de maximis & minimis*, que la perpendiculaire au point d'attouchement d'une tangente eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un point donné à ſon contour, parce qu'une telle ligne eſt un *minimum.*

De-là on peut inférer, que non-ſeulement aux angles mixtes, mais encore aux curvilignes, formés par la rencontre de deux ſurfaces courbes, il faut prendre la meſure de l'ouverture des branches du biveau perpendiculairement à la tangente commune de l'une & de l'autre.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là que l'art de former les biveaux ou modeles des angles des ſurfaces qui ſe rencontrent, conſiſte à trouver une ſous-tendante aux perpendiculaires menées ſur chaque ſurface à la ligne droite ou courbe de leur interſection, ce qui eſt aiſé dans les angles rentrans, mais qui ne ſe peut dans les angles ſaillans, que par le moyen de quelqu'inſtrument, ou en prolongeant

geant ces perpendiculaires, par le moyen de quelques regles ou cordeaux.

L'inſtrument propre à cet uſage eſt compoſé de deux branches mobiles, qui ſont aſſemblées à leur extrêmité par un pivot & une charniere, dont le frottement eſt aſſez rude pour qu'elles demeurent immobiles à l'ouverture où on les a mis; on l'appelle *fauterelle*, ou *fauſſe équerre*, ou *compas d'appareilleur*, comme on verra à la premiere planche du quatrieme Livre; mais parce qu'on a beſoin de prendre des angles mixtes ou curvilignes, & qu'avec cet inſtrument on ne peut prendre que les angles rectilignes, ou ceux des cordes des ſurfaces curvilignes concaves, & point du tout des convexes, on eſt obligé de faire un autre inſtrument pour chaque angle de cette eſpece, qu'on appelle *beuveau* ou plutôt *biveau*.

Comme il y a plus de difficulté à former des angles mixtes & curvilignes que des rectilignes, qui ſont aiſément déterminés par la connoiſſance de leurs ſinus ou de leurs ſous-tendantes, on doit toujours commencer par les angles rectilignes des ſurfaces planes ſuppoſées au-devant des courbes, comme ſont les doèles plates.

PROBLEME XII.

Trois angles plans qui forment un angle ſolide étant donnés, trouver les angles d'inclinaiſon de ces plans entr'eux.

Ou en termes de l'Art pour la Coupe des Pierres

Trois panneaux étant donnés, trouver les biveaux de leurs aſſemblages.

On peut réſoudre Méchaniquement ce Problême, en joignant les trois angles ou panneaux donnés, enſorte qu'ils forment l'angle ſolide, & en prenant avec la fauterelle ou récipiangle les angles des plans, obſervant qu'il faut que les branches de la fauterelle ſoient poſées ſuivant des lignes perpendiculaires à l'interſection des plans ſi elle eſt en ligne droite, ou à ſa tangente en un point où l'on meſure l'angle, c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir d'une équerre pour en placer un côté ſur l'interſection, & faire ſervir l'autre à régler la poſition de la branche de la fauterelle ſur chaque ſurface.

Mais ces opérations ne ſont bonnes que pour des Ouvriers, l'eſprit n'y trouve pas la même ſatisfaction que dans les Géométriques, ni la même ſûreté & commodité.

Fig. 305. & 306. Soient donc (*Fig.* 305) les trois plans AB, AC, AD qu'il faut raſſembler, en ſorte qu'ils faſſent un angle ſolide en A. Il faut trouver l'angle d'inclinaiſon du plan AD avec le plan AC, & celui du même plan AD avec le plan AB.

On décrira ſur une même ſurface plane les trois angles plans qui doivent former le ſolide, & on les rangera de maniere qu'ils ſoient contigus par les côtés AL & AK. Des points E & F pris ſur les autres côtés à volonté ou à diſtance égale du point A, on tirera ſur les côtés AL & AK prolongés, s'il le faut, les perpendiculaires EG, FH, qu'on prolongera juſqu'à leur point de rencontre en I, duquel pour centre & de l'intervalle HF pour rayon, on tracera un arc en K, qui coupera en ce point K le côté AH prolongé; je dis que ſi par les points I & K on mene la ligne IK, l'angle HIK ſera égal à celui de l'inclinaiſon des plans AC, AD entr'eux.

De même que ſi du point I pour centre & de l'intervalle GE, on fait un arc de cercle qui coupe AG prolongée en L, & que l'on tire la ligne IL, l'angle LIG ſera égal à celui de l'inclinaiſon mutuelle des plans AB, AD.

DEMONSTRATION.

Suppoſons que les plans AC AB ſe meuvent autour des lignes AK, AL comme des couvercles de boëtes ſur leurs charnieres, juſqu'à ce que les lignes AF, AE ſe raſſemblent en une ſeule qui ſeroit en l'air, mais que nous repréſentons dans la Figure par une ligne AM, le plan AD reſtant immobile, les lignes MG, MH, qui ſeroient perpendiculaires aux interſections AL, AK ſeroient les mêmes qui étoient auparavant en EG & HF; ſoit enfin tirée la ligne MI.

Puiſque la ligne LG (*Fig.* 305) ou LG (*Fig.* 306) eſt perpendiculaire à la ligne GM qui eſt en l'air, & à GI qui eſt dans le plan, elle ſera perpendiculaire au plan du triangle MGI (par la 4e. du XIe. d'Euc.) & réciproquement on démontrera de la même maniere que le plan du triangle MIH eſt perpendiculaire au plan AD, d'où il ſuit (par la 19. du XIe. d'Euc.) que la ligne MI ſera perpendiculaire au plan AD, & que le triangle

MIH ſera rectangle en I, quoiqu'il ne le ſoit pas dans la figure, où l'on ne peut le repréſenter exactement, parce que la ligne IM eſt en l'air hors du plan du papier. Donc l'angle MHI eſt celui de l'inclinaiſon des plans AD, AC, auquel l'angle HIK a été fait égal par la conſtruction; car l'on a fait HI perpendiculaire ſur AK pour avoir un angle droit en H, & IK = HF = HM; donc les triangles MIH ſuppoſé en l'air, & IHK ſont égaux en tout, puiſqu'ils ſont rectangles l'un en H l'autre en I, que le côté IH eſt commun aux deux, & que HK eſt égal à IM; donc l'angle MHI eſt égal à l'angle HIK, c'eſt-à-dire, à celui de l'inclinaiſon des plans AD, AC; *ce quil falloit démontrer.*

On démontrera de même que l'angle GIL eſt égal à l'angle MGI, qui eſt celui de l'inclinaiſon des plans AB, AD. Les mêmes lettres dont on a marqué les lignes de la Figure 306, font voir l'application de ce Problême à un vouſſoir de voute en berceau biaiſe, répeté à la Fig. 307 avec des ombres, pour en mieux exprimer la figure. *Fig. 306. & 307.*

Il faut remarquer qu'il peut arriver que le point I tombe hors du plan AD, ce qui ne change en rien la démonſtration, comme on peut le voir dans la Fig. 306.

Seconde maniere en réduiſant les plans donnés en triangles pour en former des pyramides.

La maniere précédente de réſoudre le Problême eſt la plus ſimple, car elle ne ſuppoſe que des angles plans donnés, quoique dans la Figure on ait deſſiné des parallelogrammes. On a pû remarquer que nous n'avons fait attention qu'à un de leurs angles. Celle-ci ne ſuppoſe rien de plus que les baſes; mais elle ſe fait un peu différemment ſans le ſecours des triangles rectangles, dont le ſommet de l'angle droit tombe hors des côtés des angles donnés en cherchant les baſes triangulaires des pyramides. C'eſt pourquoi nous repréſentons ici quatre triangles pour les quatre ſurfaces qui l'enveloppent.

Soient les trois triangles ABC, AEC, EDC donnés, qui ſont autant de ſurfaces d'une pyramide triangulaire, leſquelles étant jointes enſemble, forment un angle ſolide en C. Il faut pour trouver les angles que ces plans font entr'eux, commencer par chercher le quatrieme triangle, qui eſt la baſe, ou une *Fig. 308.*

Fig. 308. ſurface de la pyramide, lequel triangle eſt formé par les côtés de chacun des trois autres oppoſés au ſommet C, tels ſont dans cet exemple BA, AE, ED, deſquelles on formera un triangle AEb^4, qu'on rangera enſuite de AEC ſur le même plan.

Cette préparation étant faite en façon de développement, on pourra chercher les angles de tels plans qu'on voudra. Suppoſons premierement qu'on demande celui que les plans AEC, CED ſont entr'eux. On prendra un point G à volonté ſur le côté commun EC, par lequel on lui tirera une perpendiculaire FH, qui coupera AE en F, & ED en H. On portera la diſtance EH de E en h ſur le côté Eb^4, puis ayant tiré hF, on aura trois lignes hF, FG, GH, avec leſquelles on fera un triangle, prenant ſi l'on veut FG pour baſe. Du point F pour centre & de l'intervalle Fh pour rayon on ſera un arc vers x, & du point G pour centre & GH pour rayon, on en fera un autre auſſi vers x, qui coupera le précédent au point x, l'angle FGx ſera celui des plans AEC, CED.

Préſentement ſi l'on veut trouver celui des plans AEC, ACB, on prendra ſur le côté commun AC un point i à volonté, par lequel on menera ſur AC la perpendiculaire KL. On portera la diſtance AK ſur AB, en Ak ſur Abd, puis on tirera kL. On formera un triangle avec les trois lignes Ki, iL, Lk, l'angle y iK, ſera celui que l'on cherche.

Il eſt viſible que pour trouver le troiſieme angle des plans AEC, AEb^4, il faut tirer ſur le côté commun AE une perpendiculaire mO, faire EM égal Em, & un triangle mnz avec les trois lignes mn, nO, OM l'angle mnz ſera le propoſé.

Application à la pratique.

Quoique les panneaux triangulaires ne ſoient pas fort communs dans la Coupe des pierres, il s'en trouve cependant dans les naiſſances des enfourchemens & aux doëles des trompes; mais parce que les angles trop aigus ſe caſſent facilement, on les émouſſe pour creuſer le ſommet du cone dans une ſeule pierre qui raſſemble tous les angles des panneaux de doële triangulaire, que l'on réduit par ce moyen à des trapezes; mais ce qu'on ne fait pas en œuvre, on doit le faire dans l'épure, parce qu'on retranche du panneau triangulaire ce que l'on juge à propos, à chaque côté de l'angle aigu qu'on veut ſupprimer.

L'opération en eſt plus ſimple & plus facile que ſi on cherchoit d'abord un trapeze.

Soit, par exemple (*Fig.* 309) un vouſſoir de trompe conique, tel qu'on le voit deſſiné avec des ombres à la Figure 310, dont les panneaux de tête T, de doële plate D, & des lits L & L ſont donnés, on demande les angles qu'ils doivent faire entr'eux, afin qu'on en puiſſe prendre les ouvertures avec la fauſſe équerre, & s'en ſervir pour abbattre la pierre qu'il faut enlever pour y appliquer les panneaux donnés. *Fig.* 309.

On commencera par réduire en triangles toutes les figures des panneaux donnés, qui ſont ici très-différentes; car celui de la doële eſt triangulaire, ceux des lits ſont des trapezes rectilignes, & celui de la tête eſt un trapezoïde mixte.

Ayant arrangé de ſuite les panneaux donnés, enſorte que ceux dont on cherche les biveaux ayent un côté commun, on les diviſera en triangles par des diagonales, comme celui de tête ABDC par les lignes AD, BC, ceux de lit a aCSX, BD *s x*, par les lignes a S, B *s*.

Préſentement ſuppoſons qu'on demande le biveau de lit & de doële. On prendra ſur le côté commun CS un point G à volonté, par lequel on lui tirera la perpendiculaire FH, puis du point S pour centre & de l'intervalle S a pour rayon, on ſera un arc a E; & du point D pour centre & de l'intervalle DA pour rayon, on décrira un autre arc AE, qui coupera le précédent au point E, d'où on tirera au point S la ligne ES.

Enſuite du même point S pour centre, & de l'intervalle SF pour rayon, on décrira un arc F *f*; qui coupera la ligne ES au point *f*, duquel comme centre & de l'intervalle FG, on décrira un arc vers *g*, & du point H pour centre & de la longueur HG pour rayon, on en décrira un autre qui coupera le précédent au point *g*, les lignes *gf* & *g* H formeront l'angle du biveau demandé *f g* H.

Suppoſons en ſecond lieu qu'on demande le biveau de doële CDS & de tête CABD, ayant tiré par un point N, pris à volonté ſur le côté commun CD, une perpendiculaire P *n*, on opérera comme nous venons de faire.

Du point D pour centre & DS pour rayon, on décrira un arc SO, & par le point P un autre P *q*, enſuite du point A pour centre & la diagonale a S pour rayon, on décrira un arc *u* O qui coupera le précédent au point O, d'où l'on tirera au point D

Fig. 309. la ligne OD, qui coupera au point *q* l'arc P *q*. Si du point *q* pour centre & de la longueur PN pour rayon on fait un arc vers *y*, & que du point *n* pour centre & de l'intervalle N *n* pour rayon on en faſſe un autre qui coupera le précédent au point *y*, les lignes *n y* & *q y* tirées à ce point *y*; donneront l'ouverture de l'angle des plans de tête & de doële plate.

Enfin ſi l'on demande le biveau de tête & de lit, ayant aſſemblé ces deux ſurfaces ACDB & *x s* DB ſur le joint de tête BD dans un même plan, on lui tirera par un point *m*, pris à volonté ſur ce côté commun, la perpendiculaire IK, puis du point B pour centre & la diagonale B *s* pour rayon, on fera un arc *s e*, & du point C pour centre, & de l'intervalle CS pour rayon, on en décrira un autre qui coupera le précédent au point *e*, d'où l'on tirera la ligne *e* B, puis du point B pour centre & de l'intervalle BK où la ligne IK coupe la diagonale B *s*, on fera un arc K *k*, qui donnera ſur B *e* le point *k*, duquel pour centre & pour rayon *m* K on décrira un arc vers *z*, & du point I pour centre & de l'intervalle I *m* pour rayon on en tracera un autre qui coupera le précédent au point *z*, où l'on menera les lignes I *z*, *k z*, l'angle I *z k* ſera le biveau de tête & de lit qu'on avoit demandé.

DÉMONSTRATION.

Il ſemble qu'il y a quelque différence dans les conſtructions que nous venons de propoſer aux Figures 308 & 309; mais ſi l'on y fait bien attention on verra qu'elle n'eſt qu'apparente; ainſi la démonſtration de l'une ſert pour l'autre.

Fig. 308. Si l'on imagine (*Fig.* 308) que le triangle ACE reſtant immobile les deux autres ABC, ECD ſe meuvent au tour de leurs côtés AC & CE, comme ſur des charnieres juſqu'à ce que les points B & D ſe réuniſſent, en ſorte que les lignes CB & CD ſe confondent en une, il ſe formera de ces trois triangles ou plans un angle ſolide en C, & une pyramide triangulaire fermée par un quatrieme triangle, égal à celui qu'on a marqué en AE *b*, qui a ſes trois côtés égaux à chacun des autres triangles, avec leſquels il forme la pyramide. Or il eſt clair que par le mouvement du plan CDE ſur le côté CE, la ligne droite FH ſe plie en G ſans changer de ſituation à l'égard de CE, juſqu'à ce que le plan ACB rencontre celui où elle eſt, lorſqu'ils ſe réu-

niſſent ſur le côté CD, alors le point H tombera ſur le côté E b^d, où les points B & D ſe réuniſſent en b^d, & le point H en h; c'eſt pourquoi on a fait la longueur E h égale à EH; ainſi ſuppoſant un plan qui coupe la pyramide perpendiculairement au côté CE par le point G, il coupera le triangle EA b^d par la ligne hF, qui eſt la ſous-tendante de l'angle des plans AEC, DEC repréſentée par la ligne Fx ſon égale; donc l'angle FGx eſt bien trouvé par cette conſtruction; *ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 308.

Préſentement ſi on examine la conſtruction qui donne les biveaux d'un vouſſoir de trompe à la Fig. 309, on reconnoîtra qu'elle eſt dans le fond parfaitement la même que la précédente, quoique avec quelque petit changement; car on y a trois triangles donnés en développement ſur un plan; ſçavoir, a CS portion d'un panneau de lit; DCS panneau de doële plate entiere, & DCA portion du panneau de tête, leſquelles trois ſurfaces doivent, dans l'exécution, former un angle ſolide en C; par conſéquent il faut les plier de maniere que l'intervalle AC a que laiſſe le développement ſoit ſupprimé, joignant le point A au point a, en ſorte que les deux lignes CA C a ſe confondent en une, ce qu'on ne peut faire qu'en faiſant mouvoir les triangles DCA & SC a ſur les côtés CD & CS, le panneau de doële SCD reſtant immobile; c'eſt pourquoi des points D & S pour centre, on a fait mouvoir les lignes DA & S a, leſquelles ſe rencontrant en E, prennent la ſituation des côtés d'un quatrieme triangle SED, qui ferme la pyramide formée par les trois ſurfaces données; mais dans les différentes circonſtances, on change la ſituation de ce triangle à l'égard des ſurfaces données. Pour les biveaux de doële & de lit, on le met dans la ſituation SED; pour ceux de tête & de doële, à la ſituation DCA, & pour les biveaux de tête & de lit à la ſituation CeB, où il faut remarquer qu'il a toujours un côté commun avec une de ces ſurfaces dont on cherche l'angle qu'elle fait avec ſa contigue.

Remarque ſur l'uſage.

On ſçait qu'il n'y a pas de maniere plus générale & plus ſimple pour trouver les angles plans des figures rectilignes, que de les diviſer en triangles, qui ſont les premiers élémens des ſurfaces, puiſqu'on ne peut enfermer un eſpace à moins de trois lignes. Par une ſemblable raiſon il n'y a pas de maniere plus gé-

nérale pour connoître les angles solides que font les angles plans dans des surfaces qui se rencontrent, que de réduire les corps en pyramides triangulaires ; car les tétraedres réguliers ou irréguliers sont leur derniere réduction, ou si l'on veut leurs premiers élémens ; puisqu'on ne peut enfermer un espace de corps à moins de quatre surfaces triangulaires, & que toute pyramide de base polygone d'un nombre de côtés au-dessus du triangle, pourra en contenir autant de triangulaires que sa base contiendra de triangles ; ainsi on peut dire que ce Problême est général pour trouver les angles des plans de tous les corps imaginables compris par des surfaces planes, comme on le verra par les applications que nous en ferons aux traits des voutes dans le quatrieme Livre.

A l'égard des angles solides formés par des surfaces courbes, qui font entr'elles des angles curvilignes ou mixtes, qu'on ne peut mesurer immédiatement, mais seulement par les cordes de leurs arcs ; il est clair que la même méthode doit encore avoir lieu, puisqu'on peut faire passer des surfaces planes par ces cordes, & inscrire ou circonscrire des pyramides de surfaces planes triangulaires à des pyramides triangulaires de surfaces courbes on mixtes. C'est même une nécessité ; car puisque nous ne parvenons à la connoissance des lignes courbes que par le secours des droites, nous ne parvenons aussi à la formation des surfaces courbes que par la médiation des planes.

PROBLEME XIII.

Ayant deux angles rectilignes ASB, DSP *perpendiculaires entr'eux, qui ont leur sommet* S *commun & un côté de l'un* SP *dans le plan de l'autre* ASB, *trouver l'angle des deux plans qui peuvent passer par leurs côtés* AS, DS & BS, DS.

Fig. 311. Soit (*Fig.* 311) le triangle ASB, dans le plan duquel est la ligne PS, section d'un autre triangle PSD qui lui est perpendiculaire, lequel est représenté ici en racourci de perspective, parce qu'il est en l'air sur PS ; ayant fait PE perpendiculaire à PS & égale à PD, & tiré SE, on fera EC perpendiculaire sur ES, qui coupera SP prolongée en C, par C on tirera FG perpendiculaire à SC, qui coupera SA prolongée en F, & SB en G. On portera la longueur CE en C*e* sur SC prolongée, & l'on

l'on tirera les lignes F *e*, G *e*. L'angle F *e* G eſt celui que l'on cherche. Pl. 16. Fig. 311.

DEMONSTRATION.

Par la conſtruction, les triangles FC *e*, GC *e* qui ſont dans le plan FSG, ſont égaux aux deux FCD & GCD qui ſont en l'air, dans un plan perpendiculaire au plan CDS (par la 4e. du XIe. d'EUCL.) à cauſe que GC eſt perpendiculaire aux deux CS, CD ou CE, & parce que la ligne GE eſt perpendiculaire à ES, c'eſt-à-dire, dans la repréſentation en l'air, CD à DS, elle l'eſt à la commune ſection des plans. Or puiſque SC eſt perpendiculaire à FG, & SD à DC, elle l'eſt (par la 4e. du XIe. d'EUCL. & la 11e. du XIe.) à toutes celles qui ſont dans le même plan paſſant au point D; par conſéquent à DF & DG, (par la déf. 6 du XIe. d'EUCL.) donc l'angle FDG eſt celui des plans, ou ſon égal F *e* G; *ce qu'il falloit démontrer.*

Je donnerai ci-après l'uſage de ce Problême.

COROLLAIRE.

De-là on tire la maniere de trouver l'angle d'un plan incliné avec un vertical, dont on a la projection ſur un côté de l'angle horiſontal, & la plus grande hauteur de l'incliné, ou l'angle de ſon interſection avec le vertical, & le côté de l'horiſontal, parce que ce cas n'eſt que la moitié du précédent, je veux dire, une partie. Ainſi au lieu de chercher l'angle des plans FDS, GDS, on ne cherche que celui du plan GDS incliné avec le vertical PDS, auquel cas il eſt viſible que l'angle cherché eſt l'angle G *e* C.

Soit, par exemple, donnée la ligne OS pour ſection d'un plan incliné avec l'horiſon, la ligne OH pour ſection de ce plan avec un vertical OH *p*, dont la baſe O *p* eſt dans le même plan que OS; on demande l'angle de ce plan incliné avec le vertical. Du point H, pris à volonté dans la ligne d'interſection OH, on lui menera une perpendiculalre HC qui coupera l'horiſontale O *p*, prolongée en C, par où on tirera ſur OC la perpendiculaire CS, qui coupera OS au point S. On portera la longueur CH en C *h*, ſur OC prolongée, & l'on tirera S *h*; l'angle S *h* C eſt celui que l'on cherche, comme il eſt évident par ce qui vient d'être démontré de la figure précédente, en pre- Fig. 312.

nant le point O de cette figure pour le point S de la précédente, & le point S de celle-ci pour le point G de l'autre.

De la ſituation des angles des plans, à l'égard de l'horiſon.

LEMME.

Un angle rectiligne en ſituation quelconque, eſt égal à la ſomme, ou au ſupplément à deux droits, des angles que ſes côtés prolongés ſont avec une ligne horiſontale ou une verticale.

Fig. 313. Soient (*Fig.* 313) deux lignes AD, DK, qui ſe coupent en D, ou G*e*, *e* V, ſi l'on tire par E une horiſontale EO & une verticale VE, je dis que l'angle ADK eſt égal à la ſomme des angles AEK du côté AD prolongé & DKE.

La démonſtration ſe préſente à la ſeule inſpection de la figure, où l'on voit que l'angle ADK eſt extérieur à l'égard du triangle DKE; donc il eſt égal aux deux intérieurs oppoſés, de même que G*e* T à l'égard du triangle *e* ET.

Par la même raiſon, cet angle ADK eſt égal au ſupplément à deux droits des angles que ſes côtés prolongés ſont avec l'horiſon EO; car l'angle ADK eſt égal à ſon oppoſé au ſommet ODE, qui eſt le ſupplément à deux droits des angles à l'horiſon EOD OED.

COROLLAIRE I.

D'où il ſuit que l'angle que fait un joint de tête AD, avec une doële plate OD eſt le ſupplément à deux droits des angles que la doële & les joints prolongés au-delà de ſon ſommet ſont avec une ligne aplomb VT, & que le même angle ADO de doële & de joint de tête, eſt égal à la ſomme de deux angles DEO, DOE, que ſes côtés prolongés ſont avec une ligne de niveau.

COROLLAIRE II.

Fig. 314. De-là il ſuit encore que l'angle d'une doële plate avec l'horiſon, donne facilement l'angle de cette doële avec un *aplomb*, car il n'y a qu'à lui ajouter l'angle droit *h* OP, on aura un angle obtus DOP égal à ſon alterne ODV de *l'aplomb* avec la doële, parce que la verticale EV eſt parallele à OP.

Et par l'inverſe ſi l'on a l'angle ODE de l'aplomb avec la

doële, on aura l'angle OD r = DO n de la doële avec l'horiſon, en y ajoutant l'angle droit.

Remarque ſur l'uſage.

Les angles des doëles avec les *aplombs*, ou avec les lignes de niveau, particulierement ces derniers, facilitent beaucoup les opérations des traits, parce qu'un ſeul plan horiſontal AC eſt équivalent à pluſieurs BG, DF, Ee, qui lui ſont néceſſairement paralleles. *Fig.* 315.

Il n'en eſt pas de même des plans verticaux, qui peuvent être tournés différemment, les uns au Midi, les autres au Levant, &c. ainſi le plan horiſontal dont la ligne AC eſt le profil, ſert pour régler l'inclinaiſon des joints de tête & des doëles, comme ſes paralleles BG, DF, & y rapporter leurs parties par des *aplomb*, comme L F en lC, K G en dC, &c. Cette ligne A C ſert auſſi à y tranſporter les angles des doëles des différens vouſſoirs avec l'horiſon, comme EDF, DBG en faiſant e d parallele à ED & d b parallele à DB; mais à cauſe que les plans verticaux hC, El, &c. peuvent avoir des directions variables, nous en faiſons moins d'uſage que des horiſontaux, comme on le verra par les pratiques ſuivantes.

Application des propoſitions précédentes à la conſtruction des voutes, pour trouver les biveaux des ſurfaces des vouſſoirs ſuppoſées planes, comme de la doële plate avec ſes lits, ou de la même doële avec ſes têtes.

Le moyen le plus ſimple de trouver les angles d'inclinaiſon des plans inclinés entr'eux, eſt de les conſidérer comme coupans un plan horiſontal ou un plan vertical, vrai ou ſuppoſé; parce que dans les ouvrages d'Architecture on n'a point de regle de conduite plus ſûre que celle du *plomb*, qui donne la poſition verticale, & celle du *niveau*, qui donne l'horiſontale. Or nous avons démontré au Théorême précédent, qu'un angle en ſituation quelconque étoit égal à la ſomme de ceux que ſes côtés forment avec une ligne horiſontale ou une verticale, ou à leur ſupplément à deux droits, lorſque les deux côtés étoient prolongés par le ſommet; donc par le moyen de la prolongation des côtés on peut parvenir à la connoiſſance des angles des

plans des vouſſoirs, & les placer dans leur ſituation naturelle à l'égard de l'horiſon ; en voici des exemples qui fourniſſent une méthode générale pour les biveaux de doële & de lit, & de doële & de tête.

Fig. 317. Premierement, ſi une voute eſt conique, comme une trompe droite dont l'axe eſt de niveau, il eſt viſible que ſon plan BSA peut être pris pour un horiſontal, dans lequel il y a un point S qui eſt le ſommet du cone, où toutes les ſurfaces de la trompe tant doëles que lits, doivent paſſer.

Secondement, que ſi la baſe B *h* A eſt circulaire, tous les plans des lits qui paſſent par les joints de tête 5 1, 6 2, ſe coupent auſſi au point C, de même qu'au point S; ainſi leur interſection commune eſt dans l'axe, qui eſt l'horiſontale CS.

Troiſiemement, que ſi la corde de la doële 2 1 eſt prolongée juſqu'à la rencontre de l'horiſontale BA en O, la doële plate qui paſſera par cette corde & par le point S, coupera le plan horiſontal ſuivant uue ligne SO.

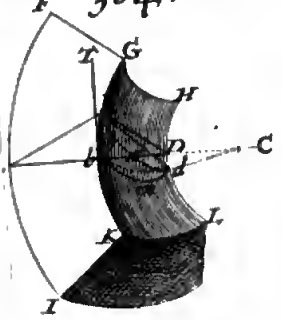
Comme il peut arriver que la corde 2 1 étant peu inclinée à l'horiſontale BA, donneroit un point O hors du plan du deſſein, ce qui ſeroit incommode ; telle ſeroit, par exemple, 2 *k* plus encore *h* 2, ſi le vouſſoir étoit étroit près de la clef ; on peut, pour plus de commodité, au lieu de la ſection horiſontale, chercher celle qui ſe feroit avec un plan vertical C *h*, ſans rien changer au fond de la conſtruction ; puiſqu'au lieu de l'angle 2 *u* C on auroit ſeulement ſon complement 2 *z* C.

Enfin ſi la corde de la doële devient horiſontale, comme celle de la clef 2 3, puiſqu'elle doit paſſer comme toutes les autres par le ſommet S, il eſt clair qu'en tirant par ce point S une ligne *f e* parallele à BA, on aura la ſection de cette doële avec l'horiſon.

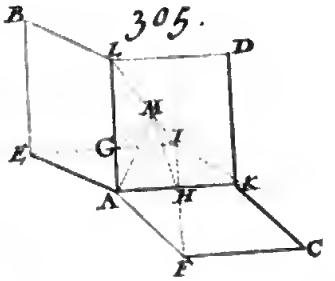
J'ai dit que l'axe étoit la ſection commune de tous les lits avec l'horiſon, j'entends lorſque le ceintre eſt circulaire ; mais s'il étoit elliptique, & les joints de tête 8 6 : 9 7 perpendiculaires à cette courbe 6 7 E, leurs ſections ne ſeroient plus réunies, parce que les joints de tête prolongés couperoient l'horiſontale BA aux points Z *z*, & comme les lits paſſeroient cependant encore par le point S, les ſections de lits avec l'horiſon ſeroient les lignes *z* S, ZS.

Préſentement ſi l'on cherche les ſections des doëles plates d'un berceau avec l'horiſon ; il eſt viſible que ſi ce berceau eſt

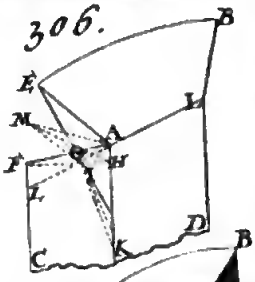
304.



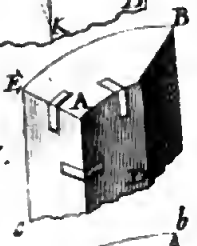
305.



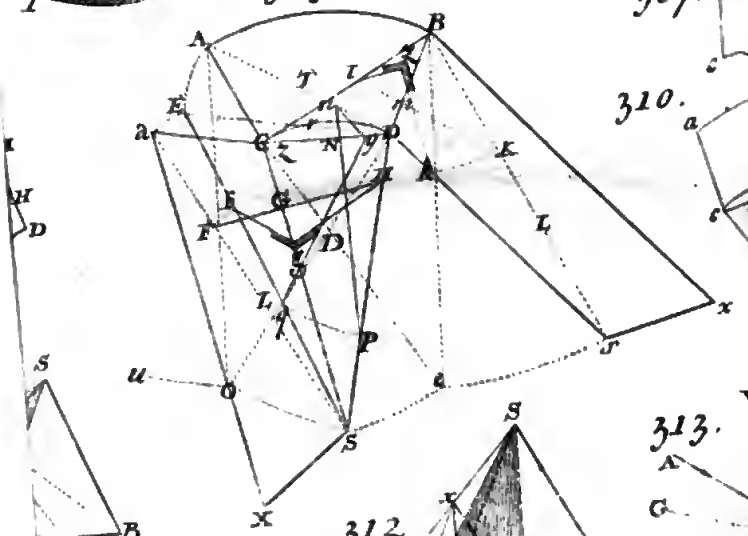
306.



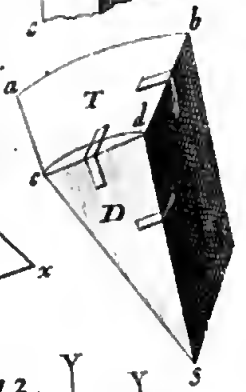
307.



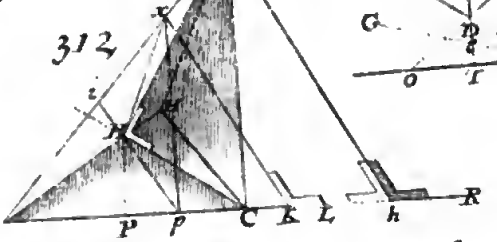
309



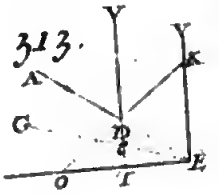
310.



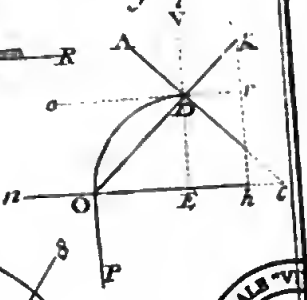
312



313.

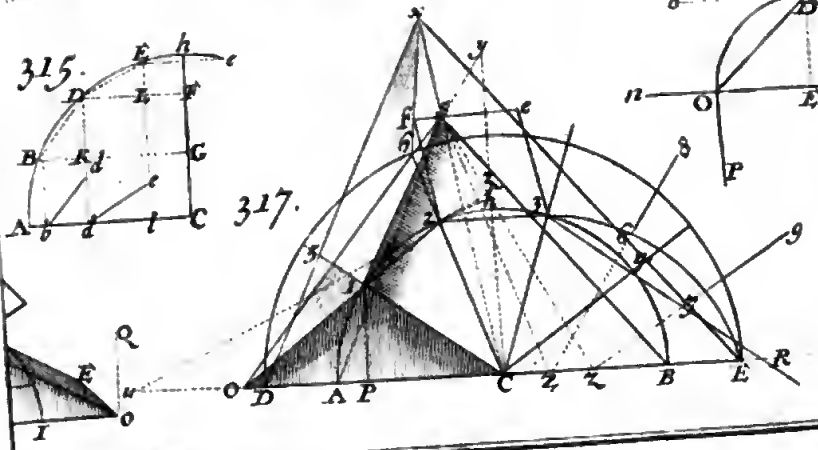


314.



315.

317.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

droit ſur ſa face, ce ſeront des perpendiculaires menées à la ligne de face, comme (*Fig.* 316) la ligne OQ ſur OC; mais ſi les berceaux ſont biais, la ſection de chaque doële avec l'horiſon ſera parallele au piédroit, telle eſt OE à l'égard du piédroit AB. *Fig.* 316.

Quant aux ſections des lits avec l'horiſon, il en ſera comme des coniques, ſi le ceintre eſt circulaire elles ſe réuniront à l'axe C*c*; & ſi le ceintre eſt elliptique, ce ſeront des paralleles à l'axe, comme *xy* provenant du joint L 5 prolongé en *x* pour l'arc elliptique *h* 5 I.

A l'égard des doëles plates des clefs, il eſt viſible qu'elles ne peuvent couper l'horiſon, puiſqu'elles lui ſont paralleles.

Il nous reſte à trouver les ſections des doëles plates des berceaux en deſcente avec l'horiſon; on peut le faire de deux manieres.

Premierement par le profil; ſoit, par exemple, le plan horiſontal de la deſcente, ou ſeulement ſa moitié ACDB, ſon profil CHKR, ſur lequel le point F marque la hauteur du joint I de la doële plate I 2. Ayant tiré FE qui coupera l'horiſontale OC prolongée en X, on portera la diſtance CX ſur la projection horiſontale de ce joint PI, de P en S, & l'on menera par le point O la ligne OS, qui eſt la ſection de cette doële plate avec l'horiſon. Pl. 27. *Fig.* 318.

Secondement, on peut faire une ſuppoſition que le berceau, au lieu d'être incliné, ſoit horiſontal, que la ligne RC*q* eſt une horiſontale, à l'égard de laquelle la face HC eſt inclinée en ſurplomb. Alors il ne s'agit que de changer le ceintre, par exemple le circulaire, dont le rayon eſt CH en un elliptique ſurbaiſſé HV *u* T, dont le petit demi-axe eſt *q* H, & le grand axe le double de CH, ce qui eſt aſſez clair après ce que nous avons dit des ſections des cylindres, mais que nous expliquerons plus au long dans le quatrieme Livre, où nous parlerons des deſcentes, Tome II, Chap. V. Voici la pratique pour tous les cas.

PROBLEME XIV.

Trouver les biveaux de toutes ſortes de voutes ſans former le ceintre de l'arc-droit.

Premierement ceux de lit & de doële.

La projection horiſontale du joint de lit & l'élévation de la face étant donnée.

Premier cas pour les voutes en berceau de niveau.

Fig. 319. Soit le parallelogramme ABED, le plan horiſontal d'un berceau biais, dont le ceintre de face eſt le demi-cercle AHB, & la ligne PN la projection du joint de lit paſſant par le point 2 de ce ceintre; on cherche l'angle des plans de la doële plate, qui paſſe par la corde 1 2, & par le joint de tête 2 6.

On prolongera la corde 2 1, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'horiſontale AB au point O, par où on menera OS parallele à PN, ou ce qui eſt la même choſe à l'axe CM; enſuite par le point P, projection du point 2, on élevera ſur PN la perpendiculaire PR, qui coupera OS en R, & on la prolongera vers Q juſqu'à ce qu'elle coupe l'axe MC prolongé en Q. On prolongera auſſi NP pour porter la hauteur de la retombée P 2 en P 2^*. On tirera du point R la ligne R 2^*, & du point Q la ligne Q $2^* q$, l'angle R $2^* q$ ſera celui du biveau que l'on cherche.

Second cas pour les berceaux en deſcente.

Fig. 318. Nous avons dit qu'on peut les conſidérer comme de niveau, ſuppoſant la ligne qR horiſontale, au lieu de la ligne ON; cependant on peut encore les conſidérer comme inclinés à l'horiſon.

Soit le parallelogramme ACDB la moitié du plan horiſontal d'une deſcente droite, dont CHKR eſt le profil, AI 2 H la moitié de l'élévation, P l la projection horiſontale du joint de lit, qui paſſe par le joint de tête 2 6, & fL la projection verticale ou ſon profil qui coupe l'horiſontale ON au point x. On portera la diſtance Cx ſur la projection du joint de lit de P en

S; puis ayant prolongé la corde de l'arc de tête 2 I jusqu'à ce qu'elle rencontre au point O, l'horisontale CA prolongée, on tirera par le point S l'indéfinie SOY, qui sera la section du plan de la doële plate 2 I prolongée, & du plan de l'horison passant par la naissance du ceintre de face en AC. Fig. 318.

Ensuite on portera la hauteur de la retombée P 2 en P 2 *g*, d'où l'on tirera au point S la ligne 2 *g* S, à laquelle on fera la perpendiculaire 2 *g* Q qui coupera SP prolongée en Q. Sur la même SP prolongée, & par ce point Q on fera une perpendiculaire Y *y*, qui coupera SO en Y, & l'axe DC en *y*. On portera la longueur 2 Q *g* de Q en G par où on tirera les lignes YG & *y* GI, l'angle YGI est celui du biveau que l'on cherche.

Secondement pour les voutes coniques.

La construction sera tout-à-fait la même que la précédente. Fig. 320.

Soit le triangle ASB, le plan horisontal d'une trompe, dont le ceintre de face est l'arc A *h* B, & la ligne PS la projection horisontale du joint de lit passant par le point 2 & l'axe CS. On prolongera la corde 2 1 du 2e. vousoir, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'horisontale BA prolongée en O, & l'on tirera OS, qui sera la section de la doële plate prolongée avec le plan horisontal qui passera par AB, & le sommet S de la trompe qu'on suppose dans le même.

On élevera ensuite au point P, projection du point 2, la perpendiculaire PX, égale à P 2, sur la ligne PS; & ayant tiré XS, on fera au point X la perpendiculaire XQ sur XS, qui coupera SP prolongée en Q, & par ce point Q ayant fait sur la même SQ la perpendiculaire *o* R qui coupera SO en *o*, & l'axe SC en R, on portera la longueur QX en Q *x*, & des points *o* & R on tirera *o x* & R *x* V, l'angle *o x* V sera celui du biveau que l'on cherche, qui est celui du plan de la doële plate passant par 2 1 du second vousoir, avec celui du second lit passant par le joint de tête 2 5 de l'élévation.

Si cette voute conique étoit en descente par son axe, on trouveroit, comme aux berceaux en descente, un autre point S, par le moyen du profil, qui ne seroit pas alors le sommet du cone.

Application aux voutes sphériques & sphéroïdes.

Suivant ce que nous avons dit en parlant du développe-

ment, on peut réduire les ſpheres & les ſphéroïdes en pluſieurs zones de cones tronqués, inſcrits dans celles de la ſphere, d'où il ſuit que l'on peut trouver les biveaux de ces parties coniques de la même maniere que pour les cones entiers, les réduiſant par les doëles plates en pyramides tronquées; & par conſéquent que cette méthode convient auſſi-bien aux voutes ſphériques & ſphéroïdes, qu'aux trompes & autres voutes coniques.

Troiſiemement, pour les angles ſaillans ou rentrans faits par la rencontre de deux berceaux.

Premier cas des doëles plates égales ou inégales, qui ont leurs naiſſances de niveau entr'elles, & ſe coupent en arrête ſaillante, ou en angle rentrant comme aux arcs de cloître.

Fig. 321. Soit l'arc EAB le ceintre de l'arrête d'enfourchement, & la ligne EC ſa projection horiſontale. Soit AB la corde de l'arrête des ſeconds vouſſoirs, dont *m* M ou ſon égale a *b* eſt la projection, & les lignes a D, a *d* celles de la ſection du plan horiſontal, qu'on ſuppoſe paſſer par le point A, comme au profil AG, leſquelles font l'angle horiſontal D a *d* parallele à celui des murs de piédroits de la voute. Il eſt clair que cet angle peut être pris pour la baſe d'une pyramide tout-à-fait ſemblable à celles des exemples précédens de la Figure 308, Planc. 26, puiſqu'elle eſt formée par les plans de doëles & de lit, par conſéquent on peut en trouver les angles de la même maniere; & comme l'application en eſt ſi facile qu'on peut la faire de ſoi-même, je vais, pour un peu de variété, donner une autre conſtruction, qui eſt cependant la même renverſée.

Par le point B ſommet de l'arrête, on tirera l'horiſontale PBO parallele à EC, ſur laquelle par le point A on menera la perpendiculaire AP qui coupera HO en P, par où on tirera ſur la corde AB la perpendiculaire PQ, dont on portera la longueur du point *b* de la projection a *b* de la corde AB en *q*, pour tirer de ce point en D & *d* les lignes *q* D, *q d* qui comprendront l'angle D *q d* du biveau que l'on cherche.

S'il s'étoit agi des premiers vouſſoirs, dont la corde de l'arrête eſt la ligne EA, on auroit mené par le point A la ligne *h* G, puis par le point E la perpendiculaire E *p*, & par le point *p* la ligne *p x* perpendiculaire ſur EA, laquelle différe peu en longueur

longueur de la ligne *p* A ; ce qui fait voir que l'angle *m x m* différe peu à la naiſſance de l'angle *m e m*. Fig. 321.

On peut prendre ſur *h* G tout autre point que *p* ſi l'on veut, par exemple *h* ; alors il faudroit abaiſſer la perpendiculaire *h i* ſur a *e* prolongée, & mener par le point *i* des paralleles *i* A, *i* K aux lignes a D, a *d*, qui couperont la perpendiculaire *m m* prolongée aux points A & K ; puis on portera *h* F qui eſt la perpendiculaire ſur la corde EA de a en *y*, l'angle K *y* A ſera celui que l'on cherche.

Pour montrer que cette conſtruction revient à la même fin que les précédentes, par la méthode générale dont elle n'eſt qu'une modification, j'en ai mis la figure au-deſſous, répetant les projections du même profil EAB *h* ; ſçavoir *n* N = a *b*, l'angle V *n u* = D *a d*. On élevera au point N la perpendiculaire NS égale à la hauteur BG de la retombée du profil : on menera *n* S, & ST perpendiculaire à *n* S, qui coupera *n x* au point T, par où on menera la perpendiculaire *u* V qui coupera les ſections de la doële avec l'horiſon aux points *u*, V. On portera la longueur TS en TY, ou T *y* ; du point Y ou *y* ; on tirera les lignes Y *u*, YV ou *y u*, *y* V, l'angle *u* Y V ou *u y* V eſt celui du biveau que l'on cherche, par le Problême précédent.

Quatriemement, pour les angles ſaillans ou rentrans formés par des doëles plates dont les naiſſances ne ſont pas de niveau mais l'une de niveau & l'autre rampante ; tel eſt l'enfourchement d'un berceau de deſcente qui en rencontre un autre de niveau.

Pour réſoudre ce cas il faut chercher la ſection de la doële rampante avec le plan horiſontal, qui paſſe par la naiſſance horiſontale de l'autre.

Soit (*Fig.* 323) le parallelogramme ACDB la projection horiſontale de deux portions de doëles plates ACD, ADB, qui ſe coupent ſuivant une ligne AD, en ſorte cependant que la naiſſance de l'une AC eſt de niveau, & la naiſſance AB de l'autre en deſcente ſuivant un angle donné BAG. Fig. 323.

On élevera ſur la projection de l'arrête AD la perpendiculaire DH égale à la hauteur de la retombée, qu'on ſuppoſe connue par le profil de cette arrête, & l'on tirera AH qui repré-

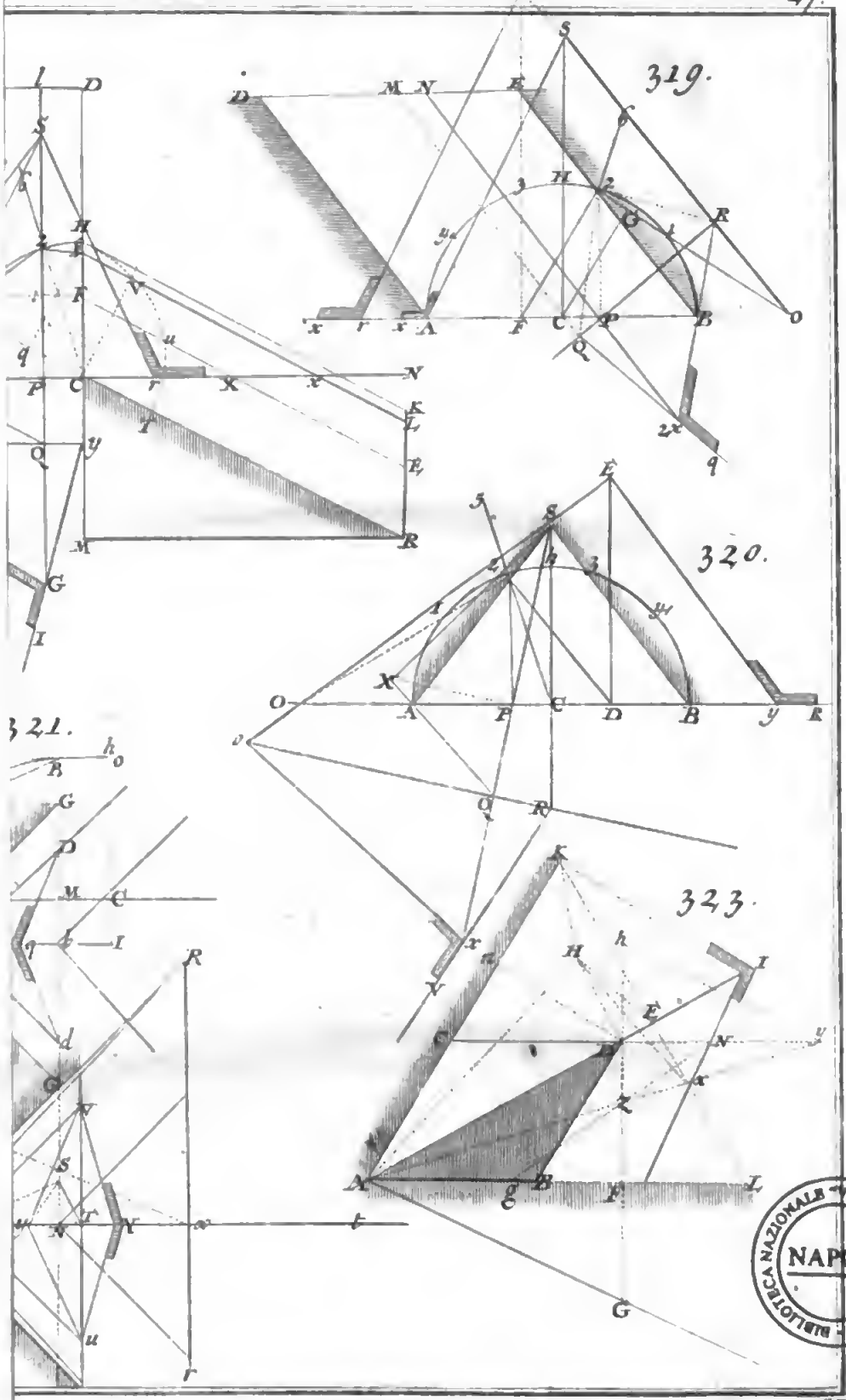
Fig. 323. ſentera l'inclinaiſon de l'arrête. Sur CD prolongée on portera la même hauteur DH en DN; du même point D on menera une perpendiculaire ſur AB prolongée qui la coupera en F, & le profil de deſcente AG en G. On portera FG ſur FA en F*g*; enſuite par les points trouvés *g* & N, on tirera la droite *g* N qui coupera DG au point *z*, la ligne menée du point A par *z* ſera la ſection de la doële en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par les points A & C: il ne s'agit plus préſentement que de conſtruire le Problême comme à l'ordinaire.

On peut encore trouver cette ſection d'une autre maniere, en portant la hauteur de la retombée DH perpendiculairement ſur CD en D*h*, & faiſant l'angle D*hy* égal au complément de celui de la deſcente BAG, ou ce qui eſt la même choſe, tirant *hy* parallele à AG juſqu'à ce qu'elle rencontre CD prolongée en *y*; la ligne A*y* ſera la même ſection de la doële en deſcente avec l'horiſon qui paſſe par la naiſſance de celle de niveau; ainſi on pourra conſtruire le Problême comme les précédens.

On fera HE perpendiculaire ſur AH, qui coupera AD prolongée en E, par où on tirera la perpendiculaire KL, qui coupera les ſections de l'horiſon AC, A*z*, prolongées, en K & en *x*. On portera la longueur EH en EI ſur AD prolongée, on tirera les lignes KI & I*x*, l'angle KI*x* eſt celui du biveau que l'on cherche.

DEMONSTRATION.

Toutes ces conſtructions ſe rapportent ſi facilement au Problême précédent, qu'il n'eſt pas néceſſaire de les démontrer. Cette derniere ſeulement demande quelque explication. Si l'on ſuppoſe la ligne AG dans un plan vertical ſous AF, il eſt clair que le point G tombera ſous le point F. Si l'on ſuppoſe auſſi DH, ou ſon égale DN élevée verticalement ſur l'horiſontal ADF, le point N tombera ſur le point D au-deſſus de l'horiſon. Il eſt donc viſible que ſi de ce point N on tire une ligne au point *g* poſé à angle droit avec la ligne horiſontale DF, & à diſtance du point F égale à FG, on aura ſur le plan horiſontal l'expreſſion des deux triangles ſemblables DN *z* au-deſſus de l'horiſon & F*g z* au-deſſous, qui les diviſe en *z*. Donc la ligne A*z* eſt la ſection de l'horiſon; car ſi on les fait mouvoir ſur FD comme ſur une charniere, juſqu'à ce qu'elles ſoient en ſituation verticale, la ligne N*g* exprimera la pente du plan ADB, la-



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

quelle ſe plonge ſous l'horiſon qui paſſe par AC au point *z*; *ce qu'il falloit trouver.* Fig. 313.

La démonſtration de la ſeconde maniere eſt encore plus ſimple; car puiſque *hy* eſt parallele à AG (par la conſtruction) les triangles rectangles AFG, *y h* D ſont ſemblables, & à cauſe des paralleles AF, D*y* ſemblablement poſées à l'égard du plan incliné ADB, quoique tournés en ſens contraire, on aura FG: D*h*:: AF: D*y*, c'eſt-à-dire, que l'abaiſſement ſous l'horiſon eſt à la hauteur au-deſſus, comme le commencement de la deſcente au-deſſous eſt au commencement de la montée au-deſſus, ce qu'exprime la ligne tirée d'un point A de l'horiſon à l'autre *y*, *qu'il falloit trouver.*

EXPLICATION DES TERMES

Les plus uſités pour la Coupe des pierres,

Rangés par ordre Alphabétique.

A.

Batue, c'eſt la diſtance horiſontale de la naiſſance d'un arc à la perpendiculaire, qui tombe d'une diviſion de cet arc ou de ſon extrêmité ſupérieure ſur ſon diametre horiſontal. Ce terme n'eſt plus guere en uſage; on ſe ſert de celui de *retombée*. Voyez Retombée.

Amaigrir. Voyez Démaigrir.

Annulaires, j'appelle ainſi les voutes dont la figure imite les anneaux en tout ou en partie, telles ſont les voutes *ſur le noyau*. Voyez Noyau.

Anſe de panier. Voyez Berceau & ceintre.

Appareilleur, c'eſt le conducteur d'un bâtiment qui préſide à l'appareil, c'eſt-à-dire aux meſures, à l'arrangement & à l'aſſortiment des pierres, qui les trace de la grandeur & figure dont elles doivent être, pour diriger les Tailleurs de pierre qui les taillent; c'eſt pourquoi il doit ſçavoir la coupe des pierres, pour exécuter les deſſeins des Architectes dans les bâtimens civils, & des Ingénieurs dans les Fortifications.

Arc eſt une portion de ligne courbe à laquelle on donne différens noms ſuivant ſa figure & ſes uſages.

Arc droit eſt celui dont la corde eſt perpendiculaire au joint de lit d'une voute lorſque ce joint eſt droit, ou à ſa tangente au point de rencontre lorſqu'il eſt courbe; c'eſt ainſi que l'entend le pere DERAND, qui confond l'arc droit avec le biveau; mais pour mieux expliquer ce mot:

L'Arc droit proprement dit eſt la ſection d'une voute perpendiculairement à ſon axe & à ſes côtés, ou aux tangentes à ſes côtés.

D'où il ſuit 1°. qu'il n'y a point d'arc droit proprement dit aux voutes coniques, parce qu'un plan ne peut être perpendiculaire à leurs axes & à leurs côtés qui ſont convergens.

2°. Qu'il y a des arcs droits aux voutes ſphériques, parce que leurs tangentes ſont parallèles à leurs diametres.

3°. Qu'il y a auſſi des arcs droits dans les annulaires & dans les vis où les tangentes ſont perpendiculaires à leurs diametres, parce que la tangente du côté eſt parallele à celle de leur axe courbe dans la ſection perpendiculaire à cette tangente.

Arc-rampant, c'eſt une ligne courbe, dont les deux extrêmités priſes aux appuis de leurs naiſſances, qu'on appelle *impoſtes*, ne ſont pas de niveau, & dont les diametres conjugués ne ſont pas à l'équerre, c'eſt-à-dire, dont l'aplomb de la clef eſt oblique à la ligne de rampe des impoſtes; telles ſont les arcades qu'on fait ſous les rampes des eſcaliers & des terraſſes en deſcente; ce qui fait que ces ſortes d'arcs ne peuvent jamais être d'une ſeule portion de cercle, mais de quelqu'autre ſection conique ou de ſpirale.

Arc de cloître, on appelle ainſi une voute compoſée de deux, trois, quatre, ou pluſieurs portions de berceaux, qui ſe rencontrent en angle rentrant dans leur concavité, en ſorte que leurs côtés forment le contour de la voute en polygone. Tels ſont, par exemple, les petites voutes ou chapiteaux des guerites à pans. Si les berceaux cylindriques ſe rencontroient au contraire en angle rentrant ſur leur convéxité, ou ce qui eſt la même, choſe en angle ſaillant ſur la concavité, la voute changeroit de nom, elle s'appelleroit *voute d'arrête*.

Arc doubleau eſt un arcade en faillie ſur la doële d'une voute qu'elle traverſe à angle droit, de ſorte qu'elle lui fait en cet endroit une eſpece de *doublure*, ſoit pour la renforcer, ſoit pour cacher quelque arrête de rencontre, comme aux voutes Gothiques, ou pour faire une liaiſon d'un pilaſtre ou d'une perche à ſon oppoſée.

Lorſque ces arcs ne ſont pas perpendiculaires à la direction de la voute, mais en diagonale, on les appelle *Ogives* ou *Augives*; on n'en voit de cette eſpece que dans l'Architecture Gothique.

Arcade, eſt une voute de peu de profondeur en portion de berceau.

Arche eſt à peu près la même choſe : mais ce terme ſemble conſacré ſeulement aux ponts.

Arceau eſt une petite arche ſur un ruiſſeau ou ſur un ravin.

Architecture, dans le mauvais jargon des Ouvriers, qui a paſſé depuis peu aux Architectes, ſignifie ſouvent une moulure. Ainſi on lit dans le devis imprimé pour la conſtruction des bâtimens civils du Roi, à Paris, *une corniche avec ſes Architectures*, pour dire avec ſes moulures.

Arrête, c'eſt l'angle ſaillant que font deux ſurfaces droites ou courbes d'une pierre quelconque ; lorſque les ſurfaces concaves d'une voute ſe rencontrent en angle ſaillant, on l'appelle *voute d'arrête*.

Arriere-vouſſure, c'eſt une ſorte de petite voute, dont le nom exprime la poſition, parce qu'elle ne ſe met que derriere l'ouverture d'une baye de porte ou de fenêtre, dans l'épaiſſeur du mur, au-dedans de la feuillure du tableau des piédroits. Son uſage eſt de former une fermeture en platebande, ou en plein ceintre, ou ſeulement bombée.

Celles qui ſont en platebande à la feuillure du linteau & en demi-cercle par derriere, s'appellent *Arriere-vouſſure de Saint-Antoine*.

Celles au contraire qui ſont en plein ceintre à la feuillure & en plate-bande par derriere, s'appellent *Arriere-vouſſure de Montpellier*.

Lorſque dans la premiere eſpece l'arc intérieur eſt beaucoup moindre que le demi-cercle, l'arriere-vouſſure s'appelle *reglée* & *bombée*.

Dans le même cas pour la ſeconde eſpece, il n'y a pas de nom particulier, on peut l'appeller *Bombée en avant* & *reglée en arriere*, par l'inverſe de la précédente.

Lorſque l'arriere vouſſure eſt en plein ceintre ſur le devant, & ſeulement bombée en arriere, on l'appelle *arriere vouſſure de Marſeille*.

B.

Balevre du Latin *Bis labra*, qui a deux levres, eſt l'excédent d'une arrête ſur celle de la pierre contigue ; c'eſt auſſi l'éclat d'une arrête qui s'eſt caſſée, lorſque les joints ſont trop ſerrés.

Bandeau, ornement tout uni en saillie, comme une bande plate sur le nud d'un mur, autour d'une baye de porte ou de fenêtre. Si ce bandeau est orné de moulures, il s'appelle *Chambranle.*

Bander une arcade ou une platebande, c'est arranger les vousſoirs ou les claveaux sur leurs ceintres & les serrer par des coins.

Berceau, par analogie au couvert qu'on a coutume de mettre sur les berceaux des enfans, est une voute cylindrique quelconque, dont la courbure peut être de différente espece; lorsqu'elle est circulaire, ensorte que son contour soit un demi-cercle complet, on l'apelle *plein ceintre.*

Si, supposant la largeur égale, la hauteur est moindre, on l'appelle *en anse de panier* ou *surbaissé.*

Si la hauteur excéde le demi-cercle, on l'appelle *Surhaussé* ou *Surmonté.*

Si ses naissances ne sont pas de niveau, il s'appelle *rampant.*

Un berceau à l'égard de la direction de ses faces s'appelle *droit*; lorsque la face est perpendiculaire à la direction, & *biais* lorsqu'elle est oblique.

Beveau ou *Bauveau* ou *Buveau*; ce dernier est le terme du P. DERAND, les Ouvriers qui disent Biviau ou *Biveau*, conservent mieux l'étimologie du mot *Bivium*, chemin fourchu. En effet, c'est le modele de l'ouverture d'un angle quelconque, rectiligne, curviligne, ou le plus souvent mixte, pour former l'angle d'inclinaison de deux surfaces qui se rencontrent. Lorsqu'elles sont planes, on se sert pour Biveau d'une Sauterelle ou d'une fausse équerre à branches mobiles; lorsqu'une des deux surfaces est courbe ou toutes les deux, le Biveau est un instrument de bois fait exprès en forme d'équerre stable, je veux dire, dont les branches ne s'ouvrent ni ne se ferment.

Nous avons dit ci-devant que le P. DERAND confond souvent le *Biveau* avec l'*arc droit.*

Biais, c'est l'obliquité d'une face à l'égard de la direction d'une voute, ou d'un jambage à l'égard d'un passage.

Biais passé, on appelle ainsi une voute en berceau biaise par-devant & par derriere, dont les joints de lit ne sont pas paralleles aux côtés du passage, comme dans les voutes ordinaires biaises, mais dont la direction tend à des divisions de

vouſſoirs inégaux, en ſituation inverſe du devant au-derriere, c'eſt-à-dire, de l'entrée à la ſortie, de ſorte que les joints de lit à la doële ne doivent pas être droits, comme les font les Auteurs qui ont Traité de la Coupe des pierres.

Bombé ou *Bombement* ſe dit d'un arc peu élevé au-deſſus de ſa corde, ou du moins beaucoup moindre que le demi-cercle.

Lorſqu'au lieu de s'élever, l'arc s'abaiſſe au-deſſous de ſa corde, on l'appelle *bombé en contre-bas*, comme il arrive aux platebandes mal faites.

Bornoyer ou *borneier*, c'eſt regarder avec un œil en fermant l'autre, comme ſi l'on étoit borgne, pour mieux diſtinguer les défauts d'alignement ou la différence de direction des côtés d'une pierre, & voir ſi une ſurface eſt plane, ou de combien elle eſt gauche.

Branches d'Ogives; ce ſont les arcs des nervures des voutes Gothiques, qui font ſaillie ſur le nœud de ces voutes dans l'intervalle des croiſées entre les piliers.

Branches de vouſſoir. Voyez Enfourchement.

Branches de biveau ou de ſauterelle ſont les côtés des inſtrumens, le P. DERAND les appelle les *doigts*, D'AVILER, *les bras.*

Bras de biveau. Voyez Doigts.

Buter, c'eſt appuyer les *Reins* d'une voute par quelque contre-fort ou arc-boutant.

C.

Calibre, dans la coupe des bois, ſignifie un modele fait de planche, contourné ſuivant une ligne courbe qui doit déterminer le contour d'une ſurface qu'on ſe propoſe de faire. Dans les ouvrages de plâtre c'eſt un profil de corniche, fait avec une planche de cuivre ou de bois pour diriger les moulures en le trainant en ligne droite perpendiculairement à la direction de la corniche, cet inſtrument eſt une eſpece de cerche.

Calotte eſt une portion de voute ſphérique ou ſphéroïde qu'on fait au milieu des voutes & plafonds pour les élever en cet endroit.

Canoniere eſt un vieux mot qui ſignifioit ce que nous appellons aujourd'hui *embraſure* à mettre du canon, c'eſt une voute conique. Voyez voute en canoniere.

Carton

Carton, feuille de carton contournée ſuivant un profil, qui peut être fait ſur une autre matiere, comme du fer-blanc, ſans changer de nom.

Ceintre ou *cintre*, l'un & l'autre eſt uſité & vient de la même étimologie *cinctus*, de *cingere* environner, ou de *ceindre* & ceinture. Ce mot a deux ſignifications, l'une pour la charpente, l'autre pour le contour de la voute qui a été formée ſur la charpente. Dans la charpenterie il ſignifie ces aſſemblages de pieces de bois qui ſoutiennent les ais & doſſes ſur leſquels on conſtruit une voute avec des briques ou du moilon, ou des pierres de taille, juſqu'à ce qu'étant fermée elle puiſſe ſe ſoutenir ſans ce ſecours.

Si le plancher qui ſert de forme à la voute eſt plat, la Charpenterie qui le ſoutient ne s'appelle plus ceintre, mais *étayement*.

Dans le langage de la Coupe des pierres, il ſignifie le contour arrondi de la partie intérieure d'une voute pris en un endroit déterminé: ou perpendiculairement à ſa direction, alors il s'appelle *l'arc droit*, ou obliquement à l'arrête d'une face biaiſe, alors il s'appelle *ceintre de face*, ou *arc de face*.

Celui de ces deux ceintres qu'on a le premier en vûe pour tracer la voute, s'appelle *ceintre primitif*.

Celui qui réſulte de cette premiere déterminaiſon s'appelle *ceintre ſecondaire*.

Par la nature des ſections cylindriques dans les voutes biaiſes, ces deux ceintres ſont de même hauteur, mais d'inégale largeur & contour; ſi l'un eſt circulaire l'autre eſt elliptique, & ſi l'un & l'autre ſont elliptiques, l'un eſt plus allongé que l'autre, & leurs diviſions en vouſſoirs ſont proportionnelles, celles du ſecondaire ſont aſſujetties à celles du primitif.

Les ceintres conſidérés dans la figure de leur contour ont auſſi différens noms, celui qui eſt en demi-cercle complet, s'appelle *plein ceintre*. Celui qui étant ſuppoſé de largeur égale, ne s'éleve pas à même hauteur que le demi-cercle, s'appelle *en anſe de panier*, ou *ſurbaiſſé*. Celui qui dans la même ſuppoſition s'éleve au-deſſus du demi-cercle, s'appelle *ſurhauſſé*, ou *ſurmonté*.

Celui qui eſt d'un arc de cercle beaucoup moindre que ſa moitié, comme du quart ou du ſixieme, s'appelle *bombé*.

Cerce ou *Cherche*, l'un & l'autre eſt uſité, quelques-uns, parmi leſquels eſt Felibien, diſent *cerche*; je ſuis leur exemple par

pluſieurs raiſons. 1°. Pour allier les deux premiers mots les plus uſités. 2°. Pour éviter la dureté de la prononciation & l'équivoque de *cherche*. 3°. Pour conſerver dans l'écriture l'étimologie de ce mot, ſuivant le ſentiment de d'Aviler, qui le fait venir de l'Italien *Cerchio*. Je dis dans l'écriture, parce que dans la prononciation *C* ſe prononce comme *tch* en François, & *ch* comme un *K*; il faudroit dire *tcherque*; quoiqu'il en ſoit, c'eſt le modele d'un contour courbe découpé ſur une planche de volice mince, ou autre matiere, pour diriger le relief ou la cavité d'une pierre qu'on creuſe, en le préſentant par dehors pour voir ce qu'il faut enlever; d'où il ſuit que ſon contour doit être le contraire de celui de la pierre, ſçavoir convexe pour une pierre concave, & concave pour une pierre convexe. Les *Calibres* dont nous avons parlé, ſont ſouvent des eſpeces de *Cerches*.

Claveau du Latin *Clavis*, une clef, eſt un vouſſoir à doële plate, qu'on appelle ainſi parce qu'il ſe met de niveau, comme les milieux des clefs des autres voutes s'il s'agit d'un plafond, ou en pente de furplomb, lorſqu'il s'agit d'une platebande rampante, ou d'une trompe plate.

Clauſoir du Latin *claudere*, fermer, eſt une pierre quelconque, qui acheve une voute ou un mur en fermant & bouchant le dernier eſpace qui reſtoit vuide.

Clef par analogie à ſon uſage de fermer une voute, eſt le dernier rang de vouſſoirs que l'on poſe au ſommet de la voute pour appuyer ceux des côtés & la bander; lorſque la clef excéde le parement, on l'appelle *clef ſaillante*; lorſqu'elle excéde la hauteur d'un bandeau, on l'appelle *clef paſſante*; lorſque la pierre qui eſt à l'interſection des nervures d'une voute Gothique s'abaiſſe au-deſſous en façon de cul-de-lampe, on l'appelle *clef pendante*. Il en eſt des bizarres qu'on appelle *Guimberges*.

Collet, c'eſt la partie la plus étroite d'une marche tournante du côté du noyau, s'il y en a un, ou ſur le vuide du milieu, s'il n'y en a point.

Commiſſure en vieux François, uſité par le P. DERAND, du Latin *Commiſſura*, ſignifie un joint: il n'eſt plus en uſage.

Compas d'appareilleur, eſt un inſtrument de fer ou de cuivre, fait à-peu-près comme un compas ordinaire, excepté que ſes branches ſont droites & plates comme celles du récipiangle

appellé *fauſſe équerre*, pour prendre l'ouverture des angles rectilignes & les tranſporter ſur la pierre ; il a de plus qu'un ſimple récipiangle des pointes deſtinées à prendre des meſures de longueur & tracer des arcs comme les autres compas.

Compas à verge eſt un inſtrument pour tracer de grands arcs de cercle qu'on ne peut faire avec les compas d'Appareilleurs. Il conſiſte en une longue regle qu'on fait paſſer au travers de deux morceaux de bois ou de fer, qu'on appelle *poupées*, qui peuvent s'approcher ou s'éloigner comme l'on veut, & être fixées par le moyen des vis. Chacune de ces poupées eſt terminée à un bout par une pointe de fer qui ſert l'une à fixer au centre, l'autre à tracer l'arc ; cet inſtrument vaut mieux qu'un cordeau, parce qu'il ne peut ni ſe rallonger ni ſe racourcir dès qu'il eſt une fois reglé à la longueur.

Compas à ellipſe ou *à ovale*, autre inſtrument compoſé du compas à verge & de deux poupées de plus, qu'on fait mouvoir dans une couliſſe pratiquée dans une figure de croix pour une ellipſe entiere, ou de T pour tracer une demi-ellipſe ſur des arcs donnés. Voyez ſa deſcription pag. 165, & pl. 10. Fig. 117.

Contre-clef, c'eſt un vouſſoir joignant la clef à droite ou à gauche.

Coquille, par analogie à certaines coquilles de mer, eſt une voute en quart de ſphere ouverte, dont le pole eſt au milieu du fond, ſur l'impoſte duquel s'élevent des rangs de vouſſoirs qui s'élargiſſent comme les côtés des coquilles juſqu'à la face, elle ſert à couvrir les Niches.

On appelle auſſi *Coquille* le parement inférieur des marches d'un eſcalier tournant délardées ſans reſſaut, ou avec des petits reſſauts. C'eſt une ſurface *hélicoïde*.

Coude. Voyez *Jarret*.

Coupe, la coupe d'une pierre eſt la direction d'un lit ou d'un joint perpendiculaire à la ſurface droite ou courbe de la doële ou de la tête d'un vouſſoir, mais oblique au plafond dans les platebandes.

Couper, ſignifie ordinairement ôter d'une pierre plus qu'il ne convient à la place qu'elle doit occuper, de ſorte que c'eſt la gâter en la rendant défectueuſe ou inutile. La couper à propos c'eſt la *tailler*.

Couper du trait, c'eſt faire un modele en petit avec de la craye, ou du plâtre, du bois ou autre choſe facile à couper, pour voir la figure des vouſſoirs, & s'inſtruire dans l'application du trait de l'épure ſur la pierre par le moyen des inſtrumens, comme *cerches*, *panneaux*, *biveaux & équerres* dont on ſe ſert en grand.

Courbe, ſubſtantif, ſignifie une ligne courbe : il y en a deux eſpeces, les unes *planes*, les autres à *double courbure*. Les courbes planes ſont celles qu'on peut exactement tracer ſur un plan, leſquelles ſe réduiſent pour l'uſage de la Coupe des pierres aux ſections coniques & aux ſpirales.

Les Courbes à double courbure ſont celles qu'on ne peut tracer ſur une ſurface plane qu'en racourci, par le moyen de la projection ; celles ſont la plupart des arrêtes des angles des enfourchemens des voutes qui ſe rencontrent dans certaines circonſtances.

Couſſinet, par analogie aux couſſins, ſur leſquels on s'appuye pour ne pas ſe bleſſer, eſt le premier vouſſoir d'une voute en arcade qui a un lit de niveau, & celui de deſſus en coupe en pente, pour recevoir les ſuivans auſquels il ſert d'appui.

Corne de vache, eſpece de voute en cone tronqué, dont la direction des lits ne paſſe pas au ſommet du cone.

Cul-de-four ſignifie une voute ſphérique ou ſphéroïde de quelque ceintre qu'elle ſoit, ſurhauſſé ou en plein ceintre, quoique les cul-de-four dont elle tire ſon nom ſoient très-ſurbaiſſés. L'arrangement de leurs vouſſoirs peut varier & leur donner différens noms, comme en *pendentif*, en plan de *voute d'arrête*, &c.

D.

Débillarder, c'eſt pour la coupe des bois, enlever une partie en eſpece de priſme triangulaire, ou approchant, compriſe entre des lignes qui enferment une ſurface gauche.

Déceintrer, c'eſt démonter les ceintres de charpente quand la voute eſt faite & les joints bien fichés.

Dégauchir, c'eſt former une ſurface plane en déterminant ſes extrêmités par le moyen de deux regles qu'on regarde l'une par l'autre en fermant un œil pour voir ſi elles ne ſe croiſent point, faiſant en ſorte que l'une ainſi regardée couvre l'autre exactement, ſans quoi elles ne ſont pas dans un même plan, mais ſur une ſurface gauche.

Délardement, c'eſt pour les pierres la même choſe que le débillardement pour le bois, il ſe dit particulierement de l'amaigriſſement que l'on fait au-deſſous des marches pour former l'intrados d'une rampe ou d'une coquille d'eſcalier tournant.

Délit, c'eſt une eſpece de diviſion naturelle qui ſe trouve dans les pierres, par couche, comme aux feuilles d'un livre; ainſi *poſer en délit*, c'eſt donner à une pierre une ſituation différente de celle qu'elle avoit dans la carriere d'où on l'a tirée. C'eſt une mal-façon de poſer les claveaux ou vouſſoirs autrement que de lit en joint, comme ſi l'on chargeoit un livre ſur la tranche, il eſt évident que le poids feroit effort pour écarter les feuilles, au lieu qu'il les appuye les unes ſur les autres lorſqu'on le charge ſur la joue.

Il y a des pierres ſi maſſives qu'elles n'ont ni lit ni délit, tels ſont la plupart des marbres qu'on peut poſer comme l'on veut, & preſque toutes celles de la côte du Nord de Bretagne.

Démaigrir ou *Amaigrir* une pierre, c'eſt en ôter pour rendre l'angle que font deux ſurfaces, plus aigu ou moins obtus.

Dérobement, c'eſt la maniere de tailler une pierre ſans le ſecours des panneaux par le moyen des hauteurs & profondeurs qui déterminent les bornes de ce qu'il en faut retrancher, comme ſi l'on dépouilloit la figure imaginée de ce qui la couvre. C'eſt dans ce ſens qu'on dit dérober des feves. Le P. Dechalles n'a pas connu l'origine de ce mot lorſqu'il l'a traduit *per ſuffurationem*, il falloit dire, *per ſpoliationem*.

Deſcente, on appelle ainſi toutes les voutes inclinées à l'horiſon.

Développement, c'eſt l'extenſion des ſurfaces qui enveloppent un vouſſoir ou une voute, dont les parties contigues ſont rangées de ſuite ſur une ſurface plane. Le développement dans une épure ordinaire eſt l'extenſion de la doële, ſur les diviſions de laquelle on ajoute les figures des panneaux de lit.

Quelques Ouvriers peu inſtruits, comme Blanchard, dans ſon Traité de la Coupe des bois, entendent par le mot de développement, la ligne courbe, & quelquefois l'angle naturel qui eſt repréſenté en racourci dans la projection.

Ainſi il dit qu'*un* tel *angle* eſt le *développement d'une* telle *ligne* qui en eſt le profil ou la projection horiſontale.

Doële ou *douelle* du Latin *Dolium*, un tonneau, ſignifie le parement intérieur d'une voute ou d'un vouſſoir creux, comme la doële d'un tonneau; on l'appelle auſſi *intrados*.

La ſurface plane qui paſſe par la corde de l'arc d'une doële, s'appelle *Doële plate*, c'eſt une préparation à la formation d'une doële concave.

Doigt de biveau, ſignifie ſelon le P. DERAND, une de ſes branches (page 15): Daviler l'appelle *Bras*, & moi *Branche*.

Dreſſer une pierre, c'eſt l'équarrir ou la diſpoſer à recevoir le trait.

Droit, par un D majuſcule, ſignifie perpendiculaire, qui eſt oppoſé au biais. Ainſi on dit un arc droit, quoique cet arc ſoit courbe, parce qu'on veut dire que ſon plan eſt perpendiculaire à la direction d'un berceau. On dit une porte droite ou un berceau droit, une deſcente droite, pour ſignifier que ſa direction n'eſt pas oblique à ſon entrée horiſontalement.

E.

Ebraſement ſignifie l'élargiſſement des côtés ou jambages d'une porte ou d'une voute; tels ſont les bayes des fenêtres & abajours qui s'élargiſſent en dedans.

Echaſſe, c'eſt une regle de bois un peu large, dont les appareilleurs ſe ſervent pour y marquer les lignes de hauteur de retombée & d'épaiſſeur dont ils ont beſoin pour les porter commodément dans le chantier, où ils voyent les pierres qui leur conviennent, & peuvent en donner les meſures.

Elévation, c'eſt la repréſentation d'un corps deſſiné ſuivant ſes meſures verticales & horiſontales extérieurement apparentes, ſans égard à la profondeur.

Enfourchement, c'eſt l'angle formé par la rencontre de deux doëles de voutes qui ſe rencontrent, où les vouſſoirs qui les lient ont deux branches comme une fourche, dont l'une eſt dans une voute, & l'autre dans la contigue.

Entrecoupe, intervalle vuide de deux voutes qui ſont l'une ſur l'autre, enſorte que la doële de la ſupérieure prend naiſſance ſur l'extrados de l'inférieure, qui eſt quelquefois ouverte comme au dôme des Invalides, à Paris, où la calote ſe détache des côtés de la tour du Dôme.

On fait ſouvent des entrecoupes pour ſuppléer à la charpente

d'un dôme, en élevant une voute pour la décoration extérieure, au-deſſus de la premiere qui paroîtroit trop écraſée au-dehors, comme à S. Pierre de Rome, & en pluſieurs Egliſes d'Italie.

Epure, apparemment du verbe *épurer* mettre au net, eſt le deſſein d'une voute tracé ſur une muraille ou ſur un plancher, de la grandeur dont elle doit être exécutée, pour y prendre les meſures néceſſaires à la conſtruction des vouſſoirs.

Un pareil deſſein pour la charpente change de nom, il s'appelle *Etelon*.

Equarrir une pierre ou une piece de bois, c'eſt lui faire des ſurfaces à l'équerre l'une à l'autre.

Equarriſſement, tailler par équarriſſement, eſt une maniere de tailler les pierres ſans le ſecours des *panneaux*, les ayant ſeulement préparées, en les équarriſſant, à y appliquer les meſures des hauteurs & des profondeurs qu'on a trouvé dans le deſſein de l'épure pour chaque vouſſoir; on l'appelle auſſi *par dérobement*, comme nous l'avons dit à ce mot.

Etayement, plancher pour ſoutenir les voutes en *plafond*; il tient lieu du ceintre dans les voutes concaves.

Extrados, du Latin *extra*, dehors, c'eſt la ſurface extérieure d'une voute, lorſqu'elle eſt réguliere comme l'*intrados*, ſoit qu'elle lui ſoit parallele ou non. La plupart des voutes des Ponts antiques étoient *extradoſſés* d'égale épaiſſeur.

F.

Fauſſe coupe, c'eſt la direction d'un joint de tête oblique à l'arc du ceintre, auquel il doit être perpendiculaire pour être en bonne coupe dans les voutes concaves.

Mais ſi la voute eſt plate, comme aux *Platebandes*, ce doit être tout le contraire, la bonne coupe doit être oblique au plafond, pour que les claveaux ſoient faits plus larges par le haut que par le bas; car ſi les joints ſont perpendiculaires à la platebande, les clavaux deviennent d'une égale épaiſſeur. Alors ils ſont en *fauſſe coupe*, parce qu'ils ne peuvent ſe ſoutenir que par le moyen des barres de fer q'on leur donne pour ſupport, ou par une bonne coupe cachée ſous la face au-dedans à quelques pouces d'épaiſſeur, comme on en voit aux portes du vieux Louvre, à Paris.

Fauſſe équerre, s'entend ordinairement du compas d'appareilleur, quoiqu'il ſignifie en général un récipiangle, c'eſt-à-dire, un inſtrument propre à meſurer l'ouverture d'un angle; ceux de bois s'appellent *Sauterelle*.

Fermer une voute, c'eſt y mettre le dernier rang de vouſſoirs, qu'on appelle collectivement *la clef*, par la même métaphore; le dernier vouſſoir s'appelle *Clauſoir*, du Latin *claudere*, fermer.

Formeret. Voyez *Nerf*, il ſignifie auſſi quelquefois le ceintre de jonction d'une voute à un mur; Voyez le P. DERAND, pag. 404.

Foulée, c'eſt un giron de marche, ainſi appellé, parce que c'eſt la partie qu'on foule aux pieds.

G.

Gauche, ſignifie toute ſurface qui n'a pas quatre angles dans un même plan, en ſorte qu'étant regardée en profil, les côtés oppoſés ſe croiſent; telle eſt une portion de la ſurface d'une vis & de la plupart des arrieres vouſſures. Ce terme eſt de tous les Arts, tant de Maçonnerie que de Charpenterie & Menuiſerie; dans celui-ci Blanchard l'applique auſſi à la ligne courbe à double courbure, qui eſt ſur une ſurface.

Gras, ſignifie un excès d'épaiſſeur de pierre ou de bois, ou d'ouverture d'angle plus grand qu'il n'eſt néceſſaire pour le lieu où la pierre, ou bien le morceau de bois, doit être placé : le défaut oppoſé s'appelle *maigre*.

H.

Hélice, du Grec *Eliſo*, *circumvolvo*, eſt une ligne courbe qui tourne autour d'un axe en s'élevant, comme la vis autour de ſon noyau. Voyez la Fig. 25 de la ſeconde Planche.

I.

Jarret, imperfection d'une direction de ligne ou ſurface, qui fait une ſinuoſité ou un angle. Le jarret ſaillant s'appelle *Coude*, le rentrant s'appelle *pli*. Une ligne droite fait un jarret avec une ligne courbe, lorſque leur jonction ne ſe fait pas au point d'attouchement.

Jauger, c'eſt appliquer une meſure d'épaiſſeur ou de largeur

vers

yers les bouts d'une pierre pour en faire les arrêtes ou les surfaces oppoſées paralleles.

Jauger une pierre, ſignifie ſouvent la même choſe que la *retourner*. Voyez *retourner*.

Impoſte du Latin *impoſitum*, mis deſſus, eſt le rang ou plutôt le Lit de pierre ſur lequel on établit la naiſſance de la voute ou le *Couſſinet*. *Impoſte* ſignifie auſſi cet ornement de moulures qui couronne un piédroit ſous la naiſſance d'une arcade, lequel ſert de baſe à un autre ornement ceintré, appellé *Archivolte*.

Intrados. Voyez *Doële*.

Joint a différentes ſignifications, c'eſt 1°. L'intervalle plein ou vuide qui reſte entre deux pierres contigues; dans ce ſens on dit *petit joint*, *grand joint*. 2°. Il ſe prend pour la ligne de diviſion des ceintres en vouſſoirs; ainſi on dit *joint en coupe*, *joint quarré*, *joint de tête*, *joint de lit*, *joint de doële*. Il faut remarquer que quoique les joints de lit ſoient des diviſions longitudinales de la doële, on n'entend par *joints de doële* que les joints tranſverſaux. 3°. Le mot de *joint* ſignifie auſſi quelquefois la ſurface d'une pierre inclinée & cachée dans une voute; mais alors au lieu de dire *joint en lit*, il faut dire *Lit en joint*.

L.

Layer du Latin *levigare*, polir, c'eſt tailler la pierre avec une eſpece de hache *brételée*, c'eſt-à-dire dentée en façon de ſcie, qu'on appelle *laye*, laquelle rend la ſurface unie quoique rayée de petits ſillons uniformes qui lui donnent une apparence agréable.

Lierne, c'eſt une des nervures des voutes Gothiques, qui lie le nerf appellé *Tierceron* avec celui de la diagonale qu'on appelle *Ogive*.

Ligne, ce mot en Architecture a pluſieurs ſignifications; pour notre ſujet elles ſe réduiſent à la verticale appellée *à plomb*, à l'horiſontale de *Niveau*, & à l'inclinée en *Talud*.

Limon, du Latin *limus*, tourné de travers, ſignifie la pierre ou piece de bois qui termine & ſoutient les marches d'une Rampe, ſur laquelle on poſe une baluſtrade de pierre ou de fer pour ſervir d'appui à ceux qui montent. Cette piece eſt droite dans les rampes droites & gauches, par ſes ſurfaces ſupérieure & inférieure, dans les parties tournantes des eſcaliers.

Lit, par analogie au lit ſur lequel on ſe couche, ſe dit 1°. de la ſituation naturelle de la pierre dans la carriere. 2°. de la ſurface ſur laquelle on poſe une pierre, ſoit activement, ſoit paſſivement; celle ſur laquelle elle s'appuye s'appelle *lit de deſſous*; celle ſur laquelle une autre pierre s'appuye s'appelle *lit de deſſus*; lorſque ces ſurfaces ſont inclinées à l'horiſon, comme dans les vouſſoirs & claveaux, on les appelle *lit en joint*.

Lunette, portion de voute percée dans une autre, dans laquelle elle forme une eſpece de figure de croiſſant de Lune d'où elle tire ſon nom.

M.

Maigre, par analogie à la maigreur des animaux, ſe dit des pierres dont les angles ſont plus aigus ou moins obtus qu'ils ne doivent être, de ſorte qu'elles n'occupent pas entierement la place à laquelle elles ſont deſtinées.

Marche ſignifie un degré, ſa partie horiſontale s'appelle *Giron*; de l'Italien *girare* tourner; parce que la plupart des anciens eſcaliers étoient tournans: la partie verticale en parement s'appelle *Contremarche*; lorſque le giron eſt d'inégale largeur, la partie la plus étroite s'appelle le *Collet*, & la plus large la *Queue*.

N.

Nerf ou *Nervure*, par analogie aux nerfs des animaux, eſt une arcade de pierre en ſaillie ſur le nud des voutes Gothiques; pour en appuyer & orner les angles ſaillans par des moulures, & fortifier les pendentifs, comme les nerfs ſont la force des animaux. Un des plus beaux morceaux que j'aye vû en ce genre, eſt la voute de l'Egliſe de *Velen* ou *Bethleem* à Liſbonne, où les nervures ſont de marbre travaillées, entrelaſſées & exécutées avec beaucoup d'art. On donne différens noms aux nervures par rapport à leur ſituation.

Les nerfs qui traverſent une voute diagonalement s'appellent croiſées *d'Ogives*, ceux qui la traverſent perpendiculairement s'appellent *arcs doubleaux*, ceux qui la traverſent obliquement entre les arcs doubleaux & les ogives, s'appellent *Liernes* & *Tiercerons*; ceux qui en ſuivent la direction en traverſant d'un pilier à l'autre, s'appellent *Formerets*.

Digitized by Google

Noyau, c'eſt le milieu d'un eſcalier à vis ou d'une voute tournante de niveau, qu'on appelle pour cela voute *ſur le noyau*, ou tournante, & de plus rampante, qu'on appelle *vis-Saint-Giles*; le noyau ſuit ordinairement la figure du lieu dans lequel il eſt: ſi c'eſt dans une tour ronde, il eſt un pilier rond, il eſt quarré ſi la tour eſt quarrée.

O.

Ogivé ou *Augive*, ſignifie chez le P. DERAND, les voutes Gothiques en *tiers point*. Ce mot, ſelon ma conjecture, vient de l'Allemand *Aug*, qui ſignifie l'œil; parce que les arcs des cercles des ceintres de voutes Gothiques ſont des angles curvilignes, ſemblables à ceux des coins de l'œil, quoique dans une poſition différente.

D'Aviler reſſerre la ſignification de ce terme aux croiſées d'ogives, mais mal-à-propos, car anciennement on diſoit indifféremment voute *d'Ogive*, voute *Moderne* ou en *Tiers-point*.

P.

Panache, c'eſt une voute en ſaillie ouverte par-devant, comme les Trompes, élevée ſur un ou deux angles rentrans pour porter en l'air une portion de tour creuſe; c'eſt ainſi que les Dômes des Egliſes modernes ſont portés ſur quatre panaches, élevés ſur les angles de la croiſée de la Nef avec les bras de la croix.

Lorſque le Panache eſt établi ſur un ſeul angle, ſa figure eſt ordinairement un triangle ſphérique terminé par trois arcs, dont deux ſont verticaux en quart de cercle ou d'ellipſe, & le troiſieme horiſontal qui ſert de baſe à la Tour.

Lorſque le panache eſt ſur un pan coupé, c'eſt une ſurface concave quadrilatere irréguliere.

Ce nom peut venir du Latin *pandatio* & de *pandare* qui ſignifie ſelon Vitruve (l. 6. Chap. 11.) courber ſous le faix.

On ne doit pas confondre avec d'Aviler les noms de Panache & de pendentif, ce ſont des choſes différentes. Voyez *Pendentif*.

Panneau, de la même étimologie *pando*, eſt le modele d'une des ſurfaces d'un vouſſoir taillé ſur du bois, du carton ou autre matiere mince, pour être appliqué ſur la pierre, & ſervir à tracer le contour d'un *Lit*, d'une *Doële*, ou d'une *Tête*; c'eſt

leur uſage qui leur donne les noms de *Panneau de lit*, &c.

Panneau flexible eſt celui qui eſt fait ſur du carton, du fer-blanc, ou avec une lame de plomb pour pouvoir être plié & appliqué ſur une ſurface concave ou convexe, cylindrique ou conique.

Parallele en un ridicule jargon d'Ouvrier, ſignifie quelquefois *dans un même plan*; ainſi Blanchard, dans ſon Traité de la Coupe des bois, imprimé à Paris en 1726, dit qu'une *courbe eſt parallele à une perpendiculaire droite, à une horiſontale & à un angle.* Voyez pag. 73, & par-tout ailleurs où il eſt queſtion de la même expreſſion.

Parement, ſurface apparente.

Pendant, petit vouſſoir des voutes Gothiques ſans coupe, fait à l'équerre.

Pendentif, ou plutôt Pandantifs de *Pandare*, plier ſous le faix, eſt une eſpece de panache qui eſt le quart d'une demi croiſée de voute Gothique, compris entre l'Ogive & le Formeret.

Plan, ſelon les Géometres, ſignifie une ſurface plane infiniment prolongée, ſi l'on veut; c'eſt dans ce ſens qu'on dit que les baſes des corps ſéparés ſont dans un même plan. Lorſque l'on dit qu'une telle ligne eſt dans le plan horiſontal ou dans un plan vertical, c'eſt la même choſe que de dire, dans le langage des arts, de *niveau* ou *aplomb*.

Ce qui n'eſt, ni de niveau ni à plomb, ſera dit *Incliné à l'horiſon*, & en terme de l'art, en *talud*, en *glacis*, ou en *deſcente*.

Plan, en terme d'Architecture, ſignifie la projection d'un corps ſur une ſurface horiſontale, & quelquefois ſur une ſurface inclinée, alors il s'appelle *plan ſuivant la rampe*.

On l'appelle *plan Geométral* ou *Ichnographie*, lorſqu'il n'exprime que les diſtances horiſontales, & *plan relevé*, lorſqu'on y ajoute une élévation pour mieux exprimer ce qu'on veut repréſenter, ſans s'embaraſſer des meſures de hauteur, comme on voit un grand plan de Paris.

Le plan horiſontal que nous appellons toujours *projection horiſontale*, par les raiſons que nous en avons donné au troiſieme Livre, eſt le premier deſſein néceſſaire pour la Coupe des pierres.

Platebande, c'eſt pour la Coupe des pierres une voute droite & plane, de niveau ou rampante, qui ſert de linteau & de fer-

meture à une porte, à une fenêtre ou à toute autre baye, comme l'architrave ſur les entrecolonnemens. Les pierres qui en ſont les parties s'appellent *Claveaux* & non pas *vouſſoirs* comme aux autres voutes. La longueur de la platebande entre ſes piédroits, s'appelle *Portée*, c'eſt le genre de voute qui a plus de pouſſée, c'eſt-à-dire, qui fait le plus d'effort pour renverſer ſes piédroits; parce que les pierres y ſont dans la ſituation la plus forcée.

Plomée, ſelon le P. DERAND, par corruption de *plombé*, eſt une ligne tirée à plomb.

Plumée, eſt une excavation faite dans la pierre, au marteau, ou avec le ciſeau, ſuivant une cerche ou une regle en quelque poſition qu'elle ſoit, à plomb, ou de niveau ou inclinée. Ce nom vient apparemment de la reſſemblance de la découverte que l'on fait de la peau d'un oiſeau en ôtant la plume.

Porte, c'eſt une baye qui prend le nom, 1°. du mur dans lequel elle eſt percée, comme *Porte en tour ronde*, ſi elle eſt convexe; *Porte en tour creuſe*, ſi elle eſt concave. 2°. De l'endroit où elle eſt placée, dans un angle rentrant, c'eſt une *porte dans l'angle*, dans un ſaillant, c'eſt une *porte ſur le coin*. 3°. De la direction, comme *porte droite*, qui eſt perpendiculaire à ſa direction, *Biaiſe*, ſi elle lui eſt oblique; *Ebraſée*, ſi ſes piédroits s'ouvrent en dehors, comme aux Egliſes Gothiques de Notre-Dame de Paris, de Rheims, &c.

Portée, intervalle de deux piédroits dans une platebande.

Pouſſée, c'eſt l'effort que fait une voute pour écarter ſes piédroits, lequel eſt d'autant plus grand que la courbure approche de la ligne droite; ainſi le ceintre en anſe de panier ſurbaiſſé pouſſe plus que le plein ceintre; celui-ci plus que le ſurbaiſſé; celui-ci plus que le *Tiers-points* Gothique c'eſt ſans doute par cette raiſon que les anciennes Egliſes ſont la plupart en *Tiers-point*, cette conſtruction d'ailleurs donnant la facilité d'employer de très-petits vouſſoirs qui coutoient peu de tranſport.

Q.

Quarrément, ſignifie à angle droit, à l'équerre.

Quartier a pluſieurs ſignifications. Il ſe prend pour une pierre de taille d'une certaine groſſeur. Il ſignifie auſſi le quart du

tour d'un eſcalier, alors on ajoute *Quartier tournant*. Si cette partie eſt arrondie & ſaillante hors d'un mur, on l'appelle *Quartier de vis ſuſpendue*, qui n'eſt ſoutenue en l'air que par l'artifice de la coupe des pierres.

R.

Racheter, c'eſt joindre ſans interruption deux ſurfaces de voutes différentes par des angles ſaillans ou rentrans, ou par d'autres ſurfaces intermédiaires qui faſſent une tranſition agréable de l'une à l'autre.

Racordement, ſe dit de la réunion de deux ſurfaces, pour qu'elles paroiſſent continues, ou que leur joction (ſi elles font un angle entr'elles) faſſe un arrête en ligne droite, ou d'une courbure de ceintre réguliere & uniforme; on dit pour le verbe, *Racorder*.

Ragréer, c'eſt enlever avec les outils convenables, les boſſes ou balevres qui ſe trouvent dans les paremens & dans les joints pour les rendre unis, propres & agréables à la vûe.

Ralongée ſe dit d'une ligne courbe à laquelle on donne plus d'extenſion ſur un diametre ou une corde qu'elle n'en avoit, ſans changer ſa profondeur. On dit *Cherche ralongée*.

Rampant. Voyez *Arc rampant*.

Rampe, inclinaiſon à l'horiſon d'une ligne ou d'une ſurface droite ou courbe, avec degrés, ou ſans degrés.

Reculement, ſe dit ordinairement de la diſtance d'une ligne verticale à une ligne inclinée, comme de l'aplomb au talud, ou de l'écartement d'une ligne courbe à l'égard de la tangente, comme à une porte en tour ronde ou creuſe à l'égard de ſa corde ou d'une parallele.

Reins de voute, c'eſt la partie vuide ou pleine qui eſt entre la moitié d'un arc & ſon piedroit, depuis la naiſſance juſques vers le ſommet. Les reins des voutes Gothiques ſont vuides.

Remenée, terme peu uſité, qui vient de l'Italien *Remenato*; ce n'eſt ſelon d'Aviler qu'une ſorte d'arriere-vouſſure; mais ſa propre ſignification eſt notre *bombé* d'un grand arc de cercle moindre que la moitié, comme il eſt clairement expliqué au premier Livre de Palladio Ch. 24 à REMENATO, *che coſi chiamano i volti che ſono di portione di Cerchio & non arrivano à ſemicircolo*, & preuve qu'il ne l'entend pas ſeulement d'une ar-

riere vouſſure, c'eſt qu'il l'applique à la partie d'une voute ſphérique ſur un quarré, laquelle eſt au-deſſus des pendentifs.

Renfondrement, terme de Menuiſerie, ſuivant Blanchard, au lieu de *Renfoncement*.

Repaire du Latin *reperire*, retrouver, c'eſt une marque que l'on fait ſur une pierre pour reconnoître une diviſion ou un trait dont on a beſoin pour tailler. Ainſi on dit *Repairer*, au lieu de marquer un point ou une ligne.

Reprendre, c'eſt refaire une partie de vouſſoir qui excéde l'étendue qu'elle doit avoir.

Retombée, c'eſt la même ligne qu'on appelloit anciennement *abbatue*, dont nous avons parlé: c'eſt l'intervalle du niveau entre la naiſſance inférieure d'un arc, & l'aplomb abaiſſé de ſon extrêmité ſupérieure.

On appelle *premieres retombées*, les vouſſoirs de la naiſſance d'une voute, qui ont des lits ſi peu inclinés, qu'ils ne gliſſent pas, & ſe ſoutiennent les uns ſur les autres, ſans le ſecours des ceintres de Charpente, tels ſont les cinq ou ſix premieres aſſiettes des vouſſoirs des arcades d'un grand diametre, quelquefois plus.

Retondre une pierre, c'eſt enlever une légere épaiſſeur dans toute une ſurface pour la perfectionner: c'eſt une eſpece de ragrément.

Retour d'équerre, c'eſt un angle droit: on dit ſe *retourner d'équerre* pour faire une ligne ou une ſurface perpendiculaire à une autre.

Retourner une pierre, c'eſt la jauger ou lui faire une ſurface parallele ou à-peu-près à un lit ou à un parement donné.

S.

Sauterelle, inſtrument compoſé de deux regles de bois aſſemblées par un bout, comme la tête d'un compas, pour être mobiles & propres à prendre l'ouverture de toutes ſortes d'angles rectilignes droits, aigus ou obtus. C'eſt un *récipiangle* pour tranſporter ſur la pierre ou ſur le bois l'angle d'une encoignure ou d'un trait de l'épure, plus uſité dans la Coupe des bois que dans celle des pierres, où l'on ſe ſert pour la même fin du compas d'Appareilleur, qui eſt une eſpece de ſauterelle à laquelle on a ajouté des pointes pour ſervir de fauſ-

ſe équerre & de compas ſuivant les occurrences.

Simbleau, ou plutôt *Cingleau*, par corruption du Latin *Cingulum*, un cordon, eſt le cordeau qui ſert à tracer les arcs de cercle d'une étendue plus grande que les branches des plus grands compas, ſoit à branches ſoit à verges. Les meilleurs ſingleaux ſont des chaînettes qui ne ſont pas ſujettes à s'alonger comme les cordes.

On appelle auſſi ſimbleau une perche immobile par un de ſes bouts qui ſert à tracer un grand arc de cercle.

Singliots, ſont les deux *foyers* d'une ellipſe où l'on attache les bouts d'un cordeau égal au grand axe, pour tracer cette courbe par le mouvement continu, qu'on appelle le *Trait du Jardinier*.

Sommier, par analogie au ſommet, c'eſt la premiere pierre d'une platebande qui porte à plein au ſommet du *piédroit* où elle forme le premier lit en joint, & l'appui de la butée des claveaux de chaque côté, pour les tenir ſuſpendus ſur le vuide de la baye, d'où ils ne peuvent s'échaper qu'en écartant les ſommiers. La coupe ou inclinaiſon de leur lit en joint ſur l'horiſon, eſt ordinairement de 60 degrés, parce qu'on a coutume de la tirer du ſommet d'un triangle équilatéral.

Surbaiſſer, c'eſt n'élever une courbure de ceintre qu'au-deſſous du demi-cercle, c'eſt-à-dire, faire un ceintre elliptique, ou en ovale, dont le grand axe ſoit horiſontal.

Surhauſſer, c'eſt au contraire élever le ceintre au-deſſus du demi-cercle, ou faire une ovale dont le grand axe ſoit à plomb par le milieu de la clef.

Surplomber, c'eſt faire pencher une ligne ou une ſurface à angle aigu avec l'horiſon.

T.

Taluder, c'eſt au contraire faire un angle obtus avec l'horiſon.

Talud, *Talus* ou *Talut*, le premier paroît plus naturel, ſi l'on doit dire taluder ſuivant l'uſage, car on ne dit jamais *taluſer*; & quoique d'Aviler diſe *taluter*, je ne l'entend point dire parmi les Artiſtes; M. Gautier, Directeur des Ponts & Chauſſées, a écrit comme nous *talud*, dans ſes Traités des Ponts & des Chemins, ce mot vient du Latin *Talus*, qui ſignifie le talon.

C'eſt l'inclinaiſon d'une ligne ou d'une ſurface au-delà de l'a

plomb

plomb en angle obtus, tout au plus juſqu'à l'angle de 135 degrés; car dès que la ſurface eſt plus inclinée, cette inclinaiſon s'appelle en *Glacis*.

Tambour eſt une pierre ronde en portion de cylindre qui eſt une partie de fuſt de colonne ou de pilier, qu'on n'a pû faire d'une piece faute de pierre aſſez grande. Ce mot vient de la figure de la caiſſe dont on ſe ſert dans les troupes pour faire le bruit du ſignal de marche, d'aſſemblée ou d'autre manœuvre, parce qu'on l'appelloit anciennement *Tambour*, au lieu qu'aujourd'hui ce nom a paſſé à l'homme qui frappe deſſus pour en tirer le ſon.

Tas de charge, c'eſt une ſaillie de pierres, dont les lits avançant les uns ſur les autres, font l'effet d'une voute, de ſorte qu'il faut des pierres longues pour balancer la partie qui eſt ſans appui; mais ce genre d'ouvrage n'eſt bon qu'en petit, ou ſeulement pour les premieres pierres de la naiſſance d'une voute.

Taſſer ſe dit de l'affaiſſement d'une voute, dont la charge fait diminuer la hauteur & reſſerrer les joints.

Taſté, ligne taſtée eſt celle qu'on trace à la main pour voir l'effet d'une courbure.

Tierceron, c'eſt un nerf des voutes d'ogives, ſitué entre le formeret ou arc doubleau & celui d'ogive en diagonale.

Tour ronde ne ſignifie pas toujours une tour, mais tout parement convexe de mur cylindrique ou conique; *Tour creuſe* eſt le concave.

Tracer à la main, c'eſt déterminer à vûe d'œil le contour d'une ligne courbe, ou en ſuivant pluſieurs points donnés par intervalle, ou en corrigeant ſeulement par le goût du deſſein une ligne courbe qui ne ſatisfait pas la vûe, comme une doucine compoſée d'arcs de cercle mal aſſemblés, doit être encore tracée à la main.

Lorſqu'on a pluſieurs points donnés pour une ligne courbe, il convient mieux de ſe ſervir d'une regle pliante que de tracer à la main: le contour en eſt plus net.

Traîner, c'eſt faire méchaniquement une ligne parallele à une autre ligne donnée, droite ou courbe, en trainant le compas ouvert de l'intervalle requis d'une ligne à l'autre, de maniere qu'une de ſes pointes parcoure la ligne donnée, & que l'autre pointe ou plutôt la ligne qu'on peut imaginer paſſer par

ces deux poins, soit toujours perpendiculaire ou également inclinée à la ligne donnée, ou à sa tangente, si elle est courbe. Les Menuisiers, au lieu de compas, se servent pour cette opération d'un instrument qu'ils appellent *Trusquin*.

Trait, à l'égard de la Coupe des pierres, signifie en général tout dessein qui conduit aux moyens nécessaires pour parvenir à la formation d'une voute, soit plan, profil, élévation ou développement. Ce terme est plus étendu que celui d'*Epure*, en ce qu'il s'entend du dessein en petit & en grand, au lieu que l'épure ne signifie que celui de grandeur naturelle sans réduction.

On dit *couper du trait* pour exprimer l'étude que l'on fait avec de la craye, du platre ou autre matiere facile à couper, qu'on taille en petits vouſſoirs de la même maniere que si on exécutoit une voute en grand, pour apprendre à joindre la théorie à la pratique, & concevoir plus facilement l'effet des traits dont on s'est servi, soit aussi pour sentir le plus ou le moins de commodité des différentes manieres qu'on a inventé, en se servant des panneaux ou en taillant par équarrissement.

Trait quarré, c'est suivant le langage des Ouvriers, la maniere de faire une perpendiculaire à une ligne donnée. Si cette ligne est courbe, comme un cercle ou une ellipse, la perpendiculaire à sa tangente s'appelle *trait quarré sur la ligne courbe*, & *au bout de la ligne courbe* lorsqu'elle l'est à une de ses extrémités.

Trompe, c'est, ordinairement une voute de la figure d'une moitié de cone qui se présente par sa base, comme le *pavillon* d'une trompette ou cor-de-chasse, qui est cette espece d'entonnoir par où sort le bruit du son, & parce qu'anciennement cet instrument s'appelloit Trompe, on a donné le même nom à la voute qui en imite une partie. Cette étimologie est naturelle, & montre la puérilité de l'imagination de ceux qui disent avec d'Aviler, que ce nom vient de ce que la voute *trompe* & surprend ceux qui la regardent sans connoissance de l'artifice de son appareil.

On appelle aussi du même nom des petites voutes en portion de sphere qu'on fait aux angles saillans pour en émousser le pied, & soutenir le haut en l'air. Alors on les appelle *Trompe en Niche*.

Il y a différentes sortes de trompes, dont les noms viennent

ou de leurs ſituations ou de leurs figures.

A l'égard de la figure, il en eſt, comme je viens de dire, de coniques & de ſphériques.

La conique Droite s'appelle *Trompe fondamentale*, chez le P. DERAND.

La ſphérique s'appelle *Trompe en niche*.

Lorſque la face de l'une ou de l'autre eſt convexe, on l'appelle *Trompe en tour ronde*, ſi elle eſt concave, *Trompe en tour creuſe*, ſi la face eſt briſée en pluſieurs ſuperficies planes, on l'appelle *Trompe à pan*, ſi les impoſtes ſont d'inégale hauteur on l'appelle *Trompe rampante*, ſi la face eſt ondée & les impoſtes rampantes, on l'appelle *Trompe d'Anet*.

A l'égard de la ſituation, ſi elle eſt dans un angle ſaillant, on l'appelle *Trompe ſur le Coin*, ſi elle eſt dans un angle rentrant, *Trompe dans l'Angle*.

Trompillon, c'eſt la naiſſance du milieu d'une trompe, qui eſt au ſommet du cône dans les coniques; ou au pole de la ſphere dans les ſphériques; c'eſt une pierre d'une ſeule piece, qu'on eſt forcé de faire ainſi pour occuper la place de pluſieurs extrémités de vouſſoirs en pointe, qui ſeroient tellement longs, qu'on ne pourroit les tailler & les poſer ſans riſque de les caſſer.

On appelle auſſi *Trompillons* les petites trompes faites de pluſieurs pieces ſous les quartiers tournans de certains eſcaliers.

V.

Vis d'eſcalier, c'eſt un arrangement de marches, de degrés au tour d'un pilier qu'on appelle le *Noyau* de la vis; quelquefois le noyau de la vis eſt ſupprimé, les marches alors ne ſont ſoutenus que par leur queue dans le mur de la Tour, & en partie ſ celles qui ſont de ſuite dès le bas; alors on l'appelle *Vis jour*.

Si l'eſcier à vis dans une tour ronde eſt vouté en berceau tournt & rampant, on l'appelle *Vis-Saint-Giles ronde*.

Si la toeſt quarrée, le noyau étant auſſi quarré, chaque côté étant outé en berceau irrégulier d'une figure en quelque façon te, on l'appelle *vis-Saint-Giles quarrée*.

Vouſſoir eſt une pierre qui fait partie d'une voute concave, de quelqfigure qu'elle ſoit, cylindrique, conique, ſphérique

ou annulaire : ſon étimologie vient apparamment du mot Latin *volutus*, tourné en rond.

Les vouſſoirs qui forment la naiſſance d'une voute, s'appellent *Couſſinets*, ceux qui ſont à ſon ſommet s'appellent *Clefs*.

Lorſqu'ils ſont terminés en haut par une partie qui déborde leur queue, on les appelle *vouſſoirs a croſſettes*.

Lorſqu'ils ſe diviſent en deux parties pour lier deux voutes, qui font un angle ſaillant ou rentrant, on les appelle *vouſſoirs à branches*.

Lorſqu'un vouſſoir eſt ſuivi d'un autre en continuation, on l'appelle *vouſſoir ſans fin*; tels ſont ceux des arches du Pont Royal à Paris.

Vouſſure ſignifie toute ſorte de courbure en voute, mais particulierement ces portions de voute qui ſervent de baſe aux plafonds à la mode.

Les vouſſures qui ſont au-dedans d'une baye de porte ou de fenêtre derriere la fermeture s'appellent *arriere-vouſſures*; il en eſt de différentes figures, comme nous l'avons dit à ce mot.

Voute, du Latin *Volutum*, tourné en rond, ſignifie toute ſorte de couverture de maçonnerie ou de pierre de taille qui ſe ſoutient en l'air entre ſes piédroits, par l'arrangement & la figure des parties qui la compoſent.

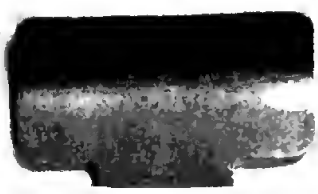
Les voutes propres à couvrir de grands appartemens s'appellent *Maîtreſſes voutes* pour les diſtinguer de celles qui ne peuvent ſervir qu'à couvrir de petites parties, comme les trompes, les arrieres-vouſſures & les niches.

Quoique les voutes puiſſent être variées d'une infinité de façons, on peut les reduire en ſept ou huit eſpeces; ſçavoir, en planes, cylindriques, coniques, ſphériques, annullaires, hélicoïdes, mixtes & irrégulieres. C'eſt dans cet ordre qu'on les a rangé dans le Livre Quatrieme de cet Ouvrage, où l'on donne la maniere de les faire.

FIN.

644183

Bibliotheca Nazionale NAPOLI V. E. III


Digitized by Google

Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XIII

30-13-4

Palchetto D

Num.° d' ordine